

**ANALISA KESULITAN PEMBUKTIAN MATEMATIS MAHASISWA
PADA MATA KULIAH ANALISIS REAL
ANALYSIS OF DIFFICULTIES BY STUDENTS IN MATHEMATICAL
PROOFS IN REAL ANALYSIS COURSE**

Kartini¹, Elfis Suanto²

^{1,2}Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UR, Pekanbaru
Email: tin_baa@yahoo.com / HP. 081371863787

ABSTRACT

The fact many students have difficulty in mathematical proofs. This study aims to determine the level of student mastery and difficulty in reading the proofs and construct the proofs. The subjects were mathematics education students who are studying real analysis at FKIPUR, amounting to 12 people. The research instrument was a sheet test skill reading the proof and construct the proof, sheet questionnaire and interview guides. The data analysis technique is descriptive quantitative and qualitative. The results of this study show that (1) Average skill reading the proof was 42.2 classified in the low category; (2) Average skill to construct the proofs is 40.0 classified in the category of low. In this study also found some of the difficulties experienced by students in reading and constructing the proofs.

Keywords: reading the proofs, construct the proofs, mathematical proofs, real analysis.

ABSTRAK

Kenyataan banyak mahasiswa mengalami kesulitan dalam pembuktian matematis. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui tingkat penguasaan dan kesulitan mahasiswa dalam membaca bukti dan mengkonstruksi bukti. Subjek penelitian ini adalah mahasiswa pendidikan matematika FKIP UR yang sedang kuliah Analisis Real yang berjumlah 12 orang. Instrumen penelitian ini adalah lembar soal tes kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti, lembar angket, dan pedoman wawancara. Teknik analisis data adalah diskriptif kuantitatif dan kualitatif. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa (1) Rata-rata kemampuan membaca bukti adalah 42,2 tergolong dalam kategori rendah; (2) Rata-rata kemampuan mengkonstruksi bukti adalah 40,0 tergolong dalam kategori rendah. Dalam penelitian ini juga ditemukan beberapa kesulitan yang dialami mahasiswa dalam membaca dan mengkonstruksi bukti.

Katakunci: membaca bukti, mengkonstruksi bukti, pembuktian matematis, analisis real

1. PENDAHULUAN

Bukti (*proof*) menurut Alibert dan Thomas adalah alat untuk meyakinkan diri sendiri dan mencoba untuk meyakinkan orang lain [1]. Menurut Hanna dan Barbeau (dalam [10]), bukti adalah sejumlah langkah logis dari apa yang diketahui untuk mencapai suatu kesimpulan menggunakan aturan inferensi yang dapat diterima. Mingus dan Grassl (dalam [10]) mendefinisikan bukti sebagai suatu kumpulan pernyataan yang benar dan terkait bersama-sama dalam cara yang logis yang berfungsi sebagai argumen untuk meyakinkan kebenaran dari pernyataan matematika.

Dari beberapapendapat tersebut dapat disimpulkan bahwa bukti adalah alat yang berpasua untuk kumpulan pernyataan yang benardanterkaikbersama-sama untuk mencapai suatu kesimpulan dengan menggunakan aturan inferensi yang benar yang digunakan untuk meyakinkan diri sendiri dan orang lain.

Pembuktian adalah demonstrasi yang meyakinkan bahwa beberapa pernyataan matematika itu adalah benar [11]. Menurut Bartolini (dalam [5]), pembuktian (*proving*) adalah dugaan (*conjecture*) yang memerlukan pembentukan sebuah hubungan fungsional dengan aktivitas argumentasi yang dibutuhkan untuk memahami (menghasilkan) suatu pernyataan dan mengakui sebagai hal yang masuk akal. Hanna (dalam [13]) mendefinisikan pembuktian matematis sebagai sebuah argumen yang diperlukan untuk memvalidasi sebuah pernyataan atau sebuah argumen untuk meyakinkan. Weber (dalam [10]) menyatakan, konstruksi bukti adalah tugas matematika di mana mahasiswa disediakan sejumlah informasi awal (misalnya asumsi, aksioma, definisi) dan diminta untuk menerapkan aturan menarik kesimpulan (misalnya mengingat fakta yang ditetapkan sebelumnya, menggunakan teorema) sampai kesimpulan yang dikehendaki diperoleh. Dari beberapapendapat tersebut dapat dikatakan bahwa pembuktian matematis adalah membuat sekumpulan argumen yang benar dan terkait secara logis menurut aturan inferensi yang bertujuan untuk memvalidasi kebenaran suatu pernyataan.

Pembuktian berperan sangat penting dalam matematika karena dalil atau teorema yang ditemukan harus dibuktikan secara deduktif. Pembuktian merupakan suatu karakteristik penting dalam matematika. Swan dan Rigway (dalam [2]) bahwa bukti/pembuktian merupakan jantung dari matematika dan berfikir matematika. Oleh karena itu kemampuan pembuktian matematis merupakan kemampuan yang penting dan perlu dimiliki oleh siswa. Hal ini sebagaimana dinyatakan dalam kurikulum matematika, agar siswa mempunyai kompetensi matematika dalam bentuk keterampilan menyusun bukti [3]. Dalam NCTM lebih rincil lagi mengenai kemampuan pembuktian dan penalaran yang harus dimiliki siswa yakni (1) mengenal penalaran dan pembuktian sebagai aspek-aspek fundamental matematika, (2) membuat konjektur dan memeriksa kebenaran dari konjektur itu, (3) mengembangkan dan mengevaluasi argumen dan pembuktian matematis, dan (4) memilih dan menggunakan bermacam-macam jenis penalaran dan metode pembuktian [8].

Secara tradisional, peran bukti adalah untuk memverifikasi kebenaran pernyataan matematis. Untuk lebih jelasnya peran pembuktian yaitu: 1) untuk memverifikasi bahwa suatu pernyataan itu benar, 2) untuk menjelaskan mengapa suatu pernyataan itu benar,

3) untuk mengkomunikasikan pengetahuan matematika, 4) untuk menemukan atau menciptakan matematika baru, atau 5) mensistematiskan pernyataan menjadi sistem aksiomatis [7].

Sementara Hanna dan Jahnke (dalam [9]) lebih menekankan bahwa pembuktian untuk mengkomunikasikan pemahaman matematis. Selain itu peran pembuktian juga sangat penting dalam menemukan pengetahuan matematika baru. Menurut De Villiers (dalam [10]), pembuktian bukan hanya sebagai sarana untuk memverifikasi hasil yang sudah ditemukan, tetapi juga merupakan sarana untuk mengeksplorasi, menganalisis, dan menemukan matematika yang baru. Dalam menemukan matematika yang baru, seseorang harus mempunyai kemampuan membaca bukti yang diberikan agar dapat meyakinkan diri sendiri tentang kebenaran dari pengetahuan yang baru diperoleh tersebut. Hal ini berarti bahwa kemampuan membaca bukti juga termasuk dalam kemampuan pembuktian matematis.

Dari uraian tentang kemampuan pembuktian tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa kemampuan pembuktian matematis terdiri dari kemampuan mengkonstruksi bukti dan kemampuan membaca bukti. Kemampuan membaca bukti adalah kemampuan mengevaluasi pernyataan dan pembuktian matematis. Kemampuan mengkonstruksi bukti adalah kemampuan membuat/menuliskan bukti dengan menggunakan logika matematika dan metode pembuktian secara formal.

Ada beberapa alasan mengapa perlu diberikan pengajaran pembuktian yaitu: 1) bukti adalah bagian yang integral dalam matematika, 2) untuk verifikasi dan penemuan fakta, 3) untuk pengembangan kemampuan berpikir logis dan kritis siswa, dan 4) mempercepat dan meningkatkan pemahaman matematis siswa [4]. Karena pentingnya pembuktian, maka mahasiswa pendidikan matematika sebagai calon guru harus memiliki kemampuan pembuktian matematis.

Kemampuan pembuktian matematis merupakan kemampuan matematikatingkattinggi. Oleh karena itu kemampuan pembuktian matematis tidak akan berkembang kalau tidak dilatih. Salah satu mata kuliah yang mendukung hal tersebut adalah Analisis Real. Mata kuliah Analisis Real bertujuan: a) memiliki pengetahuan dasar analisis matematika, khususnya tentang bilangan, barisan, fungsi, limit, dan turunan, b) mampu bernalar secara logis dan mengekspresikan hasil penerapannya secara tertulis, sistematis dan *rigorous* [6]. Melalui perkuliahan Analisis Real, mahasiswa berlatih untuk memverifikasi bahwa suatu pernyataan itu benar, menjelaskan mengapa suatu pernyataan itu benar, mengkomunikasikan pengetahuan matematika, dan menuliskannya dalam bahasa yang logis dan sistematis. Aktivitas-aktivitas tersebut diperoleh melalui kegiatan pembuktian. Oleh

karena itu untuk meningkatkan pemahaman mahasiswa dalam Analisis Real dapat dilakukan melalui peningkatan kemampuan mahasiswa dalam pembuktian.

Namun kenyataan ditemui bahwa banyak mahasiswa mengalami kesulitan dalam pembuktian. Hal ini peneliti alami berdasarkan pengalaman sebagai dosen yang mengajar mata kuliah analisis real. Moore (dalam [10]) menemukan tujuh sumber utama kesulitan siswa dalam menulis bukti yaitu: (1) Mahasiswa tidak mengetahui definisi, yaitu, mereka tidak dapat menyatakan definisi; (2) Mahasiswa memiliki sedikit pemahaman intuitif dari konsep; (3) Gambar konsep mahasiswa kurang memadai untuk melakukan pembuktian; (4) Mahasiswa tidak mampu, atau tidak mau, untuk menghasilkan dan menggunakan contoh sendiri; (5) Mahasiswa tidak tahu cara menggunakan definisi untuk mendapatkan struktur bukti secara menyeluruh; (6) Mahasiswa tidak mampu memahami dan menggunakan bahasa dan notasi matematika; (7) Mahasiswa tidak tahu bagaimana cara memulai bukti.

Dari uraian masalah yang telah dikemukakan di atas, peneliti ingin mengetahui lebih dalam tentang kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematis dan ingin mengetahui penyebab kesulitan tersebut khususnya dalam mata kuliah Analisis Real. Hasil penelitian ini nantinya dapat digunakan sebagai rujukan dalam pembelajaran Analisis Real dan mata kuliah lain yang mengembangkan kemampuan pembuktian matematis.

Berdasarkan latar belakang di atas maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: (1) Bagaimana tingkat penguasaan mahasiswa dalam membaca bukti?; (2) Bagaimana tingkat penguasaan mahasiswa dalam mengkontruksi bukti?; (3) Apa kesulitan mahasiswa dalam membaca bukti?; (4) Apa kesulitan mahasiswa dalam menyusun bukti?

Adapun tujuan penelitian ini adalah: (1) Untuk mengetahui tingkat penguasaan mahasiswa dalam membaca bukti; (2) Untuk mengetahui tingkat penguasaan mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti; (3) Untuk mengetahui kesulitan mahasiswa dalam membaca bukti; (4) Untuk mengetahui kesulitan mahasiswa dalam menyusun bukti.

2. METODE PENELITIAN

Subjek dalam penelitian ini adalah mahasiswa program studi pendidikan matematika FKIP UR yang sedang kuliah Analisis Real yang berjumlah 12 orang.

Data dalam penelitian ini ada dua jenis, yaitu data kuantitatif dan data kualitatif. Data kuantitatif diperoleh dari hasil tes kemampuan pembuktian matematis. Indikator dan instrumen tes kemampuan pembuktian matematis mengacu pada [12] dan memodifikasi

instrumennya. Data kualitatif diperoleh dari hasil angket, wawancara, dan lembaran jawaban mahasiswa. Analisis data dilakukan secara deskriptif kuantitatif dan kualitatif untuk menjawab pertanyaan penelitian.

Penelitian ini dilaksanakan dalam beberapa tahapan, yaitu: (1) Mengembangkan instrumen penelitian; (2) Mengumpulkan data penelitian; (3) Menganalisis data hasil penelitian dan menyusun laporan tentang temuan-temuan penelitian dan rekomendasi.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Gambaran umum mengenai kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti mahasiswa disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Kemampuan Membaca Bukti dan Kemampuan Mengkonstruksi Bukti

Statistik	Kemampuan Pembuktian Matematis	
	Membaca Bukti	Mengkonstruksi Bukti
<i>N</i>	12	12
Rata-rata	42,2	40,0
Simpangan Baku	9,1	15,8
Nilai Maksimum	64,6	79,2
Nilai Minimum	28,1	25,0

Keterangan: Skor ideal maksimal adalah 100

Berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat bahwa bahwa rata-rata kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti keduanya masih tergolong rendah. Secara deskriptif terlihat bahwa rata-rata membaca bukti lebih tinggi dari rata-rata mengkonstruksi bukti. Namun, simpangan baku dari rata-rata kemampuan membaca bukti lebih rendah dari rata-rata kemampuan mengkonstruksi bukti. Ini artinya bahwa penyebaran nilai membaca bukti lebih kecil daripada penyebaran nilai mengkonstruksi bukti. Hal ini juga terlihat dari nilai maksimum dan minimum yang diperoleh pada masing-masing kemampuan berbeda jangkauannya. Ini artinya bahwa kemampuan mahasiswa dalam membaca bukti lebih seragam daripada kemampuan mahasiswa mengkonstruksi bukti.

Berdasarkan angket dan wawancara dengan mahasiswa diperoleh bahwa mahasiswa lebih mudah membaca bukti daripada mengkonstruksi bukti. Alasannya karena kalau membaca bukti, buktinya sudah disediakan tapi kalau mengkonstruksi bukti, buktinya belum ada sama sekali. Namun, ada juga mahasiswa yang menyatakan bahwa mengkonstruksi bukti lebih mudah daripada membaca bukti karena dalam membaca bukti, mahasiswa sulit memberikan alasan dalam setiap langkah yang diberikan.

Untuk lebih mengetahui lebih dalam tentang kemampuan membaca bukti, akan dilihat per indikatornya disajikan dalam Tabel 2.

Tabel 2. Kemampuan Membaca Bukti

No	Indikator	Skor
1	Mahasiswa dapat menentukan kebenaran atau kesalahan suatu bukti pernyataan dan memberikan contoh penyangkal.	35,4
2	Mahasiswa dapat menemukan kesalahan suatu bukti pernyataan dan memperbaikinya.	33,3
3	Mahasiswa dapat memberikan alasan (argumentasi) pada setiap langkah pembuktian dari suatu pernyataan.	46,2

Keterangan:Skor idealmaksimaladalah100

Rata-rata dari ketiga indikator kemampuan membaca bukti masih tergolong rendah. Pada indikator 1, kesulitan yang dialami adalah menentukan kebenaran atau kesalahan suatu pernyataan. Hanya dua orang(17%) mahasiswa yang menyatakan bahwa pernyataan yang diberikan adalah salah. Hanya satu orang (8,3%) yang dapat menunjukkan letak kesalahan dari bukti yang diberikan secara tepat. Hanya satu orang (8,3%) yang dapat memberikan contoh penyangkal dari pernyataan yang diberikan namun adasedikit kesalahan. Dari beberapa jawaban mahasiswa terlihat bahwa mahasiswa kurang paham dengan konsep bilangan rasional.

Pada indikator 2, kesulitan yang dialami adalah menentukan letak kesalahan dari bukti yang diberikan. Hanya 25% yang dapat menentukan letak kesalahan, namun tidak dapat memperbaiki kesalahan tersebut secara tepat. Dari jawaban mahasiswa terlihat bahwa mahasiswa kurang paham menggunakan sifat ketidaksamaan bilangan real yakni sifat jika $a > 0, b > 0$ maka $a + b > a$ dan $a + b > b$. Mereka menggunakan ketidaksamaan nilai mutlak tapi tidak tepat dan salah dalam perhitungan.

Pada indikator 3, kesulitan yang dialami adalah memberikan alasan pada bukti yang sudah diberikan dalam soal. Mereka nampaknya paham dengan bukti yang diberikan tapi tidak dapat menuliskan alasan secara matematika formal. Hal ini terlihat dari ilustrasi gambar yang mereka buat. Ada juga yang membuat ilustrasi gambar, setelah itu ditulis lagi dalam bentuk matematika formal. Ada juga yang menuliskan dalam bentuk matematika formal, kemudian dijelaskan lagi dalam bentuk gambar untuk meyakinkan diri sendiri dan orang lain. Hal ini sejalandenganhasilpenelitianGibson (dalam [9]) bahwa mahasiswa biasanya menggunakan diagram setelah mereka kesulitan dalam menilai kebenaran dari sebuah pernyataan.

Selain sulit dalam menuliskan alasan dalam bentuk matematika formal, mahasiswa juga sulit dalam menggunakan dan memahami simbol atau lambang yang sering digunakan matematika formal, seperti simbol huruf kapital untuk menyatakan himpunan dan huruf kecil untuk menyatakan elemen atau anggota himpunan. Selain itu mereka juga sulit menggunakan simbol \forall untuk menyatakan "setiap" dan simbol \exists untuk

menyatakan “ada atau terdapat”. Kemudian dalam memahami himpunan dalam bentuk simbol seperti $C = \{a + b | a \in A, b \in B\}$, misalkan $x \in C$, mahasiswa sulit memahami bahwa $x \in C$ dapat dituliskan sebagai $x = a + b$, untuk suatu $a \in A$, dan $b \in B$. Hal ini mengindikasikan bahwa penguasaan terhadap materi prasyarat yaitu himpunan dan simbol logika masih lemah. Hal ini sejalan dengan hasil penelitian Moore (dalam [10]) bahwa mahasiswa tidak mampu memahami dan menggunakan bahasa dan notasi matematika.

Berdasarkan jawaban siswa dan diperkuat oleh angket sertahasil wawancara maka dapat dirinci kesulitan yang dialami mahasiswa dalam membaca bukti adalah (1) sulit menentukan mana pernyataan yang benar dan mana yang salah; (2) sulit memberikan contoh penyangkal; (3) sulit menentukan letak kesalahan dari beberapa bagian bukti yang diberikan; (4) sulit mengikuti jalannya pembuktian karena kadang-kadang tidak sama dengan ide sendiri; (5) sulit memperbaiki kesalahan suatu bukti. Kesulitan-kesulitan tersebut disebabkan oleh lemahnya penguasaan terhadap materi prasyarat yaitu logika dan himpunan, kurangnya pemahaman dalam menggunakan definisi dan teorema terkait, dan kurang teliti sehingga sering terkecoh dengan pernyataan yang salah.

Tabel 3. menjelaskan kemampuan mengkonstruksi bukti yang disajikan per indikatornya.

Tabel 3. Kemampuan Mengkonstruksi Bukti

No	Indikator	Skor
1	Mahasiswa dapat mengidentifikasi premis dan konklusi serta dapat menggunakan premis dan kondisi yang mendukung untuk menunjukkan konklusi dari suatu pernyataan.	53,1
2	Mahasiswa dapat mengorganisasikan fakta untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan.	40,3
3	Mahasiswa dapat memanipulasi fakta yang diberikan untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan.	38,5
4	Mahasiswa dapat membuat bukti lengkap dari suatu pernyataan.	28,1

Keterangan: Skor ideal maksimal adalah 100

Keempat indikator kemampuan mengkonstruksi bukti masih rendah, yang paling rendah adalah indikator membuat bukti lengkap dari suatu pernyataan.

Pada indikator 1, mahasiswa sudah dapat mengidentifikasi premis dan konklusi dari suatu pernyataan (67%), namun hanya 16,6% yang dapat menggunakan premis untuk menunjukkan konklusinya. Kesulitan mahasiswa pada indikator ini adalah menggunakan premisnya yaitu karakteristik dari himpunan A dan menggunakan sifat dari ketidaksamaan

nilai mutlak, yaitu sifat $|x| \leq a, a > 0$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$. Ada satu orang mahasiswa yang mencoba menunjukkan konklusinya dengan menggunakan kontradiksi, namun salah dalam menyatakan negasinya. Hal ini menunjukkan lemahnya kemampuan mahasiswa dalam menyatakan negasi dari suatu pernyataan.

Pada indikator 2, kesulitan mahasiswa menjawab soal pada indikator ini adalah pada memahami makna dari himpunan $H = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ dengan $a \in \mathbb{Z}$. Hanya 25% yang dapat menunjukkan bahwa H tertutup terhadap perkalian dan H punya identitas. Hanya 16,6% yang dapat menunjukkan bahwa setiap anggota H punya invers. Padahal dalam soal sudah diberi sedikit petunjuk untuk mengarahkan mahasiswa.

Pada indikator 3, kesulitan mahasiswa pada indikator ini adalah memanipulasi aljabar sehingga dapat menunjukkan kebenaran dari suatu pernyataan. Selain itu mahasiswa lemah dalam menggunakan sifat nilai mutlak. Mahasiswa kurang peka melihat premis yang diberikan dan tidak dapat mengaitkan atau menggunakannya untuk menunjukkan kebenaran dari konklusi.

Pada indikator 4, hanya satu orang (8,3%) yang dapat mengerjakan soal bagian a secara tepat. Sedangkan untuk soal bagian b, tidak ada mahasiswa yang bisa menyelesaikannya secara tepat. Kesulitan mahasiswa di sini adalah mahasiswa kurang memahami konsep himpunan yaitu bentuk elemen dari suatu himpunan yang didefinisikan secara khusus seperti himpunan G pada soal tersebut. Soal lengkapnya adalah:

Misalkan $P = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ dan diketahui $H \subseteq P$ dan $G = \left\{\frac{1}{x} : x \in H\right\}$.

- (a) Buktikan jika H terbatas di atas, maka G terbatas di bawah.
- (b) Tunjukkan $\sup H = \frac{1}{\inf G}$.

Selain itu, mahasiswa tidak tahu apa yang mau dikerjakan untuk menunjukkan G terbatas di bawah. Seharusnya mereka menuliskan apa yang mau ditunjukkan. Kemudian gunakan bahwa H terbatas di atas. Setelah itu akan lebih mudah mengarahkan karena sudah dapat gambaran untuk itu. Misalnya untuk soal b, mereka tidak tahu apa yang harus dilakukan. Padahal soal b itu dapat diubah bentuknya yaitu tunjukkan $\sup H \cdot \inf G = 1$, dengan cara menunjukkan bahwa $\sup H \cdot \inf G \leq 1$ dan $\sup H \cdot \inf G \geq 1$. Selain itu dapat juga dengan menunjukkan bahwa $\sup H \leq \frac{1}{\inf G}$ dan $\sup H \geq \frac{1}{\inf G}$.

Berdasarkan analisis dari jawaban mahasiswa dan diperkuat oleh hasil ketidaksiapan wawancara, maka kesulitan yang dialami mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti adalah (1) kurangnya pemahaman tentang himpunan dan logika; (2) kurang pengetahuan tentang berbagai teknik pembuktian; (3) tidak dapat menggunakan yang diketahui (premis); (4) kurang bisa menggunakan definisi atau teorema yang sudah diperoleh; (5) Jika sedang

kesulitan, kurang mau mencoba dengan cara yang lain; (6) sulit memahami apa yang mau dibuktikan; (7) sulit menuliskan dalam bahasa dan notasi matematika; (8) sulit dalam memanipulasi aljabar; (9) sulit memulai suatu pembuktian; (10) kurangnya pemahaman tentang materi prasyarat. Hasil penelitian yang diperoleh tidak jauh berbeda dengan hasil yang diperoleh sebelumnya yaitu hasil penelitian Moore (dalam [10]).

4. KESIMPULAN DAN REKOMENDASI

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa:

- a. Rata rata kemampuan membaca bukti adalah 42,2 tergolong dalam kategori rendah
- b. Rata rata kemampuan mengkontruksi bukti adalah 40,0 tergolong dalam kategori rendah.
- c. kesulitan yang dialami mahasiswa dalam membaca bukti adalah (1) sulit menentukan mana pernyataan yang benar dan mana yang salah; (2) sulit memberikan contoh penyangkal; (3) sulit menentukan letak kesalahan dari beberapa bagian bukti yang diberikan; (4) sulit mengikuti jalannya pembuktian karena kadang-kadang tidak sama dengan ide sendiri; (5) sulit memperbaiki kesalahan suatu bukti. Kesulitan-kesulitan tersebut disebabkan oleh lemahnya penguasaan terhadap materi prasyarat yaitu logika dan himpunan, kurangnya pemahaman dalam menggunakan definisi dan teorema terkait, dan kurang teliti sehingga sering terkecoh dengan pernyataan yang salah.
- d. Kesulitan yang dialami mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti adalah (1) kurangnya pemahaman tentang himpunan dan logika; (2) kurang pengetahuan tentang berbagai teknik pembuktian; (3) tidak dapat menggunakan yang diketahui (premis); (4) kurang bisa menggunakan definisi atau teorema yang sudah diperoleh; (5) Jika sedang kesulitan, kurang mau mencoba dengan cara yang lain; (6) sulit memahami apa yang mau dibuktikan; (7) sulit menuliskan dalam bahasa dan notasi matematika; (8) sulit dalam memanipulasi aljabar; (9) sulit memulai suatu pembuktian; (10) kurangnya pemahaman tentang materi prasyarat.

Berdasarkan hasil dan kesimpulan maka direkomendasikan bahwa:

- a. Dalam mengembangkan kemampuan pembuktian matematis mahasiswa hendaklah dimulai dengan mengetahui tingkat pemahaman mahasiswa terhadap materi prasyarat, logika dan himpunan, serta teknik pembuktian.

- b. Dalam pembelajaran hendaklah melibatkan mahasiswa dalam membaca bukti dan mengkonstruksi bukti sehingga mahasiswa dapat menemukan sendiri bukti tersebut.
- c. Dalam pembelajaran analisis real hendaklah menggunakan berbagai representasi matematika terutama diagram (gambar) untuk menjelaskan definisi dan teorema.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Alibert, D, dan Thomas, M. Research on Mathematical Proof. Dalam D. Tall. *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2002.
- [2]. Arnawa, I. M. *Meningkatkan kemampuan pembuktian dan sikap siswa melalui pembelajaran berdasarkan teori APOS*. Disertasi Doktor pada PPS UPI Bandung: tidak diterbitkan. 2006.
- [3]. Depdiknas. *Kurikulum 2004 Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Atas (SMA) dan Madrasah Aliyah (MA)*. Jakarta: Depdiknas. 2006.
- [4]. Dickerson, D. S. *High School Mathematics Teachers' Understandings of the Purposes of Mathematical Proof*, Disertasi pada Syracuse University: Tidak dipublikasikan. 2008.
- [5]. Douek, N. Some Remark about Argumentation and Mathematical Proof and Their Educational Implication [internet]. 2004. [updated 2009 June 18]. Available from: <http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers/g1-douek.pdf>.
- [6]. Gunawan, H dan Widjaya, J. Portfolio Perkuliahan MA3231 Pengantar Analisis Real Semester II 2008/2009 [internet]. 2009. [updated 2010 Mar 18]. Available from: <http://personal.fmipa.itb.ac.id/hgunawan/files/2009/02/silabus-ma3231.pdf>.
- [7]. Knuth, E. J. Secondary School Mathematics Teacher's Conception of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*. 2002. 33(5).379-405.
- [8]. National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; 2000.
- [9]. Nicholas, S. R. *Students-to-Students Discussions: The Role of the Instructor and Students in Discussions in an Inquiry-Oriented Transition to Proof Course*, Disertasi pada The University of Texas at Austin: Tidak dipublikasikan. 2008.
- [10]. VanSpronsen, H. D. *Proof Processes of Novice Mathematics Proof Writers*, Disertasi pada The University of Montana Missoula: Tidak dipublikasikan. 2008.

[11]. Wikipedia. (2009). *Mathematical Proof*. [updated 2009 June 29]. Available from: http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_proof.

[12]. Yerizon.
PeningkatanKemampuanPembuktiandanKemandirianBelajarMatematikMahasiswa
melaluiPendekatan M-Apos. Disertasi UPI Bandung. 2011.

[13]. Yoo, S. *Effects of Traditional and Problem-Based Instruction on Conceptions of Proof and Pedagogy in Undergraduates and Prospective Mathematics Teachers*, Disertasi pada The University of Texas at Austin: Tidak dipublikasikan. 2008.