Model Kosmologi Brane dengan Parameter Perlambatan Ekspansi yang Gayut Linear terhadap Waktu

Azrul Azwar

Program Studi Fisika, FMIPA, Universitas Tanjungpura
Jalan Jendral Ahmad Yani Pontianak
e-mail: azrul_azwar@yahoo.co.id

Abstrak

Telah dibangun model kosmologi brane dengan parameter perlambatan ekspansi yang gayut linear terhadap waktu. Dalam model ini telah diturunkan persamaan untuk evolusi faktor skala, parameter Hubble, kerapatan materi-energi dan tekanan alam semesta. Pada limit energi rendah seperti pada era alam semesta sekarang ini, yaitu pada saat rapat materi-energi jauh lebih kecil dibandingkan dengan tegangan brane, model yang di bangun ini akan kembali ke model Akarsu-Dereli.

Kata Kunci: Kosmologi, Brane, Parameter Perlambatan, Modifikasi gravitasi.

1. Pendahuluan

Model kosmologi Brane adalah model kosmologi yang dibangun berdasarkan skenario *braneworld* (dunia brane). Dalam skenario tersebut, alam semesta kita (*observable universe*) pada waktu (t) tertentu dianggap sebagai permukaan tiga dimensi yang tersimpan di dalam ruang berdimensi yang lebih tinggi. Di antara sekian banyak model kosmologi brane yang telah dibangun, model kosmologi brane tipe Randall-Sundrum^[1,2] merupakan model yang sangat menarik untuk dikaji karena pada limit energi rendah (pada era alam semesta sekarang ini) model tersebut dapat kembali ke dengan model kosmologi standar^[3,4].

Baru-baru ini, Akarsu dan Dereli mengajukan model kosmologi dengan parameter perlambatan yang gayut linear terhadap waktu^[5]. Model tersebut merupakan perluasan dari model Berman^[6] yang telah banyak digunakan dalam mengkaji dinamika alam semesta. Setelah dibandingkan, model yang dikembangkan oleh Akarsu dan Dereli tersebut ternyata memiliki kesesuaian dengan data-data observasi^[7]. Darabi^[8] telah menerapkan model Akarsu-Dereli dalam konteks *modified gravitation theory*. Dalam makalah ini, secara khusus akan dikaji penerapan model Akarsu-Dereli dalam konteks model kosmologi brane tipe Randall-Sundrum.

2. Model Kosmologi Brane

Berikut ini akan dibahas secara singkat beberapa aspek penting dalam model kosmologi brane yang mengacu pada referensi [3] dan [4]. Dalam model kosmologi brane, alam semesta kita pada saat t dimodelkan sebagai permukaan berdimensi- n yang disebut sebagai “**brane**” yang

tersimpan dalam ruang-waktu berdimensi- $(n+1)$ yang disebut “**bulk**”. Semua medan materi dan medan *gauge* selain medan gravitasi terkurung pada brane, sedangkan gravitasi yang merupakan dinamika dari seluruh ruang-waktu dan dimediasi oleh graviton dapat bergerak dalam Bulk^[3,4]. Secara skematik, model tersebut dapat digambarkan sebagai berikut

Gambar 1. Bentuk skematik model brane.

Model kosmologi brane tipe Randall-Sundrum dapat dibangun dengan mengasumsikan bahwa brane berupa sebuah ruang-waktu Robertson-Walker berdimensi empat, sedangkan bulk berupa ruang-waktu anti-deSitter berdimensi lima. Untuk menyederhanakan analisis, diasumsikan bahwa brane terletak pada $Z = 0$, di sini Z merupakan koordinat dimensi ke-lima (*extra dimension*). Dengan asumsi ini maka bentuk metrik dalam model tersebut dapat dituliskan sebagai berikut^[4]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j + dZ^2, \quad (1)$$

$a(t)$ merupakan faktor skala kosmik sedangkan γ_{ij} adalah metrik untuk ruang bersimetri maksimal tiga dimensi. Dari pers.(1), dapat

didefinisikan *induced metric* pada brane $h_{\alpha\beta}$ yang berbentuk

$$h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (2)$$

Secara umum, tensor energi- momentum dalam model dunia brane terdiri dari tensor energi momentum bulk dan tensor energi momentum brane

$$T_{AB} = T_{AB}^{bulk} + T_{AB}^{brane} \quad (3)$$

Dalam model Randall-Sundrum, tensor energi-momentum bulk memiliki bentuk

$$T_{AB}^{bulk} = -\Lambda g_{AB} \quad (4)$$

karena bulk berupa ruang-waktu anti-deSitter berdimensi lima yang memiliki konstanta kosmologi negatif ($\Lambda < 0$). Sedangkan tensor energi-momentum brane berbentuk

$$T_{AB}^{brane} = \begin{pmatrix} S_{\alpha\beta} \delta(Z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Di sini $S_{\alpha\beta}$ merupakan tensor energi-momentum pada brane yang merupakan kontribusi dari medan materi $\tau_{\alpha\beta}$ dan tegangan brane σ , yang dinyatakan oleh hubungan

$$S_{\alpha\beta} = -\sigma h_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} \quad (6)$$

dengan $\tau_{\alpha\beta}$ berbentuk

$$\tau_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad (7)$$

ρ dan P berturut-turut merupakan kerapatan dan tekanan materi-energi. Kehadiran fungsi delta Dirac $\delta(Z)$ pada pers. (5) menunjukkan bahwa materi hanya berada pada brane yang terletak di titik $Z = 0$.

Dengan menyelesaikan persamaan Einstein untuk model kosmologi brane akan diperoleh persamaan Friedman termodifikasi (*Modified Friedmann Equation*)^[3,4] yang dapat dituliskan sebagai

$$H^2 = \frac{1}{3}\rho + \frac{1}{6\sigma}\rho^2 - \frac{k}{a^2} + \frac{C}{a^4}; \quad (8)$$

di sini digunakan nilai konstanta gravitasi universal $8\pi G$ bernilai 1. Dalam pers (8), H^2 adalah parameter Hubble yang merupakan parameter evolusi alam semesta yang didefinisikan sebagai $H = \dot{a}/a$. Sedangkan ρ dan σ berturut-turut merupakan rapat materi-energi

di alam semesta dan tegangan brane (*brane tension*). Nilai tegangan brane ini harus cukup besar yaitu sekitar $\sigma^{1/4} > 1 \text{ MeV}$ agar sesuai dengan skenario nukleosintesis^[4]. Konstanta k dapat bernilai $-1, 0$ atau 1 yang masing-masing merujuk pada model alam semesta terbuka, datar dan tertutup sesuai dengan sifat metrik Robertson-Walker. Sedangkan suku $\frac{C}{a^4}$ diinterpretasikan sebagai suku radiasi gelap (*dark radiation*)^[3,4]. Suku $\frac{C}{a^4}$ ini akan bernilai nol untuk model brane tipe Randall-Sundrum, hal ini didasarkan pada teorema Birkhoff yang diperluas (*extended Birkhoff theorem*), yang menyatakan bahwa jika ruang-waktu bulk berupa ruang-waktu anti-deSitter murni, maka proyeksi tensor Weyl pada brane bernilai nol sehingga $\frac{C}{a^4} = 0$ ^[3,4].

Untuk menganalisis karakteristik dari pers. (8) dapat dilakukan dengan menuliskannya dalam bentuk

$$H^2 = \frac{1}{3}\rho \left(1 + \frac{1}{2\sigma}\rho \right) - \frac{k}{a^2} \quad (9)$$

Di sini telah di pilih suku $\frac{C}{a^4}$ bernilai nol yang sesuai dengan model Randall-Sundrum. Pada era awal alam semesta, ketika kerapatan materi-energi memiliki nilai yang sangat besar ($\rho \gg \sigma$), suku $1 + \frac{1}{2\sigma}\rho \approx \frac{1}{2\sigma}\rho$ sehingga pers. (9) menjadi

$$H^2 = \frac{1}{6\sigma}\rho^2 - \frac{k}{a^2} \quad (10)$$

Hal ini berarti bahwa pada saat awal setelah big-bang, alam semesta akan berevolusi dengan kecepatan ekspansi yang sebanding dengan kerapatan materi-energi di alam semesta itu. Sedangkan pada era energi rendah (alam semesta saat ini), yakni pada saat $\ll \sigma$, suku $1 + \frac{1}{2\sigma}\rho \approx 1$ sehingga pers. (9) dapat dituliskan sebagai

$$H^2 = \frac{1}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (11)$$

Pers. (11) tidak lain merupakan persamaan Friedmann untuk model kosmologi standar. Hal itu berarti bahwa pada era sekarang ini model kosmologi brane tipe Randall-Sundrum kembali ke model kosmologi standar.

3. Parameter Perlambatan Ekspansi dan Model Akarsu-Dereli

Parameter Perlambatan Ekspansi (q) dalam model kosmologi merupakan suatu besaran tanpa dimensi yang menggambarkan perilaku

ekspansi alam semesta. Parameter tersebut didefinisikan sebagai^[9]

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (12)$$

Jika q bernilai positif berarti ekspansi alam semesta mengalami perlambatan, sebaliknya jika bernilai negatif berarti alam semesta sedang mengalami percepatan ekspansi. Menurut Cunha^[9], parameter perlambatan saat ini bernilai sekitar $-0,73$ yang berarti bahwa alam semesta saat ini sedang mengalami ekspansi yang dipercepat.

Akarsu dan Dereli mengajukan sebuah model kosmologi dengan parameter perlambatan yang gayut linear terhadap waktu^[5] Secara matematis, model ini dinyatakan oleh persamaan

$$q = -mt + n - 1 \quad (13)$$

dengan m dan n masing masing adalah konstanta yang nilainya disesuaikan dengan data pengamatan. Untuk nilai $m = 0$, model ini akan kembali ke model Berman^[6], yaitu $q = n - 1$, yang sejak lama telah digunakan untuk menganalisis dinamika alam semesta. Dari literatur^[5,7] diperoleh bahwa nilai $m = 0,097$ dan $n = 1,6$ memberikan hasil yang cocok dengan observasi kosmologi.

Gambar 1. Plot parameter perlambatan terhadap waktu.

Secara umum, persamaan (12) di atas merupakan persamaan differensial yang non linear. Untuk menyelesaikannya, persamaan tersebut dapat dituliskan kembali menjadi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a}{\dot{a}} \right) = 1 + q \quad (14)$$

Dengan mensubstitusikan q yang ada pada pers. (13) ke pers. (14) lalu mengintegrasikannya terhadap waktu akan diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{a}{\dot{a}} &= \int -mt + n \, dt \\ &= -\frac{1}{2}mt^2 + nt + c_1 \end{aligned} \quad (15)$$

sesuai dengan referensi^[5], konstanta integrasi c_1 dipilih bernilai nol. Dengan menggunakan hasil ini maka parameter Hubble untuk model Akarsu-Dereli adalah

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{2}{t(mt - 2n)} \quad (16)$$

Gambar 2. Plot parameter Hubble terhadap waktu

Dari gambar 1 dapat dilihat bahwa nilai parameter Hubble menuju tak-hingga pada awal dan akhir alam semesta. Parameter Hubble menurun sangat drastis seiring pertambahan waktu di awal alam semesta menuju suatu nilai yang hampir konstan dan meningkat sangat cepat menuju tak-hingga di akhir alam semesta.

Untuk mendapatkan solusi untuk $a(t)$, pers. (15) dapat diintegrasikan secara langsung

$$\int \frac{da}{a} = \int \frac{dt}{-\frac{1}{2}mt^2 + nt}$$

yang akan menghasilkan solusi berbentuk

$$a(t) = a_0 e^{\left[\frac{2}{\sqrt{n^2 - 2mc}} \tanh^{-1} \left(\frac{mt - n}{\sqrt{n^2 - 2mc}} \right) \right]} \quad (17)$$

Pada pers. (16) di atas, a_0 dan c masing-masing adalah konstanta integrasi. Untuk penyederhanaan konstanta c dapat dipilih bernilai nol sehingga pers. (17) menjadi

$$a(t) = a_0 e^{\left[\frac{2}{n} \operatorname{arctanh} \left(\frac{mt}{n} - 1 \right) \right]} \quad (18)$$

Gambar 2. Plot faktor skala terhadap waktu

Dari gambar 2 di atas dapat dilihat bahwa faktor skala menuju nilai takhingga di akhir alam semesta. Karakter khusus yang ditunjukkan oleh gambar 1 dan 2 merupakan ciri alam semesta dalam model Akarsu – Dereli, yaitu alam semesta dimulai dengan big-bang pada saat $t = 0$ dan di akhiri dengan big-rip pada saat $t = 2m/k$. alam semesta memiliki usia yang terbatas, Secara ringkas, model Akarsu – Dereli dicirikan oleh Diskusi lengkap tentang model Akarsu – Dereli dapat dilihat pada referensi^[5].

4. Hasil dan Diskusi

Dengan mensubstitusikan persamaan (16) dan (18) ke persamaan (9), akan diperoleh

$$\frac{1}{6\sigma}\rho^2 + \frac{1}{3}\rho - \frac{k}{a_0^2 e^{\left[\frac{4}{n} \operatorname{arctanh}\left(\frac{mt}{n}-1\right)\right]}} - \frac{4}{t^2(mt-2n)^2} = 0 \quad (19)$$

Persamaan (19) di atas memiliki solusi berupa

$$\rho = -\sigma + \sigma \sqrt{1 + \frac{6k}{\sigma a_0^2 e^{\left[\frac{4}{n} \operatorname{arctanh}\left(\frac{mt}{n}-1\right)\right]}} + \frac{24}{\sigma t^2(mt-2n)^2}} \quad (20)$$

Pada limit energi rendah (alam semesta sekarang) ketika $\rho \ll \sigma$, maka persamaan (20) akan menjadi

$$\rho = \frac{3k}{a_0^2 e^{\left[\frac{4}{n} \operatorname{arctanh}\left(\frac{mt}{n}-1\right)\right]}} + \frac{12}{t^2(mt-2n)^2} \quad (21)$$

Pers. (21) di atas tidak lain adalah persamaan evolusi kerapatan materi-energi dalam model Akarsu – Dereli^[5]. Ini berarti bahwa kedua model ini memberikan deskripsi yang sama terhadap alam semesta pada limit energi rendah.

Dengan menggunakan persamaan kekekalan energi^[4] $\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H(\rho + P) = 0$ dan persamaan keadaan untuk fluida ideal $P = w\rho$ maka dapat diperoleh tekanan alam semesta dan parameter w sebagai fungsi waktu

$$P = \frac{2\sigma k e^{\left[-\frac{4}{n} \operatorname{arctanh}\left(\frac{mt}{n}-1\right)\right]} - 8a_0^2 \sigma t^{-2}(mt-n)(mt-2n)^{-2}}{(a_0^2 \sigma A)} + \sigma - \sigma A \quad (22)$$

$$w = \frac{2\sigma k e^{\left[-\frac{4}{n} \operatorname{arctanh}\left(\frac{mt}{n}-1\right)\right]} - 8a_0^2 \sigma t^{-2}(mt-n)(mt-2n)^{-2}}{(-Aa_0^2 \sigma^2 + A^2 a_0^2 \sigma^2)} - 1 \quad (23)$$

dengan

$$A = \sqrt{1 + \frac{6k}{\sigma a_0^2 e^{\left[\frac{4}{n} \operatorname{arctanh}\left(\frac{mt}{n}-1\right)\right]}} + \frac{24}{\sigma t^2(mt-2n)^2}}$$

5. Kesimpulan

Telah diturunkan persamaan untuk evolusi faktor skala, parameter Hubble, kerapatan materi-energi dan tekanan alam semesta dalam model kosmologi brane yang memiliki parameter perlambatan yang bergantung secara linear terhadap waktu. Pada limit energi rendah seperti pada era alam semesta sekarang ini, yaitu pada saat rapat materi-energi jauh lebih kecil dibandingkan dengan tegangan brane, maka model yang di bangun ini akan kembali ke model Akarsu-Dereli.

Daftar Pustaka

- [1] L. Randall and R. Sundrum, *Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*. Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999)
- [2] L. Randall and R. Sundrum, *An Alternative to Compactification*. Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999)
- [3] P. Brax dan C. van de Bruck, *Cosmology and the Braneworlds : A Review*. Class. Quant. Grav **20**, R201 (2003).
- [4] D. Langlois, *Brane Cosmology : An Introduction*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **148**, 181 (2003).
- [5] O. Akarsu dan T. Dereli, *Cosmological Model with Linearly Varying Deceleration Parameter*. Intl. J. Theor. Phys. **51** (2012) 612 – 621.
- [6] Berman, M.S, *A Special Law of Variation for Hubble Parameter*. Nuovo Cimento **B 74**, 182 – 186 (1983)

- [7] O. Akarsu dan T. Dereli, *A Comparison of LVDP and Λ CDM Cosmological Model*. Intl. J. Theor. Phys. (2012), DOI 10.1007/s10773-012-1200-0
- [8] F. Darabi, *Reconstruction of $f(R)$, $f(T)$ and $f(G)$ models Inspired by Variable Deceleration Parameter*,
<http://arxiv.org/pdf/1207.0212v2>
- [9] S.M. Carroll, *Spacetime and Geometry*, Addison Wesley, San Fransisco (2004)
- [10] Cunha, J.V., *Kinematic Constraints to the Transition Redshift from SNe Ia Union Data*, Physical Review **D 79**, 047301 (2009)