Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 12, No. 4 (2023), hal 389 – 396.

# PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA TAK LINEAR ORDE DUA MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI NATURAL

**Khairun Nisa, Mariatul Kiftiah, Yudhi**

## INTISARI

*Metode Dekomposisi Natural (MDN) merupakan suatu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial. MDN adalah kombinasi dari teori Transformasi Natural dan Dekomposisi Adomian. Pada penelitian ini dikaji penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa (PDB) tak linear orde dua homogen koefisien konstan menggunakan MDN. Langkah-langkah penyelesaian PDB tak linear orde dua homogen koefisien konstan menggunakan MDN diawali dengan menentukan sifat-sifat Transformasi Natural. Kemudian PDB ditransformasi dengan Transformasi Natural. Selanjutnya, langkah dilanjutkan dengan menggantikan nilai awal yang telah diberikan. Kemudian, dilakukan invers Transformasi Natural pada kedua ruas persamaan untuk mendapatkan solusi bagian linear. Langkah berikutnya yaitu menentukan nilai awal iterasi yang diperoleh dari solusi bagian linear dan mengaplikasikan Metode Dekomposisi Adomian untuk mendapatkan solusi bagian tak linear. Pada tahap akhir, solusi yang dihasilkan diformulasikan dalam bentuk deret. Hasil pembahasan menunjukkan PDB tak linear orde dua homogen kofisien konstan menggunakan MDN dapat menghasilkan solusi eksak maupun solusi hampiran.*

***Kata Kunci :*** *Transformasi Natural, Dekomposisi Adomian, Sifat-sifat Transformasi Natural.*

## PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan matematika yang mengaitkan fungsi satu atau lebih variabel dengan turunan-turunannya dalam berbagai orde [1]. Berdasarkan jenisnya, persamaan diferensial terbagi menjadi dua kategori yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP). PDB digunakan ketika persamaan diferensial hanya mengandung satu variabel bebas, sedangkan PDP digunakan ketika lebih dari satu variabel bebas. Persamaan diferensial dapat juga di kelompokkan berdasarkan bentuknya, yaitu homogen dan tak homogen. Selain itu berdasarkan ordenya, terbagi atas persamaan diferensial orde satu, orde dua, orde tiga, sampai dengan orde-$n$ (orde tertinggi). Terakhir, berdasarkan sifat kelinearannya, PDB terbagi atas dua yaitu linear dan tak linear [2].

Dengan mempertimbangkan berbagai macam jenis persamaan diferensial yang ada, maka terdapat beragam cara yang dapat digunakan untuk mencari penyelesaiannya. Salah satu metode dalam menyelesaikan PDB linear adalah transformasi integral. Beberapa metode transformasi integral yang ada dalam literatur untuk memecahkan PDB yaitu Transformasi Laplace, Transformasi Sumudu, dan Transformasi Fourier [3]. Kemudian, Khan dan Khan [4] telah menunjukkan suatu transformasi integral baru dan efisien dalam menyelesaikan PDB yaitu metode Transformasi Natural. Metode tersebut dapat menyelesaikan PDB linear, tetapi tidak untuk PDB tak linear. PDB tak linear sulit untuk diselesaikan dengan analitik biasa. Apabila metode analitik tidak dapat diterapkan, maka solusi eksak dapat dicari dengan menggunakan metode numerik.

Metode numerik adalah salah satu metode yang diterapkan untuk mendapatkan solusi matematis dengan pendekatan yang mendekati nilai sebenarnya. Dalam hal menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa (PDB) yang bersifat tak linear, salah satu metode numerik yang dapat digunakan adalah Metode Dekomposisi Adomian (MDA) [5]. Metode numerik lainnya yaitu Metode Dekomposisi Natural (MDN). Pada penelitian Rawashdeh dan Maitama [6] menunjukkan bahwa MDN memiliki akurasi yang tinggi dalam menentukan solusi untuk PDP.

Pada penelitian ini dibahas MDN yang merupakan kombinasi dari metode Dekomposisi Adomian dan Tranformasi Natural. Saat ini, MDN masih dalam proses pengembangan teori, sehingga menarik untuk diteliti lebih lanjut. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh [5] dan [6], maka penelitian ini menerapkan MDN dalam menyelesaikan PDB tak linear orde dua homogen koefisien konstan.

## METODE TRANSFORMASI NATURAL

Transformasi Natural merupakan salah satu jenis Transformasi Integral. Transformasi Integral adalah suatu teknik dalam matematika untuk mengubah suatu fungsi menjadi bentuk fungsi lainnya menggunakan integral. Berikut ini definisi dari Transformasi Integral.

**Definisi 1.** [6] *Misalkan $f(t)$ suatu fungsi untuk $t \in (-\infty, \infty)$, maka Transformasi Integral dari $f(t)$ yang di notasikan $\Im[f(t)]$ dituliskan sebagai*

$$\Im[f(t)](s,u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\, f(ut)\, dt, \tag{1}$$

dengan $K(s,t)$ adalah kernel dari transformasi dan $s, u \in \mathbb{R}$.

Selanjutnya, jika dipilih $K(s,t) = e^{-st}$, maka Transformasi Integral pada Persamaan (1) disebut Transformasi Natural [7]. Transformasi Natural adalah suatu teknik dalam matematika untuk mengubah suatu fungsi $f(t)$ menjadi bentuk lainnya $\mathcal{N}[f(t)]$ menggunakan integral. Berikut ini definisi dari Transformasi Natural.

**Definisi 2.** [8] *Misalkan $f(t)$ suatu fungsi $t \in (-\infty, \infty)$, maka Transformasi Natural dari $f(t)$ yang di notasikan $\mathcal{N}[f(t)]$ dituliskan sebagai*

$$\mathcal{N}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(ut)\ dt = F(s,u), \tag{2}$$

dengan $f$ adalah fungsi yang memenuhi orde eksponensial dan $s, u \in \mathbb{R}$.

Transformasi Natural dapat dihitung jika fungsi $f$ memenuhi orde eksponensial. Jika terdapat bilangan positif $M$ dan sebarang konstanta positif $a_j, j \in \mathbb{Z}^+$, sedemikian sehingga untuk $t \in (-1)^{\mathrm{j}} \times [0,\infty)$ berlaku $|f(t)| < Me^{\frac{|t|}{a_j}}$. Secara umum, himpunan fungsi $f$ yang memenuhi orde eksponensial dapat dituliskan sebagai berikut,

$$A = \left\{ \begin{matrix} f \mid \exists\, M, a_j > 0, & \text{sedemikian sehingga } |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{a_j}} \\ & \text{jika } t \in (-1)^{\mathrm{j}} \times [0,\infty), \mathrm{j} \in \mathbb{Z}^+ \end{matrix} \right\}.$$

**Contoh 3.** fungsi $f$ yang memenuhi orde eksponensial.

Misalkan $f(t) = t, M = 1, a_j = 1$, Maka $|f(t)| = |t| < e^t, t \geq 0$. Sehingga $f(t) = t$ memenuhi orde eksponensial.

Selanjutnya Persamaan (2) dapat ditulis dalam bentuk,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(ut)\ dt,\ s,u \in (-\infty,\infty) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{0} e^{-st} f(ut)\ dt,\ s,u \in (-\infty,0)\right] + \left[\int_{0}^{\infty} e^{-st} f(ut)\ dt,\ s,u \in (0,\infty)\right] \\ &= \mathcal{N}^-[f(t)] + \mathcal{N}^+[f(t)] \end{aligned}$$

notasi $\mathcal{N}^{-}[f(t)]$ untuk $t, s, u \in \mathbb{R}^{-}$. Selanjutnya, notasi $\mathcal{N}^{+}[f(t)]$ untuk $t, s, u \in \mathbb{R}^{+}$. Selanjutnya menggunakan fungsi *Heaviside* ($H$) dengan definisinya yaitu $f(x) = \begin{cases} 0, \ untuk\ x < 0 \\ 1, \ untuk\ x \geq 0 \end{cases}$, maka dapat ditulis sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[f(t)] &= \mathcal{N}[f(t)H(-t)] + \mathcal{N}[f(t)H(t)] \\ &= F^{-}(s,u) + F^{+}(s,u). \end{aligned}$$

Pada penelitian ini menggunakan Transformasi Natural untuk $t \geq 0$ dimana $\mathcal{N}^{+}[f(t)] = F^{+}(s,u)$, sehingga Definisi 4 merupakan Transformasi Natural untuk $t$ tak negatif.

**Definisi 4.** **[**4] *Misalkan $f(t)$ suatu fungsi $t$ untuk $\forall\, t \geq 0$, maka Transformasi Natural dari $f(t)$ adalah fungsi $F^{+}(s,u)$ yang di notasikan $\mathcal{N}^{+}[f(t)]$ dituliskan sebagai*

$$\mathcal{N}^{+}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(ut)\, dt \ = F^{+}(s,u).$$

Berikut ini adalah sifat-sifat Transformasi Natural yang dituliskan dalam Teorema 5,

**Teorema 5.** *Diberikan fungsi $f, v : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ yang kontinu pada $[0,\infty)$. Jika $\mathcal{N}^{+}[f(t)] = F^{+}(s,u)$ dan $\mathcal{N}^{+}[v(t)] = V^{+}(s,u)$, maka untuk $\gamma, \beta, a \in \mathbb{R}$ adalah sebarang konstanta, berlaku*

*(1) Sifat Linearitas*

$$\mathcal{N}^{+}[\gamma f(t) \pm \beta v(t)] = \gamma F^{+}(s,u) \pm \beta V^{+}(s,u).$$

*(2) Sifat Pergeseran*

$$\mathcal{N}^{+}[e^{at} f(t)] = F^{+}(s - au, u)$$

(3) *Sifat Turunan Pertama*

$$\mathcal{N}^{+}[f'(t)] = \frac{s}{u} F^{+}(s,u) - \frac{f(0)}{u}$$

*(4)* Sifat *Turunan Kedua*

$$\mathcal{N}^{+}[f''(t)] = \frac{s^2}{u^2} F^{+}(s,u) - \frac{s}{u^2} f(0) - \frac{f'(0)}{u}$$

Dengan menerapkan sifat-sifat Transformasi Natural, maka diperoleh beberapa Transformasi Natural dari fungsi sederhana yang disajikan pada Tabel 1 berikut.

**Tabel 1.** Transformasi Natural fungsi sederhana

| **No.** | $\boldsymbol{f(t)}$ | $\mathbb{N}^{+}[\boldsymbol{f(t)}]$ |
|---|---|---|
| 1 | $1$ | $\frac{1}{s}$ |
| 2 | $t$ | $\frac{u}{s^2}$ |
| 3 | $t^2$ | $\frac{2u^2}{s^3}$ |
| 4 | $t^3$ | $\frac{6u^3}{s^4}$ |
| 5 | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n = 1,2,3, \ldots$ | $\frac{u^{n-1}}{s^n}$ |
| 6 | $e^{at}$ | $\frac{1}{s - au}$ |
| 7 | $e^{at}t$ | $\frac{u}{(s-au)^2}$ |

**METODE DEKOMPOSISI NATURAL DALAM MENYELESAIKAN PDB TAK LINEAR ORDE DUA HOMOGEN KOEFISIEN KONSTAN**

MDN merupakan kombinasi dari metode Dekomposisi Adomian dan Tranformasi Natural. Dalam menyelesaikan PDB Tak Linear Orde Dua Homogen Koefisien Konstan menggunakan MDN maka Persamaan Diferensial tersebut dituliskan dalam bentuk persamaan operator sebagai berikut,

$$Lf(t) + Rf(t) + Nf(t) = 0, \tag{3}$$

dengan nilai awal

$$f(0) = d, \text{dan } f'(0) = h \tag{4}$$

dengan $L$ adalah operator diferensial linear dari turunan tertinggi, $R$ adalah sisa dari operator diferensial linear, $N$ adalah operator diferensial tak linear, dan $d, h \in \mathbb{R}$.

Kemudian karena $L$ adalah operator diferensial linear dari turunan kedua maka dilakukan transformasi pada kedua ruas Persamaan (3) dengan menggunakan Transformasi Natural, diperoleh :

$$\frac{s^2}{u^2}F^+(s,u) - \frac{s}{u^2}\big(f(0)\big) - \frac{f'(0)}{u} + \mathcal{N}^+[R(f)] + \mathcal{N}^+[N(f)] = 0. \tag{5}$$

Dengan mensubsitusikan Persamaan (4) ke dalam Persamaan (5), diperoleh :

$$F^+(s,u) = \frac{d}{s} + \frac{hu}{s^2} - \frac{u^2}{s^2}\mathcal{N}^+[R(f) + N(f)]. \tag{6}$$

Mengubah Persamaan (6) ke dalam bentuk Invers Transformasi Natural, diperoleh :

$$f(t) = f_0(t) - \mathcal{N}^{-1}\left[\frac{u^2}{s^2}\mathcal{N}^+[R(f) + N(f)]\right], \tag{7}$$

dengan $f_0(t) = d + ht$ adalah solusi awal.

Kemudian, asumsikan solusi deret tak hingga dari fungsi yang tidak diketahui $f(t)$ dalam bentuk

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t). \tag{8}$$

Sehingga dengan menggunakan Persamaan (8), maka Persamaan (7) dapat ditulis ulang dalam bentuk

$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = f_0(t) - \mathcal{N}^{-1}\left[\frac{u^2}{s^2}\mathcal{N}^+[R\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)]\right], \tag{9}$$

dengan $A_n(t) = Nf_n(t)$ adalah polinomial Adomian yang mewakili penyelesaian suku tak linear. Selanjutnya Membandingkan kedua sisi Persamaan (9), didapat persamaan rekursif sebagai berikut

$$\begin{aligned}
f_0(t) &= d + ht,\\
f_1(t) &= -\mathcal{N}^{-1}\left[\tfrac{u^2}{s^2}\mathcal{N}^+[Rf_0(t) + A_0(t)]\right],\\
f_2(t) &= -\mathcal{N}^{-1}\left[\tfrac{u^2}{s^2}\mathcal{N}^+[Rf_1(t) + A_1(t)]\right],\\
f_3(t) &= -\mathcal{N}^{-1}\left[\tfrac{u^2}{s^2}\mathcal{N}^+[Rf_2(t) + A_2(t)]\right].\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dalam bentuk umum persamaan rekursif sebagai berikut,

$$f_0(t) = d + ht \text{ dan } f_{n+1}(t) = -\mathcal{N}^{-1}\left[\frac{u^2}{s^2}\mathcal{N}^+[Rf_n(t) + A_n(t)]\right], n \geq 1.$$

Oleh karena itu, solusi dari persamaan diferensial biasa tak linear orde dua adalah

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t).$$

Berikut ini diberikan contoh penyelesaian PDB tak linear orde dua homogen koefisien konstan dengan menggunakan Metode Dekomposisi Natural.

**Contoh 6.** Diberikan PDB tak linear orde dua homogen koefisien konstan

$$af''(t) + b[f'(t)]^2 + cf(t) = 0, \tag{10}$$

dengan nilai awal,

$$f(0\,) = d, f'(0) = h \tag{11}$$

dengan $a, b, c, d, h \in \mathbb{R}$.

**Penyelesaian.**

Persamaan (10) ditransformasi dengan Transformasi Natural sehingga diperoleh:

$$\frac{as^2}{u^2}F^+(s,u) - \frac{as}{u^2}\big(f(0)\big) - \frac{af'(0)}{u} + \mathcal{N}^+[b[f'(t)]^2] + \mathcal{N}^+[cf(t)] = 0. \tag{12}$$

Dengan mensubsitusikan Persamaan (11) ke dalam Persamaan (12), diperoleh :

$$F^+(s,u) = \frac{d}{s} + \frac{hu}{s^2} - \frac{u^2}{as^2}\mathcal{N}^+[b[f'(t)]^2 + cf(t)]. \tag{13}$$

Mengubah Persamaan (13) ke dalam bentuk Invers Transformasi Natural, diperoleh :

$$f(t) = d + ht - \mathcal{N}^{-1}\left[\frac{u^2}{as^2}\mathcal{N}^+[b[f'(t)]^2 + cf(t)]\right], \tag{14}$$

Kemudian, asumsikan solusi deret tak hingga dari fungsi yang tidak diketahui $f(t)$ dalam bentuk

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \tag{15}$$

Sehingga dengan menggunakan Persamaan (15), maka Persamaan (14) dapat ditulis ulang dalam bentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = d + ht - \mathcal{N}^{-1}\left[\frac{u^2}{as^2}\mathcal{N}^+\left[c\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) + b\sum_{n=0}^{\infty}[f_n'(t)]^2\right]\right], \tag{16}$$

Kemudian dari Persamaan (16), didapat persamaan rekursif sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_0(t) &= d + ht,\\
f_1(t) &= -\frac{bh^2+cd}{2a}t^2 - \frac{ch}{6a}t^3\\
f_2(t) &= -\frac{\left(b\left(-\frac{bh^2+cd}{a}\right)^2 - \frac{c(bh^2+cd)}{2a}\right)}{12a}t^4 - \frac{\left(b\left(\frac{(bh^2+cd)(ch)}{a^2}\right) - \frac{c^2h}{6a}\right)}{20a}t^5 - \frac{b\left(-\frac{ch}{2a}\right)^2}{30a}t^6,\\
f_3(t) &= \frac{\left(bc\left(-\frac{bh^2+cd}{a}\right)^2 - \frac{c^2(bh^2+cd)}{2a}\right)t^6}{360a^2} + \frac{\left(bc\left(\frac{(bh^2+cd)(ch)}{a^2}\right) - \frac{c^3h}{6a}\right)t^7}{84a^2} -\\
&\quad \left(\frac{b\left(b\left(-\frac{bh^2+cd}{a}\right)^2 - \frac{c(bh^2+cd)}{2a}\right)^2}{9a^2} - \frac{bc\left(-\frac{ch}{2a}\right)^2}{30a}\right)\frac{t^8}{56} + \cdots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Jadi, didapat solusi dari Contoh 6 adalah

$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + \cdots$

$$f(t) = d + ht - \frac{bh^2+cd}{2a}t^2 - \frac{ch}{6a}t^3 - \frac{\left(b\left(-\frac{bh^2+cd}{a}\right)^2 - \frac{c(bh^2+cd)}{2a}\right)}{12a}t^4 - \frac{\left(b\left(\frac{(bh^2+cd)(ch)}{a^2}\right) - \frac{c^2h}{6a}\right)}{20a}t^5 + \left(\frac{\left(bc\left(-\frac{bh^2+cd}{a}\right)^2 - \frac{c^2(bh^2+cd)}{2a}\right)}{360a^2} - \frac{b\left(-\frac{ch}{2a}\right)^2}{30a}\right)t^6 + \frac{\left(bc\left(\frac{(bh^2+cd)(ch)}{a^2}\right) - \frac{c^3h}{6a}\right)t^7}{84a^2} - \left(\frac{b\left(b\left(-\frac{bh^2+cd}{a}\right)^2 - \frac{c(bh^2+cd)}{2a}\right)^2}{9a^2} - \frac{bc\left(-\frac{ch}{2a}\right)^2}{30a}\right)\frac{t^8}{56} + \cdots \tag{17}$$

**Contoh 7.** Diberikan PDB tak linear orde dua homogen koefisien konstan

$$2f''(t) + [f'(t)]^2 - 4f(t) = 0 \tag{18}$$

dengan nilai awal

$$f(0) = 1, f'(0) = 0 \tag{19}$$

**Penyelesaian.**

Dari contoh 7 diperoleh $a = 2, b = 1, c = -4, d = 1,$ dan $h = 0$. Selanjutnya dengan menerapkan Persamaan 17 diperoleh solusi Persamaan 18 sebagai berikut

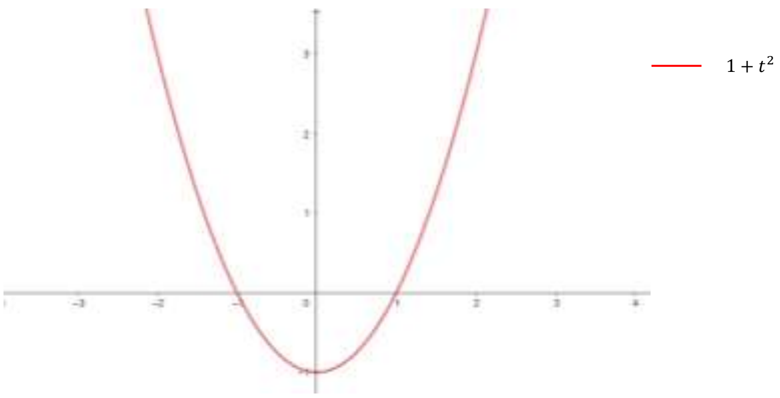
$$f(t) = 1 + 0 - \frac{0+(-4)(1)}{2(2)}t^2 - 0 - \frac{\left(1\left(-\frac{0+(-4)(1)}{2}\right)^2 - \frac{(-4)(0+(-4)(1))}{2(2)}\right)}{12(2)}t^4 - 0 + \left(\frac{\left((1)(-4)\left(-\frac{0+(-4)(1)}{2}\right)^2 - \frac{(-4)^2(0+(-4)(1))}{2(2)}\right)}{360(2)^2} - 0\right)t^6 + 0 - \left(\frac{1\left(1\left(-\frac{0+(-4)(1)}{2}\right)^2 - \frac{(-4)(0+(-4)(1))}{2(2)}\right)^2}{9(2)^2} - 0\right)\frac{t^8}{56} + \cdots$$

$$f(t) = 1 + t^2 + 0 + 0 + 0 + \cdots$$

Jadi, didapat solusi eksak dari Contoh 6 adalah

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = f_0(t) + f_1(t) = 1 + t^2$$

Berikut ini adalah grafik solusi $f(t)$ dengan menggunakan MDN




**Gambar 1.** Grafik solusi contoh 7 menggunakan MDN

Berdasarkan Gambar 1 dapat dilihat bahwa grafik berwarna merah adalah grafik solusi dari contoh 7 dengan $f(t) = 1 + t^2$. Kemudian, selidiki apakah Persamaaan $f(t) = 1 + t^2$ adalah solusi dari persamaan diferensial Pada Persamaan (18). Jika $f(t) = 1 + t^2$, maka $f'(t) = 2t$ dan $f''(t) = 2$. Sehingga,

$$2f''(t) + [f'(t)]^2 - 4f(t) = 0$$
$$2(2) + [2t]^2 - 4(1 + t^2) = 4 + 4t^2 - 4 - 4t^2 = 0.$$

Dengan nilai awal

$$f(0) = 1 + (0)^2 = 1$$
$$f'(0) = 2t = 2(0) = 0$$

Terbukti, bahwa Persamaaan $f(t) = 1 + t^2$ adalah solusi dari persamaan diferensial Pada Persamaan (18).

**Contoh 8.** Diberikan PDB tak linear orde dua homogen koefisien konstan

$$f''(t) + 2[f'(t)]^2 + 2f(t) = 0 \tag{20}$$

dengan nilai awal

$$f(0) = -1, f'(0) = 0 \tag{21}$$

**Penyelesaian.**

Dari contoh 8 diperoleh $a = 1, b = 2, c = 2, d = -1,$ dan $h = 0$. Selanjutnya dengan menerapkan Persamaan 17 diperoleh solusi Persamaan 20 sebagai berikut

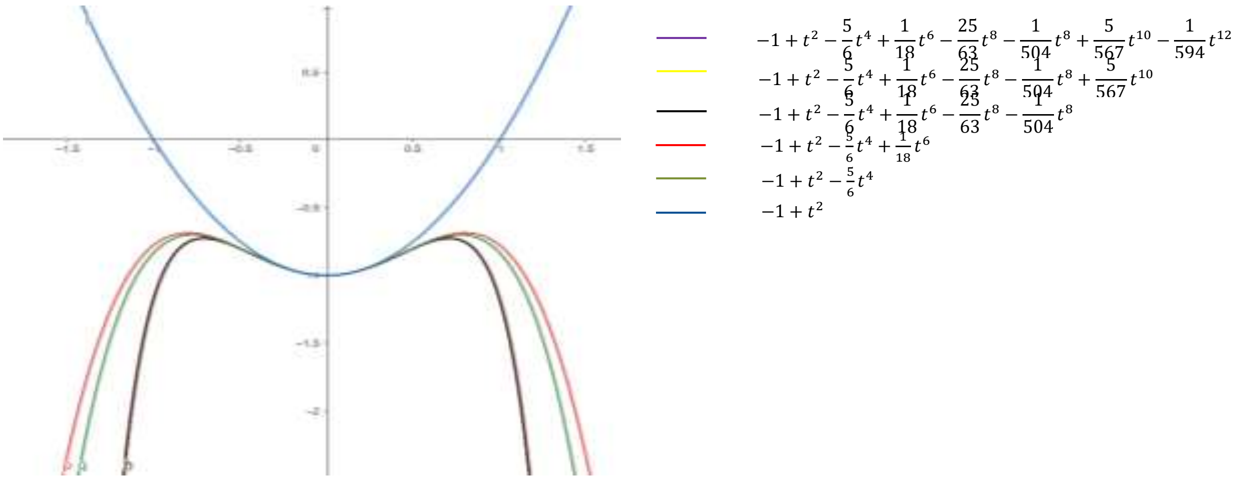
$$f\ (t) = -1 + 0 - \frac{0+(2)(-1)}{2(1)} t^2 - 0 - \frac{\left(2\left(-\frac{0+(2)(-1)}{1}\right)^2 - \frac{2(0+(2)(-1))}{2(1)}\right)}{12(1)} t^4 - 0 +$$
$$\left(\frac{\left((2)(2)\left(-\frac{0+(2)(-1)}{1}\right)^2 - \frac{2^2(0+(2)(-1))}{2(1)}\right)}{360(1)^2}\right) t^6 + 0 - \left(\frac{2\left(2\left(-\frac{0+(2)(-1)}{1}\right)^2 - \frac{2(0+(2)(-1))}{2(1)}\right)^2}{9(1)^2}\right) \frac{t^8}{56} + \cdots$$

$$f(t) = -1 + t^2 - \frac{5}{6} t^4 + \frac{1}{18} t^6 - \frac{25}{63} t^8 + \cdots$$

Jadi, didapat solusi hampiran dari Contoh 8 adalah

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t) + \cdots$$
$$= -1 + t^2 - \frac{5}{6} t^4 + \frac{1}{18} t^6 - \frac{25}{63} t^8 - \frac{1}{504} t^8 + \frac{5}{567} t^{10} - \frac{1}{594} t^{12} + \cdots$$

Berikut ini adalah grafik solusi dengan fungsi $f(t)$ dibatasi menjadi $-1 + t^2 - \frac{5}{6} t^4 + \frac{1}{18} t^6 - \frac{25}{63} t^8 - \frac{1}{504} t^8 + \frac{5}{567} t^{10} - \frac{1}{594} t^{12}$,




**Gambar 2.** Grafik solusi contoh 8 dengan menggunakan MDN

Berdasarkan Gambar 2 dapat dilihat bahwa grafik berwarna hitam adalah solusi $f(t) = -1 + t^2 - \frac{5}{6}t^4 + \frac{1}{18}t^6 - \frac{25}{63}t^8 - \frac{1}{504}t^8$, grafik berwarna merah adalah solusi $f(t) = -1 + t^2 - \frac{5}{6}t^4 + \frac{1}{18}t^6$, grafik berwarna hijau adalah solusi $f(t) = -1 + t^2 - \frac{5}{6}t^4$, dan grafik berwarna biru adalah solusi $f(t) = -1 + t^2$ mendekati solusi pada grafik berwarna hitam. Kemudian grafik berwarna ungu dan kuning berada pada grafik berwarna hitam maka solusi untuk contoh 8 adalah $f(t) = -1 + t^2 - \frac{5}{6}t^4 + \frac{1}{18}t^6 - \frac{25}{63}t^8 - \frac{1}{504}t^8$, dan $f(t)$ konvergen.

## KESIMPULAN

Pada penelitian ini menunjukkan bahwa MDN dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa tak linear orde dua. Bentuk umum solusi yang diperoleh dari persamaan diferensial biasa tak linear orde dua homogen koefisien konstan yaitu,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + \cdots$$

dengan $f_0(t) = d + ht$ dan $f_{n+1}(t) = -\mathcal{N}^{-1}\left[\frac{u^2}{s^2}\mathcal{N}^{+}[Rf_n(t) + A_n(t)]\right], n \geq 1.$

## DAFTAR PUSTAKA

[1] R. Ibnas, “Persamaan diferensial eksak dengan faktor integrasi,” *Jurnal MSA*, vol. 5, no. 2, p. 91, 2017.

[2] R. Hamdanih dan R. Sriningsih, “Penerapan Metode Dekomposisi Sumudu untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa Orde Tiga Non Linear,” *UNPjoMath*, vol. 2, no. 3, pp. 44-68, 2019.

[3] Bhatta, L. Debnath dan Dambaru, *Integral Transforms and Their Applications*, 2nd penyunt., United America: Taylor & Francis Group, LLC, 2007.

[4] Z. H. Khan dan W. A. Khan, “N-Transform Properties and Applications,” *Journal of Engineering Sciences*, vol. 1, no. 1, pp. 127-133, 2008.

[5] J. Biazar, E. B. dan R. I. , “Solution of the system of ordinary differential equations by Adomian decomposition method,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 147, no. 3, pp. 713-719, 2004.

[6] M. S. Rawashdeh dan H. Al-Jammal, “Theories and applications of the inverse fractional natural transform method,” *Rawashdeh and Al-Jammal Advances in Difference Equations*, no. 222, p. 3, 2018.

[7] M. S. Rawashdeh dan S. Maitama, “Solving Nonlinear Ordinary Differential Equations Using the NDM,” *Journal of Applied Analysis and Computation*, vol. 5, no. 1, pp. 77-88, 2015.

[8] M. S. Rawashdeh dan S. Maitama, “On Finding Exact Solutions to Coupled Systems of partial Diferential Equation by the NDM,” *Thai Journal of Matematics*, vol. 18, no. 2, pp. 621-637, 2020.

KHAIRUN NISA : FMIPA UNTAN, Pontianak, khairunnisaaaaa@student.untan.ac.id
MARIATUL KIFTIAH : FMIPA UNTAN, Pontianak, kiftiahmariatul@math.untan.ac.id
YUDHI : FMIPA UNTAN, Pontianak, yudhi@math.untan.ac.id