Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 02, No. 4 (tahun), hal 359 – 368.

PENENTUAN *TRACE* DARI MATRIKS KHUSUS ORDO 3 × 3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT

Dimas Catur Ramadhani, Mariatul Kiftiah, Fransiskus Fran

INTISARI

Trace matriks merupakan salah satu permasalahan yang bisa dianalisis dalam teori matriks. Trace adalah jumlahan diagonal utama dari suatu matriks persegi. Intensi Artikel ini adalah untuk menentukan bentuk umum perpangkatan ke n *dan trace dari matriks khusus ordo* 3×3 *yang dipangkatkan sebanyak* n *dengan* n *merupakan suatu bilangan bulat positif. Matriks-matriks khusus yang digunakan pada artikel ini adalah matriks dengan entri pada diagonal utama serta entri* a_{13} *dan entri* a_{31} *bernilai* 0 *untuk matriks* $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ *sedangkan entri* $a_{12} = p, a_{21} = q, a_{23} = p, a_{32} = q$ *yang mana* $p, q \neq 0, \forall p, q \in \mathbb{R}$. *Untuk matriks* $B = [b_{ij}]_{3\times3}$ *diagonal utama serta entri* b_{13} *dan entri* b_{31} *bernilai* 0 *sedangkan entri* $b_{12} = p, b_{21} = q, b_{23} = t, b_{32} = s$ *yang mana* $p, q, t, s \neq 0, \forall p, q, t, s \in \mathbb{R}$ *Langkah pertama yang dilakukan adalah terlebih dahulu menemukan bentuk umum entri dari perpangkatan ke* n *matriks dengan* n *merupakan suatu bilangan bulat positif dari suatu matriks berbentuk khusus. Bentuk umum entri perpangkatan ke* n *dari suatu matriks berbentuk khusus kemudian dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika. Dilanjutkan dengan menemukan trace dari matriks berpangkat* n *untuk* n *bilangan bulat positif dengan menjumlahkan diagonal utama dari bentuk umum entri hasil perpangkatan ke* n *suatu matriks berbentuk khusus dengan* n *merupakan bilangan bulat positif. Dari hasil penelitian ini diperoleh bentuk umum perpangkatan ke* n *dan trace dari perpangkatan ke* n *suatu matriks berbentuk khusus.*

Kata Kunci : *trace matriks, matriks berbentuk khusus, aljabar linear.*

PENDAHULUAN

Dalam Aljabar linear, salah satu topik yang dipelajari adalah tentang matriks [1]. Matriks adalah bilangan-bilangan yang tersusun menjadi jajaran persegi panjang dengan bilangan tersebut dinamai dengan entri matriks. *Trace* matriks merupakan satu dari sekian banyaknya permasalahan yang sering ditemui pada teori matriks. *Trace* matriks merupakan total dari jumlah seluruh entri yang terdapat dalam diagonal utama matriks persegi [2].

Dengan menjumlahkan diagonal utama matriks persegi selama proses pengerjaan, menentukan nilai *trace* matriks dapat dikatakan mudah, namun *trace* matriks pada kasus matriks yang dipangkatkan akan jadi lebih sulit ditentukan. Kajian tentang *trace* dari matriks berpangkat mula-mula dibahas pada tahun 2015 [3]. Beberapa tahun setelahnya terdapat banyak artikel yang membahas perkara *trace* dari matriks berpangkat seperti yang terdapat dalam [4], [5], [6] yang mengkaji tentang penentuan bentuk *trace* dari matriks *Toeplitz* berukuran 3 × 3 yang memiliki pangkat bilangan bulat positif. *Trace* matriks dari bentuk tertentu yang memiliki pangkat bilangan bulat positif juga dipelajari, selain matriks *Toeplitz* sebagaimana pada[7] . Selain itu, penelitian serupa telah dilakukan oleh [8] yang menentui *trace* dari matriks 2×2 yang memiliki pangkat bilangan bulat negatif. Lainnya dibahas juga oleh [9] perihal *trace* suatu matriks kompleks yang memilki pangkat bilangan bulat yang berukuran 3×3.

Artikel ini mengembangkan penelitian [5] dimana yang dilakukan menggunakan matriks khusus berukuran 3×3 berdiagonal utama 0 dengan notasi $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ dimana masing-masing entri a_{13} dan a_{31} bernilai 0 dan entri lainnya bernilai a. Sedangkan pada artikel ini, entri-entri pada $a_{12} = p, a_{21} =$

$q, a_{23} = p, a_{32} = q$ dengan $p, q \neq 0, \forall p, q \in \mathbb{R}$. Kemudian pada matriks $B = [b_{ij}]_{3\times3}$ entri pada diagonal utama matriks dan di entri b_{13} dan b_{31} juga bernilai 0. Sedangkan entri-entri pada $b_{12} = p, b_{21} = q, b_{23} = t, b_{32} = s$ dengan $p, q, t, s \neq 0, \forall p, q, t, s \in \mathbb{R}$. Intensi artikel ini untuk menemukan bentuk umum setiap entri dari matriks tertentu yang dipangkatkan bilangan bulat serta bentuk *tracenya*.

TEORI MATRIKS

Salah satu permasalahan yang bisa dianalisis dalam teori matriks salah satunya adalah *trace* matriks yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1 *Sebuah matriks persegi A memiliki nilai trace yang dinyatakan* $Tr(A)$, *didefinisikan sebagai total dari seluruh entri pada diagonal utama A. Trace dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks persegi.*

Matriks mempunyai salah satu sifat yaitu sifat perkalian. Secara umum, semisal *A* adalah matriks dengan ukuran $e \times f$ dan *B* adalah matriks dengan ukuran $f \times g$, hasil perkalian matriks *AB* merupakan matriks dengan ukuran $e \times g$, dengan entri pada AB merupakan hasil kali dari entri pada baris *e* matriks A dan kolom g pada matriks B. Sifat matriks lainnya sifat perpangkatan matriks. Perpangkatan matriks dapat didefinisikan:

Definisi 2 *Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka definisi dari pangkat* $\forall n \geq 0$ *adalah:*

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA \ldots A}_{n\,faktor} \quad (n > 0)$$

Selanjutnya jika A memiliki invers, maka:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \qquad A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n\,faktor}$$

Digunakan salah satu metode pembuktian matematis yaitu induksi matematika dalam artikel ini. Adapula teori yang dipakai untuk menemukan *trace* matriks salah satunya adalah teori koefisien binomial yang terdapat terdapat konsep kombinasi. Kombinasi dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3 [10] *Banyaknya kombinasi* r *dari objek* n *pada suatu himpunan dapat ditulis sebagai banyaknya seleksi tak terurut dari* r *objek yang diambil dari suatu* n *objek pada himpunan yang dinyatakan dalam persamaan berikut:*

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Dalam pengaplikasian konsep kombinasi dalam pencarian *trace* matriks, dapat dijumpai konsep identitas *Pascal* yang dinyatakan dalam teorema 4.

Teorema 4 *Jika* n *dan* r *bilangan-bilangan asli dengan* $n > r$ *maka:*

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

Teorema 5 *Misalkan* n *bilangan bulat positif. Untuk semua* x *dan* y *berlaku:*

$$(x+y)^n = y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + x^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r y^{n-r}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{bmatrix}$ dengan $p, q \neq 0, \forall p, q, \in \mathbb{R}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & t \\ 0 & s & 0 \end{bmatrix}$ dengan $p, q, t, s \neq 0$ untuk setiap $p, q, t, s \in \mathbb{R}$. Untuk *trace* dari matriks A dan B berpangkat bilangan bulat negatif, penentuan nilai *trace* tidak dapat dilakukan dikarenakan matriks A dan B memiliki nilai determinan 0 sehingga *invers* matriks A dan B tidak tidak dapat ditentukan (A^n dan B^n tidak dapat ditentukan). Untuk $n = 0$, nilai $Tr(A) = Tr(B) = 3$. Kemudian untuk mencari nilai *trace* untuk n bilangan bulat positif pertama kali dilakukan adalah melakukan perpangkatan pada matriks A dan B untuk mencari bentuk umum atau pola dari tiap entri pada masing-masing matriks. Untuk matriks A dapat dilihat proses nya sebagai berikut:

$$A^2 = \begin{bmatrix} pq & 0 & p^2 \\ 0 & 2pq & 0 \\ q^2 & 0 & pq \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2p^2q & 0 \\ 2pq^2 & 0 & 2p^2q \\ 0 & 2pq^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 2pq^2 & 0 & 2p^3q \\ 0 & 4p^2q^2 & 0 \\ 2pq^3 & 0 & 2p^2q^2 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 0 & 4p^3q^2 & 0 \\ 4p^2q^3 & 0 & 4p^3q^2 \\ 0 & 4p^2q^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} 4p^3q^3 & 0 & 4p^4q^2 \\ 0 & 8p^3q^3 & 0 \\ 4p^2q^4 & 0 & 4p^3q^3 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = \begin{bmatrix} 0 & 8p^4q^3 & 0 \\ 8p^3q^4 & 0 & 8p^4q^3 \\ 0 & 8p^3q^4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = \begin{bmatrix} 8p^4q^4 & 0 & 8p^5q^3 \\ 0 & 16p^4q^4 & 0 \\ 8p^3q^5 & 0 & 8p^4q^4 \end{bmatrix}$$

Setelah melakukan perpangkatan hingga pangkat 8, dapat dilihat pola sehingga dapat ditentukan pola perpangkatannya yang dituliskan dalam teorema 6.

Teorema 6 *Berdasarkan matriks* $A = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{bmatrix}$ $\forall p, q, \in \mathbb{R}$, *maka diperole pola perpangkatan matriks* A *hingga ke* n:

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}, n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} 2^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n+2}{2}} q^{\frac{n-2}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n-2}{2}} q^{\frac{n+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}, n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti.

Akan dibuktikan atas matriks A dengan menggunakan induksi matematika untuk n bernilai ganjil, diberikan:

$$p(n): A^n = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

1) Akan dibuktikan $p(1)$ benar.

$$p(1): A^1 = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

2) Karena $n = 2i + 1$ dengan asumsikan $p(i)$ benar $i \in \mathbb{N}$ benar, yaitu:

$$p(i): A^{2i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \end{bmatrix} \text{..(1)}$$

Selanjutnya akan dibuktikan $p(i + 1)$ juga benar yaitu:

$$p(i+1): A^{2(i+1)+1} = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+4}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+4}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+4}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+4}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (1), maka dapat ditulis:

$$A^{2i+1} \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} pq & 0 & p^2 \\ 0 & 2pq & 0 \\ q^2 & 0 & pq \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+4}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+4}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+4}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+4}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan berikut, maka $p(i+1)$ dapat dinyatakan benar. Matriks A^n untuk n adalah bilangan bulat positif ganjil, seperti yang ditunjukkan dalam langkah 1 dan 2. Selanjutnya, matriks dengan n genap akan dibuktikan.

$$p(i): A^{2i} = \begin{bmatrix} 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i-2}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i-2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} \end{bmatrix}$$

1) Akan ditunjukkan $p(2)$ benar.

$$p(2): A^2 = \begin{bmatrix} pq & 0 & p^2 \\ 0 & 2pq & 0 \\ q^2 & 0 & pq \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i-2}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i-2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} \end{bmatrix}$$

2) Karena $n = 2i$ dengan asumsikan $p(i), i \in \mathbb{N}$ benar, yaitu:

$$p(i): A^{2i} = \begin{bmatrix} 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i-2}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i-2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i-2}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i}{2}} \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Selanjutnya, $p(i+1)$ juga akan benar, yaitu:

$$p(i+1): A^{2(i+1)} = \begin{bmatrix} 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+4}{2}} q^{\frac{2i}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i+4}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (2), maka dapat ditulis:

$$A^{2i} \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+4}{2}} q^{\frac{2i}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i+4}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} pq & 0 & p^2 \\ 0 & 2pq & 0 \\ q^2 & 0 & pq \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+4}{2}} q^{\frac{2i}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{2i+2}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i}{2}} q^{\frac{2i+4}{2}} & 0 & 2^{\frac{2i}{2}} p^{\frac{2i+2}{2}} q^{\frac{2i+2}{2}} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan berikut, maka $p(i+1)$ dapat dinyatakan benar. Matriks A^n untuk n adalah bilangan bulat positif genap, seperti yang ditunjukkan dalam langkah 1 dan 2. Kemudian, dengan menjumlahkan diagonal utama matriks yang telah dipangkatkan sebanyak n kali, kita dapat menemukan formula $trace$.

Teorema 7 *Diberikan matriks* $A = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{bmatrix} \forall a, b, \in \mathbb{R}$, *maka:*

$$Tr(A^n) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ 2^{\frac{n+2}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti.
Mengacu pada Teorema 6, bentuk umum $Tr(A^n)$ didapat dengan $Tr(A^n)$ untuk n ganjil yaitu:
$Tr(A^n) = 0$
Untuk matriks dengan n genap:
$Tr(A^n) = \left(2^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}}\right) + \left(2^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}}\right) + \left(2^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}}\right) = (2^{\frac{n+2}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}})$

Kemudian untuk matriks B dapat dilihat proses nya sebagai berikut:

$$B^2 = \begin{bmatrix} pq & 0 & pt \\ 0 & pq+ts & 0 \\ qs & 0 & ts \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & p^2q+pts & 0 \\ pq^2+qts & 0 & pqt+t^2s \\ 0 & ts^2+pqs & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^4 = \begin{bmatrix} p^2q^2+pqts & 0 & p^2qt+pt^2s \\ 0 & p^2q^2+t^2s^2+2pqts & 0 \\ qts^2+pq^2s & 0 & t^2s^2+pqts \end{bmatrix}$$

$$B^5 = \begin{bmatrix} 0 & p^3q^2+pt^2s^2+2p^2qts & 0 \\ p^2q^3+qt^2s^2+2pq^2ts & 0 & p^2q^2t+t^3s^2+2pqt^2s \\ 0 & t^2s^3+2pqts^2+p^2q^2s & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^6 = \begin{bmatrix} p^3q^3+pqt^2s^2+2p^2q^2ts & 0 & p^3q^2t+pt^3s^2+2p^2qt^2s \\ 0 & \begin{matrix} p^3q^3+t^3s^3+ \\ 3pqt^2s^2+3p^2q^2ts \end{matrix} & 0 \\ qt^2s^3+2pq^2ts^2+p^2q^3s & 0 & t^3s^3+2pqt^2s^2+p^2q^2ts \end{bmatrix}$$

$$B^7 = \begin{bmatrix} 0 & p^4q^3+pt^3s^3+3p^2qt^2s^2+3p^3q^2ts & 0 \\ \begin{matrix} p^3q^4+qt^3s^3+ \\ 3pq^2t^2s^2+3p^2q^3ts \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} p^3q^3t+t^4s^3+ \\ 3pqt^3s^2+3p^2q^2t^2s \end{matrix} \\ 0 & t^3s^4+3pqt^3s^3+3p^2q^2ts^2+p^3q^3s & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^8 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} p^4q^4+pqt^3s^3+ \\ 3p^2q^2t^2s^2+3p^3q^3ts \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} p^4q^3t+pt^4s^3+ \\ 3p^2qt^3s^2+3p^3q^2t^2s \end{matrix} \\ 0 & \begin{matrix} p^4q^4+t^4s^4+4pqt^3s^3 \\ +6p^2q^2t^2s^2+4p^3q^3ts \end{matrix} & 0 \\ \begin{matrix} qt^2s^4+3pq^2t^2s^3 \\ +p^3q^4s+3p^2q^3ts^2 \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} t^4s^4+3pqt^3s^3 \\ +p^3q^3ts+3p^2q^2t^2s^2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Setelah melakukan perpangkatan hingga pangkat 8, dapat dilihat pola sehingga dapat ditentukan pola perpangkatannya yang dituliskan dalam teorema 8.

Teorema 8 *Berdasarkan matriks* $B = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & t \\ 0 & s & 0 \end{bmatrix}$ $\forall p, q, t, s, \in \mathbb{R}$, *maka diperoleh pola perpangkatan matriks B hingga ke* n*:*

$$B^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & p(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} & 0 \\ q(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & t(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} \\ 0 & s(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{bmatrix}, n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} pq(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} & 0 & pr(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} \\ 0 & (pq+ts)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ qs(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} & 0 & ts(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} \end{bmatrix}, n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti.

Akan dibuktikan atas matriks B dengan menggunakan induksi matematika untuk n bernilai ganjil.

$$p(n): B^n = \begin{bmatrix} 0 & p(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} & 0 \\ q(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & t(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} \\ 0 & s(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

1) Akan ditunjukkan $p(1)$ maka

$$p(1): B^1 = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & t \\ 0 & s & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & p(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} & 0 \\ q(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & t(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} \\ 0 & s(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

2) Karena $n = 2i + 1$ dengan asumsi $p(i), i \in \mathbb{N}$ benar, yaitu:

$$p(i): B^{2i+1} = \begin{bmatrix} 0 & p(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ q(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} & 0 & t(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} \\ 0 & s(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} & 0 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Selanjutnya, $p(i+1)$ juga akan benar, yaitu:

$$p(i+1): B^{2(i+1)+1} = \begin{bmatrix} 0 & p(pq+ts)^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \\ q(pq+ts)^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & t(pq+ts)^{\frac{2i+2}{2}} \\ 0 & s(pq+ts)^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (3), maka dapat ditulis:

$$B^{2i+1} \cdot B^2 = \begin{bmatrix} 0 & p(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ q(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} & 0 & t(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} \\ 0 & s(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} pq & 0 & pt \\ 0 & pq+ts & 0 \\ qs & 0 & ts \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & p(pq+ts)^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \\ q(pq+ts)^{\frac{2i+2}{2}} & 0 & t(pq+ts)^{\frac{2i+2}{2}} \\ 0 & s(pq+ts)^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan berikut, maka $p(i+1)$ dapat dinyatakan benar. Matriks B^n untuk n adalah bilangan bulat positif ganjil, seperti yang ditunjukkan dalam langkah 1 dan 2. Selanjutnya, matriks dengan n genap akan dibuktikan.

$$p(n): B^n = \begin{bmatrix} pq(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} & 0 & pr(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} \\ 0 & (pq+ts)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ qs(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} & 0 & ts(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} \end{bmatrix}$$

1. Akan ditunjukkan $p(2)$ benar.

$$p(2): B^2 = \begin{bmatrix} pq & 0 & pt \\ 0 & pq+ts & 0 \\ qs & 0 & rs \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} pq(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} & 0 & pt(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} \\ 0 & (pq+ts)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ qs(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} & 0 & ts(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} \end{bmatrix}$$

2. Karena $n = 2i$. dengan asumsikan $p(i), i \in \mathbb{N}$ benar, yaitu:

$$p(i): B^{2i} = \begin{bmatrix} pq(pq+ts)^{\frac{2i-2}{2}} & 0 & pt(pq+ts)^{\frac{2i-2}{2}} \\ 0 & (pq+ts)^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ qs(pq+ts)^{\frac{2i-2}{2}} & 0 & ts(pq+ts)^{\frac{2i-2}{2}} \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Selanjutnya, $p(i+1)$ juga akan benar, yaitu:

$$p(i+1): B^{2(i+1)} = \begin{bmatrix} pq(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} & 0 & pt(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} \\ 0 & (pq+ts)^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \\ qs(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} & 0 & ts(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (4), maka dapat ditulis:

$$B^{2i} \cdot B^2 = \begin{bmatrix} pq(pq+ts)^{\frac{2i-2}{2}} & 0 & pt(pq+ts)^{\frac{2i-2}{2}} \\ 0 & (pq+ts)^{\frac{2i}{2}} & 0 \\ qs(pq+ts)^{\frac{2i-2}{2}} & 0 & ts(pq+ts)^{\frac{2i-2}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} pq & 0 & pt \\ 0 & pq+ts & 0 \\ qs & 0 & ts \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} pq(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} & 0 & pt(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} \\ 0 & (pq+ts)^{\frac{2i+2}{2}} & 0 \\ qs(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} & 0 & ts(pq+ts)^{\frac{2i}{2}} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan berikut, maka $p(i+1)$ dapat dinyatakan benar. Matriks B^n untuk n adalah bilangan bulat positif genap, seperti yang ditunjukkan dalam langkah 1 dan 2. Kemudian, dengan menjumlahkan diagonal utama matriks yang telah dipangkatkan sebanyak n kali, kita dapat menemukan formula $trace$.

Teorema 9. *Diberikan matriks* $B = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & t \\ 0 & s & 0 \end{bmatrix} \forall p, q, t, s \in \mathbb{R}$, *maka:*

$$Tr(B^n) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ 2(pq+ts)^{\frac{n}{2}} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti.

Mengacu pada Teorema 8, bentuk umum $Tr(B^n)$ didapat dengan $Tr(B^n)$ untuk n ganjil yaitu:

$Tr(B^n) = 0$

Untuk n genap yaitu:

$$
\begin{aligned}
Tr(B^n) &= pq(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} + (pq+ts)^{\frac{n}{2}} + ts(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{\frac{n-2}{2}}{r} (pq)^{\frac{n}{2}-r}(ts)^r + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{\frac{n}{2}}{r} (pq)^{\frac{n}{2}-r}(ts)^r + \sum_{r=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{\frac{n-2}{2}}{r} (pq)^{\frac{n-2}{2}-r}(ts)^{r+1} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \binom{\frac{n}{2}}{r} (pq)^{\frac{n}{2}-r}(ts)^r + \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \binom{\frac{n}{2}}{r} (pq)^{\frac{n}{2}-r}(ts)^r \\
&= 2(pq+ts)^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya akan diperlihatkan bagaimana pencarian nilai dari *trace* matriks menggunakan formula yang telah didapat pada Teorema 7 dan Teorema 9 pada matriks 3×3 khusus yang terdifinisi A dan B.

Contoh 10. *Diberikan matriks* 3×3 *sebagai berikut:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian nilai $\mathrm{T}r(A^8)$ Menurut Teorema 7 diperoleh nilainya adalah:

$$Tr(A^n) = 2^{\frac{n+2}{2}} 5^{\frac{n}{2}} 8^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{8+2}{2}} 5^{\frac{8}{2}} 8^{\frac{8}{2}} = 81920000$$

Contoh 11. *Diberikan matriks* 3×3 *sebagai berikut:*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian nilai $\mathrm{T}r(A^6)$ Menurut Teorema 9 diperoleh nilainya adalah:

$$Tr(B^6) = 2(pq+ts)^{\frac{n}{2}} = 2(12+42)^{\frac{6}{2}} = 314928$$

Contoh 12. *Diberikan matriks* 3×3 *sebagai berikut:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian nilai $\mathrm{T}r(A^8)$ Menurut Teorema 9 dengan nilai nilai $q = s$ dan $t = p$ diperoleh nilainya adalah:

$$Tr(A^8) = 2(pq+ts)^{\frac{n}{2}} = 2(40+40)^{\frac{8}{2}} = 81920000$$

PENUTUP

Didapatlah hasil dan kesimpulan dari artikel ini yaitu bentuk umum dan nilai *trace,* dimana untuk n bilangan bulat negatif, nilai *trace* tidak dapat ditentukan karena matriks Adan B tidak memiliki *invers.* Kemudian untuk $n = 0$ nilai *trace* matriksnya yaitu $Tr(A^0) = Tr(B^0) = 3$. Lebih lanjut bentuk umum daripada perpangkatan matriks serta *trace* matriks khusus berukuran 3×3 berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

1. Bentuk umum

$$
A^n = \begin{cases}
\begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & , n \text{ ganjil} \\
\begin{bmatrix} 2^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n+2}{2}} q^{\frac{n-2}{2}} \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 2^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n-2}{2}} q^{\frac{n+2}{2}} & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & , n \text{ genap}
\end{cases}
$$

$$B^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & p(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} & 0 \\ q(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & t(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} \\ 0 & s(pq+ts)^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & , n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} pq(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} & 0 & pt(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} \\ 0 & (pq+ts)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ qs(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} & 0 & ts(pq+ts)^{\frac{n-2}{2}} \end{bmatrix} & , n \text{ genap} \end{cases}$$

2. *Trace*

$$Tr(A^n) = \begin{cases} 0 & , \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 2^{\frac{n+2}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} & , \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

$$Tr(B^n) = \begin{cases} 0 & , \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 2(pq+ts)^{\frac{n}{2}} & , \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Larson R, Falvo DC. *Elementary Linear Algebra*. 6th ed. New York: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 2009.

[2] Anton H, Rorres C. *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi*. 8th ed. Jakarta: Erlangga, 2004.

[3] Pahade J, Jha M. Trace Of Positive Integer Power Of Real 2 × 2 Matrices. *Scientific Reasearch Publishing* 2015; 5: 150–155.

[4] Aryani F, Husna N. Trace Matriks Toepitz Tridiagonal 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika* 2019; 5: 40–49.

[5] Rahmawati, Putri NA, Aryani F, et al. Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat Posisitif. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika* 2019; 5: 62–70.

[6] Olii IR, Resmawan, Yahya Lailany. Trace Matriks Toeplitz 2-Tridiagonal 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan* 2021; 15: 441–452.

[7] Aryani F, Andesta R, Marzuki CC. Trace Matriks Berbentuk Khusus 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika* 2020; 6: 40–49.

[8] Aryani F, Yulianis. Trace Matriks Berbentuk Khusus 2 × 2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika* 2018; 4: 105–113.

[9] Aryani F, Anam C, Marzuki CC. Trace Matriks Kompleks Berbentuk Khusus 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika* 2020; 6: 122–132.

[10] Buhaerah. *Matematika Diskrit*. Parepare: IAIN Parepare Nusantara Press, 2019.

Dimas Catur Ramadhani : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, dimascaturramadhani@student.untan.ac.id

Mariatul Kiftiah : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

Fransiskus Fran : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, fransiskusfran@math.untan.ac.id