Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 12, No. 4 (2023), hal 351-358.

PENERAPAN SISTEM LINEAR MAKS-PLUS INTERVAL WAKTU INVARIAN PADA PRODUKSI SOFA DI FEBBRY MEBEL

Verasiska. YB, Nilamsari Kusumastuti, Meliana Pasaribu

INTISARI

Febbry Mebel merupakan salah satu industri mebel yang memproduksi produk sofa dan tempat tidur dengan menggunakan bahan utama kayu. Banyaknya permintaan pembuatan sofa, terkadang pihak mebel harus dapat memperkirakan berapa banyak waktu yang diperlukan dalam sekali produksi sofa dan berapa sofa yang dapat diproduksi dalam waktu satu minggu dengan asumsi bahwa bahan baku pembuatan sofa dianggap selalu ada. Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan serta menganalisis output sistem berdasarkan input sistem ke dalam sistem linear maks-plus interval waktu invarian autonomous (SLMIIA). Dalam penelitian ini, data utama yang digunakan adalah dari sistem produksi sofa Romeo yang terdiri dari tujuh unit pemrosesan. Data berupa langkah proses pembuatan sofa dan waktu pada setiap unit pemrosesan kemudian dibentuk ke dalam model matematika sistem produksi sofa, selanjutnya dilakukan analisis input-output menggunakan sistem linear maks-plus interval waktu invarian autonomous (SLMIIA). Hasil penelitian menunjukan bahwa waktu penyelesaian produksi untuk satu sofa adalah paling cepat 780 menit atau 13 jam 0 menit dan paling lambat 1.125 menit atau 18 jam 45 menit, sedangkan dalam waktu satu minggu Febbry Mebel bisa melakukan paling sedikit lima kali produksi dan paling banyak delapan kali produksi, saat aktivitas produksi dilaksanakan dengan maksimal.

Kata Kunci : *Aljabar Maks-Plus, Sistem Produksi, Analisis Input-output, Autonomous.*

PENDAHULUAN

Kalimantan Barat merupakan salah satu provinsi yang kaya akan sumber daya alam, khususnya di sektor kehutanan. Sektor ini menghasilkan bahan-bahan mentah untuk bahan baku utama industri salah satunya mebel. Industri mebel merupakan industri yang mengolah bahan baku atau setengah jadi menjadi produk mebel. Kebutuhan akan mebel menjadi daya tarik produsen untuk bersaing dalam menghasilkan produk mebel yang berkualitas. Febbry Mebel merupakan salah satu industri yang memproduksi produk sofa dan tempat tidur dari bahan utama kayu. Kegiatan produksi di Febbry Mebel memiliki hubungan yang kuat dengan efiktifitas penggunaan waktu. Oleh karena itu, penerapan aljabar maks-plus diantisipasi dapat berfungsi sebagai pendekatan guna meningkatkan efisiensi pengelolaan waktu dalam sistem produksi di Febbry Mebel, sehingga waktu produksi dapat dimanfaatkan dengan lebih efektif.

Aljabar maks-plus adalah himpunan seluruh bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum (*max*) dinyatakan dengan simbol $\oplus$ dan operasi penjumlahan (*plus*) dinyatakan dengan simbol $\otimes$. Penggunaan aljabar maks-plus bisa diterapkan untuk melakukan pemodelan serta analisis aljabar terhadap situasi-situasi dalam jaringan, seperti perencanaan jadwal dan pengaturan antrian [1]. Penelitian sebelumnya membahas terkait optimalisasi waktu produksi mie instan menggunakan analisis *input-output* sistem linear maks-plus waktu invarian [2]. Selain itu, ada juga penelitian sebelumnya yang membahas mengenai penerapan sistem linear maks-plus interval waktu invarian pada sistem produksi minuman khas Pontianak lidah buaya I Sun Vera [3].

Permasalahan yang dibahas pada penelitian ini yaitu pemodelan dan analisa *input-output* sistem linear maks-plus interval waktu invarian *autonomous* pada sistem produksi sofa Romeo di Febbry Mebel. Adapun tujuan dari penelitian ialah untuk membentuk model sistem produksi sofa, menganalisis *output* sistem dengan kondisi awal $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{\varepsilon}$ yang tanpa dipengaruhi kedatangan *input* sistem dan menentukan waktu produksi satu sofa dan berapa sofa yang dapat diproduksi dalam rentang waktu satu minggu. Dalam hal ini, yang menjadi batasan masalah penelitian adalah pada sistem produksi matriks yang digunakan merupakan matriks konstan, sehingga sistem waktunya invarian. Keadaan sistem tanpa terpengaruh oleh kedatangan *input*, sehingga dinamakan *autonomous*. Waktu awal yang dijadikan acuan untuk memulai aktivitas produksi adalah dari pukul 08.00 hingga 17.00 WIB (480 menit), dengan istirahat dari pukul 12.00 hingga 13.00 WIB, serta beroperasi pada hari kerja mulai dari Senin hingga Jumat.

Penelitian dimulai dengan melakukan survei ke Febbry Mebel dan diperoleh data berupa langkah-langkah proses pembuatan sofa Romeo dan waktu yang diperlukan pada setiap unit pemrosesan yang selanjutnya diolah dan dibentuk ke dalam model sistem produksi sofa. Setelah model sistem produksi sofa terbentuk, dilakukan analisis *input-output* sistem linear maks-plus interval waktu invarian *autonomous* $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{x}_0)$ dengan kondisi awal $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{\varepsilon}$ tanpa dipengaruhi kedatangan *input*. $\boldsymbol{A}$ didefinisikan sebagai sistem produksi yang berlangsung dan $\boldsymbol{C}$ sebagai jumlah waktu proses akhir dan waktu transfer sebelum produk dapat selesai dikerjakan. Selanjutnya, merepresentasikan hasil *output* sistem sehingga diperoleh waktu produksi optimal untuk satu sofa dan jumlah sofa yang dapat diproduksi oleh Febbry Mebel dalam rentang waktu satu minggu.

MATRIKS DAN INTERVAL MAKS-PLUS

Aljabar maks-plus adalah himpunan seluruh bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum (*max*) yang dinyatakan dengan simbol $\oplus$ dan operasi penjumlahan (*plus*) dinyatakan dengan simbol $\otimes$. Operasinya dapat didefinisikan

$$a \oplus b = \text{maks}\,\{a, b\}$$
$$a \otimes b = a + b$$

untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$. Himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dinotasikan dengan $\mathbb{R}_\varepsilon$. Elemen-elemen aljabar maks-plus adalah bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$. [1]

Suatu matriks $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}$ dengan elemen $a_{ij} \in \mathbb{R}_\varepsilon$ sebagai matriks berukuran $m \times n$. Matriks tersebut memiliki m baris dan n kolom, secara khusus dalam aljabar maks-plus ditulis sebagai berikut:[4]

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Elemen $a_{ij} = [A]_{ij}$ menunjukkan elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Matriks dalam aljabar maks-plus memiliki beberapa definisi sebagai berikut: [4]

1. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}$ didefinisikan $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$ dengan $[\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}]_{ij} = [A]_{ij} \oplus [B]_{ij}$.
2. $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m\times p}$ dan $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{p\times n}$ didefinisikan $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ dengan $[\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} [A]_{ik} \otimes [B]_{kj}$.
3. $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}$ memiliki transpos yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ dan didefinisikan sebagai $[A^{\mathrm{T}}]_{ij} = [A]_{ji}$.
4. Matriks identitas maks-plus $\boldsymbol{E}_n \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n}$ dengan 0 jika $i = j$ dan ε jika $i \neq j$.
5. Pangkat $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan matriks $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n}$ maka $\boldsymbol{A}^{\otimes^k} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A}^{k-1}$. Jika $k = 0$, maka $\boldsymbol{A}^{\otimes^0} = \boldsymbol{E}_n$.
6. $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}_\varepsilon$ didefinisikan $\alpha \otimes \boldsymbol{A}$ dengan $[\alpha \otimes \boldsymbol{A}] = \alpha \otimes [A]_{ij}$.

Misalkan interval tertutup x di dalam himpunan $\mathbb{R}_{\text{maks}}$ merujuk pada subhimpunan tertentu dari $\mathbb{R}_{\text{maks}}$, dinyatakan sebagai berikut:

$$x = [\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \mathbb{R}_{\text{maks}} | \underline{x} \preccurlyeq_m x \preccurlyeq_m \overline{x}\}$$

Interval x di dalam $\mathbb{R}_{\text{maks}}$ dikenal sebagai interval maks-plus dan secara singkat disebut sebagai interval. Sebagai contoh [2,8] merupakan interval, tetapi [6,3] bukan merupakan interval. [5]

Diberikan suatu semiring idempoten $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ dan tidak memuat pembagi nol, dengan elemen netral ε didefinisikan

$$\mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon = \{x \in [\underline{x}, \overline{x}] | \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}, \varepsilon \prec_m \underline{x} \preccurlyeq_m \overline{x}\} \cup \{[\varepsilon, \varepsilon]\}$$

Pada $\mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dengan

1. $x \overline{\oplus} y = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}]$
2. $x \overline{\otimes} y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}]$

untuk setiap $x, y \in \mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon$. Kemudian $(\mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ disebut dengan aljabar maks-plus interval yang dilambangkan dengan $\mathrm{I}(\mathbb{R})_{\text{maks}}$. Sebagai contoh $[2,5] \overline{\oplus} [3,4] = [3,5]$ dan $[2,5] \overline{\otimes} [3,4] = [5,9]$. [5]

SISTEM LINEAR MAKS-PLUS INTERVAL WAKTU INVARIAN AUTONOMOUS

Sistem linear maks-plus interval waktu invarian *autonomous* merujuk pada sistem peristiwa yang berlangsung secara diskrit dan dapat dinyatakan ke dalam persamaan berikut: [6]

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A} \overline{\otimes} \boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C} \overline{\otimes} \boldsymbol{x}(k)$$

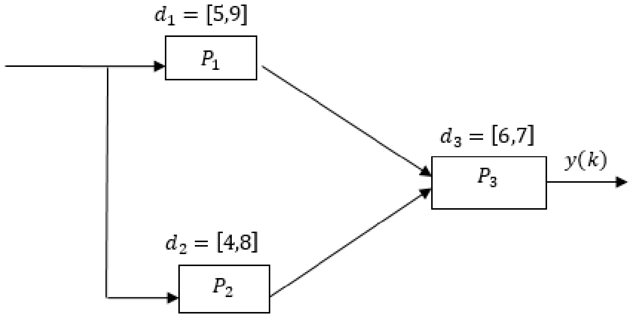
untuk $k = 1,2,3,\dots$, dengan kondisi awal $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{A} \in \mathrm{I}(\mathbb{R})_{\text{maks}}^{m\times n}$, dan $\boldsymbol{C} \in \mathrm{I}(\mathbb{R})_{\text{maks}}^{1\times n}$, dimana vektor interval $\boldsymbol{x}(k) \in \mathrm{I}(\mathbb{R})_{\text{maks}}^{n}$ menggambarkan rentang keadaan (*state*) pada waktu ke-k, dan vektor interval $\boldsymbol{y}(k) \in \mathrm{I}(\mathbb{R})_{\text{maks}}^{1}$ menggambarkan rentang *output* sistem pada waktu ke-k.

Apabila suatu sistem diberikan keadaan awal, maka akan dihasilkan barisan keadaan sistem dan barisan *output* sistem yang cocok dengan keadaan awal tersebut. Untuk sistem linear maks-plus interval waktu invarian *autonomous*, karakteristik *input*-*output*nya dapat dinyatakan sebagai berikut: [6]
Jika sebuah bilangan bulat positif k diberikan, dengan vektor *output* $y = [y(1), y(2), \dots, y(k)]^{\mathrm{T}}$, maka:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{D} \overline{\otimes} \boldsymbol{x}(0)$$

dengan $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \overline{\otimes} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} \overline{\otimes} \boldsymbol{A}^{\overline{\otimes}^{2}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C} \overline{\otimes} \boldsymbol{A}^{\overline{\otimes}^{k}} \end{bmatrix}$

Suatu sistem produksi sederhana yang disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Sistem Produksi Sederhana [6]

Sistem terdiri dari tiga unit pemrosesan, yaitu P_1, P_2, dan P_3. Proses dimulai dengan memasukkan bahan baku ke P_1 dan P_2, kemudian diproses sebelum akhirnya diteruskan ke P_3. Setiap unit pemrosesan memiliki rentang waktu tertentu yang diperlukan untuk menyelesaikan tugasnya, masing-masing dinyatakan sebagai $d_1 = [5,9], d_2 = [4,8]$, dan $d_3 = [6,7]$ satuan waktu.

Antara tahap masukan awal dan antara unit-unit pemrosesan, terdapat penyangga yang berfungsi sebagai penampung. Ini terdiri dari penyangga masukan dan penyangga internal. Kedua penyangga ini memiliki kapasitas yang cukup besar sehingga tidak ada risiko penyangga meluap. Pada saat sistem berada dalam kondisi awal, penyangga masukan serta beberapa penyangga internal sudah terisi sebagian. Selanjutnya, bahan baku dimasukkan ke dalam sistem dengan kecepatan tertentu, memastikan penyangga masukan tetap terisi sepanjang waktu. Hal ini berarti mesin-mesin dalam sistem akan langsung beroperasi dari awal dan tidak akan ada penundaan akibat kurangnya bahan baku, karena pasokan bahan baku selalu tersedia. Unit pemrosesan hanya dapat memulai bekerja pada produk baru setelah menyelesaikan pemrosesan produk sebelumnya. Misalkan $x_i(k)$ merupakan interval waktu di mana unit pemrosesan ke-i mulai beroperasi pada pemrosesan ke-k, sementara $y(k)$ merupakan interval waktu ketika produk ke-k selesai diproses dan meninggalkan sistem.

Waktu ketika P_1 memulai bekerja untuk pemrosesan berikutnya, yaitu ke-$(k+1)$ dapat ditentukan sebagai berikut. Di unit pemrosesan P_1, pemrosesan bahan baku baru hanya dapat dimulai setelah menyelesaikan pemrosesan sebelumnya, yaitu ketika bahan baku yang diperlukan untuk pemrosesan ke-k telah selesai diproses. Karena rentang waktu pemrosesan di P_1 adalah $d_1 = [5,9]$ satuan waktu, waktu ketika pemrosesan ke-$(k+1)$ dimulai pada P_1 yaitu $x_1(k+1) = x_1(k) \overline{\otimes} [5,9]$. Berdasarkan Gambar 1, menggunakan operasi aljabar maks-plus interval diperoleh:

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= [5,9] \overline{\otimes} x_1(k) \\
x_2(k+1) &= [4,8] \overline{\otimes} x_2(k) \\
x_3(k+1) &= [10,18] \overline{\otimes} x_1(k) \overline{\oplus} [8,16] \overline{\otimes} x_2(k) \overline{\oplus} [6,7] \overline{\otimes} x_3(k) \\
y(k) &= [6,7] \overline{\otimes} x_3(k)
\end{aligned} \tag{1}
$$

Bentuk persamaan matriks aljabar maks-plus interval dari sistem persamaan (1) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$
\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix} [5,9] & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & [4,8] & \varepsilon \\ [10,18] & [8,16] & [6,7] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \boldsymbol{x}(k)
$$

$$
\boldsymbol{y}(k) = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad [6,7]] \overline{\otimes} \boldsymbol{x}(k)
$$

untuk $k = 1,2,3, \ldots$ dan $\boldsymbol{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k)]^{\mathrm{T}}$.

Di dapat $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [5,9] & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & [4,8] & \varepsilon \\ [10,18] & [8,16] & [6,7] \end{bmatrix} \in \mathrm{I}(\mathbb{R})^{3\times 3}_{\text{maks}}$, dan $\boldsymbol{C} = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad [6,7]] \in \mathrm{I}(\mathbb{R})^{1\times 3}_{\text{maks}}$

Pada sistem produksi sederhana Gambar 1, jika diberikan kondisi awalnya $\boldsymbol{x}(0) = [0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} = [[0,0] \quad [0,0] \quad [0,0]]^{\mathrm{T}}$, dan nilai $k = 5$, maka didapat barisan interval waktu keadaan dan *output* sistem dari sistem produksi sederhana pada Tabel 1.

Tabel 1. Perhitungan Interval Waktu Keadaan dan *Output* Sistem Gambar 1.

k	0	1	2	3	4	5
x_1	[0,0]	[5,9]	[10,18]	[15,27]	[20,36]	[25,45]
x_2	[0,0]	[4,8]	[8,16]	[12,24]	[16,32]	[20,40]
x_3	[0,0]	[10,18]	[16,27]	[22,36]	[28,45]	[34,54]
y	[0,0]	[16,25]	[22,34]	[28,43]	[34,52]	[40,61]

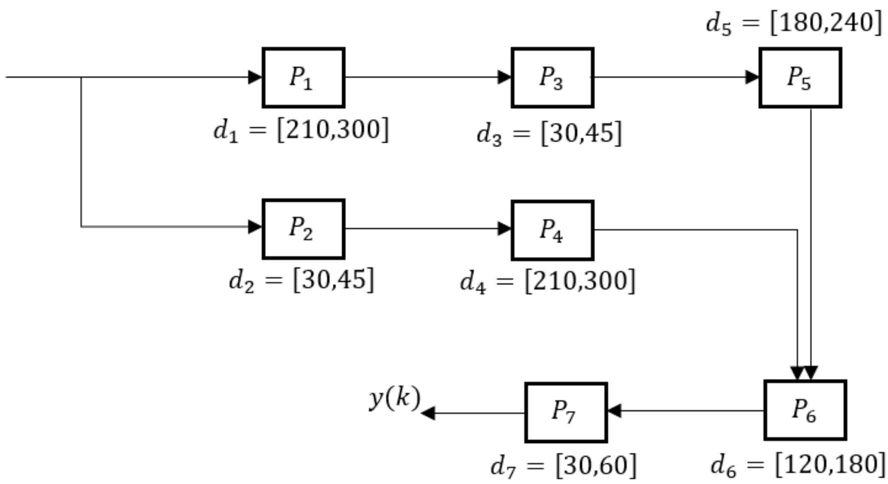
SLMII PADA SISTEM PRODUKSI SOFA ROMEO DI FEBBRY MEBEL

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data primer mengenai sistem produksi sofa. Data tersebut berupa langkah-langkah proses pembuatan sofa Romeo dan waktu yang diperlukan pada setiap unit pemrosesan pada sistem produksi sofa Romeo di Febbry Mebel. Data yang diperoleh berupa interval waktu, dengan nilai terendah sebagai batas bawah dan nilai tertinggi sebagai batas atas, yang disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Interval Waktu Produksi Sofa Romeo di Febbry Mebel

No	Kode	Proses	Interval Waktu (menit)
1.	P_1	Pembuatan kerangka kursi	[210,300]
2.	P_2	Pembuatan pola kain	[30,45]
3.	P_3	Pemasangan karet kursi	[30,45]
4.	P_4	Pemotongan dan penjahitan kain sesuai pola	[210,300]
5.	P_5	Pengeleman dan pemasangan busa	[180,240]
6.	P_6	Pemasangan kain	[120,180]
7.	P_7	Pemasangan kancing dan pembungkusan sofa	[30,60]

Pada Tabel 2. dilihat sistem produksi sofa Romeo memiliki tujuh unit pemrosesan yaitu $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ dan P_7. Bahan baku kayu untuk pembuatan sofa dimasukan ke P_1 untuk dibuat kerangka kursi dan dikirim ke P_3 untuk dipasang karet, dari P_3 dikirim ke P_5 untuk dilem dan dipasang busa. Kain yang sudah tersedia dimasukan ke P_2 untuk dibuat pola kemudian dikirim ke P_4 untuk dipotong dan dijahit sesuai pola kain. Setelah diproses bahan baku dari P_4 dan P_5 dikirimkan ke P_6 untuk pemasangan kain, selanjutnya dari P_6 dikirim ke P_7 untuk dipasang kancing dan dibungkus. Disajikan juga proses produksi sofa Romeo di Febbry Mebel pada Gambar 2.



Gambar 2. Sistem Produksi Sofa Romeo di Febbry Mebel

Pada sistem produksi sofa Romeo, saat sistem berada dalam kondisi awal, beberapa bagian penyangga *input* serta beberapa penyangga internal sudah terisi sebagian. Kemudian, bahan baku dimasukkan ke dalam sistem dengan kecepatan tetap untuk memastikan bahwa persediaan bagian penyangga *input* selalu tersedia. Hal ini memungkinkan mesin-mesin untuk terus beroperasi tanpa perlu menunggu bahan baku karena pasokannya selalu ada. Proses ini bearti bahwa setiap unit pemrosesan hanya dapat memulai pekerjaan pada produk baru setelah menyelesaikan produk sebelumnya. Dalam asumsi ini, setiap unit pemrosesan dapat memulai pekerjaan segera setelah bahan tersedia. Dimisalkan $x_i(k)$ mengacu pada interval waktu di mana unit pemrosesan ke-i mulai beroperasi pada pemrosesan ke-k, dan $y(k)$ mengacu pada interval waktu di mana produk ke-k selesai diproses dan meninggalkan sistem.

Waktu ketika unit pemrosesan P_1 memulai bekerja pada pemrosesan ke-$(k+1)$ dapat ditentukan sebagai berikut. Di unit pemrosesan P_1, pemrosesan dimulai setelah selesai dengan pemrosesan sebelumnya, yaitu pemrosesan ke-k. Interval waktu pemrosesan di unit P_1 adalah $d_1 = [210,300]$ satuan waktu. Oleh karena itu, waktu dimulainya pemrosesan untuk ke-$(k+1)$ pada unit P_1 adalah $x_1(k+1) = x_1(k) \overline{\otimes} [210,300]$. Berdasarkan Gambar 2, menggunakan operasi aljabar maks-plus interval diperoleh:

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= [210,300] \overline{\otimes} x_1(k) \\
x_2(k+1) &= [30,45] \overline{\otimes} x_2(k) \\
x_3(k+1) &= [420,600] \overline{\otimes} x_1(k) \overline{\oplus} [30,45] \overline{\otimes} x_3(k) \\
x_4(k+1) &= [60,90] \overline{\otimes} x_2(k) \overline{\oplus} [210,300] \overline{\otimes} x_4(k) \\
x_5(k+1) &= [450,645] \overline{\otimes} x_1(k) \overline{\oplus} [60,90] \overline{\otimes} x_3(k) \overline{\oplus} [180,240] \overline{\otimes} x_5(k) \\
x_6(k+1) &= [270,390] \overline{\otimes} x_2(k) \overline{\oplus} [420,600] \overline{\otimes} x_4(k) \overline{\oplus} [630,885] \overline{\otimes} x_1(k) \overline{\oplus} [240,330] \overline{\otimes} \\
&\qquad x_3(k) \overline{\oplus} [360,480] \overline{\otimes} x_5(k) \overline{\oplus} [120,180] \overline{\otimes} x_6(k) \\
x_7(k+1) &= [390,570] \overline{\otimes} x_2(k) \overline{\oplus} [540,780] \overline{\otimes} x_4(k) \overline{\oplus} [750,1065] \overline{\otimes} x_1(k) \overline{\oplus} [360,510] \\
&\qquad \overline{\otimes} x_3(k) \overline{\oplus} [480,660] \overline{\otimes} x_5(k) \overline{\oplus} [240,360] \overline{\otimes} x_6(k) \overline{\oplus} [30,60] \overline{\otimes} x_7(k) \\
y(k) &= [30,60] \overline{\otimes} x_7(k)
\end{aligned} \tag{2}
$$

Bentuk persamaan matriks aljabar maks-plus interval dari sistem persamaan (2) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$
\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix}
[210,300] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & [30,45] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
[420,600] & \varepsilon & [30,45] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & [60,90] & \varepsilon & [210,300] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
[450,645] & \varepsilon & [60,90] & \varepsilon & [180,240] & \varepsilon & \varepsilon \\
[630,885] & [270,390] & [240,330] & [420,600] & [360,480] & [120,180] & \varepsilon \\
[750,1065] & [390,570] & [360,510] & [540,780] & [480,660] & [240,360] & [30,60]
\end{bmatrix} \overline{\otimes} \boldsymbol{x}(k)
$$

$$
\boldsymbol{y}(k) = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad [30,60]] \overline{\otimes} \boldsymbol{x}(k)
$$

untuk $k = 1,2,3, \ldots$ dan $\boldsymbol{x}(k) = [x_1(k) \quad x_2(k) \quad \cdots \quad x_7(k)]^{\mathrm{T}}$.

Sehingga diperoleh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [210,300] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & [30,45] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [420,600] & \varepsilon & [30,45] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & [60,90] & \varepsilon & [210,300] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [450,645] & \varepsilon & [60,90] & \varepsilon & [180,240] & \varepsilon & \varepsilon \\ [630,885] & [270,390] & [240,330] & [420,600] & [360,480] & [120,180] & \varepsilon \\ [750,1065] & [390,570] & [360,510] & [540,780] & [480,660] & [240,360] & [30,60] \end{bmatrix} \in \mathrm{I}(\mathbb{R})^{7\times 7}_{\text{maks}}$$

$$\boldsymbol{C} = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad [30,60]] \in \mathrm{I}(\mathbb{R})^{1\times 7}_{\text{maks}}$$

Jika suatu sistem diberikan keadaan awal $\boldsymbol{x}(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} = [[0,0] \quad [0,0] \quad [0,0] \quad [0,0] \quad [0,0] \quad [0,0] \quad [0,0]]^{\mathrm{T}}$, yang berarti unit pemrosesan P_1, P_2 hingga P_7 memulai aktivitasnya pada waktu 0 satuan waktu (menit) atau telah beroperasi dari awal tanpa perlu menunggu *input*, karena *input* selalu ada. Diperoleh barisan interval waktu keadaan dan *output* sistem pada sistem produksi sofa Romeo di Febbry Mebel yang disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Perhitungan Interval Waktu Keadaan dan *Output* Sistem pada Sistem Produksi Sofa Romeo di Febbry Mebel

$x_i(k)$ \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_1(k)$	[210,300]	[420,600]	[630,900]	[840,1200]	[1050,1500]	[1260,1800]	[1470,2100]	[1680,2400]	[1890,2700]
$x_2(k)$	[30,45]	[60,90]	[90,135]	[120,180]	[150,225]	[180,270]	[210,315]	[240,360]	[270,405]
$x_3(k)$	[420,600]	[630,900]	[840,1200]	[1050,1500]	[1260,1800]	[1470,2100]	[1680,2400]	[1890,2700]	[2100,3000]
$x_4(k)$	[210,300]	[420,600]	[630,900]	[840,1200]	[1050,1500]	[1260,1800]	[1470,2100]	[1680,2400]	[1890,2700]
$x_5(k)$	[450,645]	[660,945]	[870,1245]	[1080,1545]	[1290,1845]	[1500,2145]	[1710,2445]	[1920,2745]	[2130,3045]
$x_6(k)$	[630,885]	[840,1185]	[1050,1485]	[1260,1785]	[1470,2085]	[1680,2385]	[1890,2685]	[2100,2985]	[2310,3285]
$x_7(k)$	[750,1065]	[960,1365]	[1170,1665]	[1380,1965]	[1590,2265]	[1800,2565]	[2010,2865]	[2220,3165]	[2430,3465]
$y(k)$	[780,1125]	[990,1425]	[1200,1725]	[1410,2025]	[1620,2325]	[1830,2625]	[2040,2925]	[2250,3225]	[2460,3525]

Berdasarkan dari hasil perhitungan interval waktu keadaan dan *output* sistem pada sistem produksi sofa Romeo di Febbry Mebel pada Tabel 3. diperoleh *output* penyelesaian produksi satu sofa yaitu $y = [780,1125]$ dengan $k = 1$ menunjukkan bahwa waktu penyelesaian produksi untuk satu sofa adalah paling cepat 780 menit atau 13 jam 0 menit dan paling lambat 1.125 menit atau 18 jam 45 menit dan dengan waktu penyelesaian produksi 2.400 menit, dilihat pada hasil *output* $y = [1620,2325]$ dengan $k = 5$ dan $y = [2250,3225]$ dengan $k = 8$ menunjukkan bahwa dalam satu minggu Febbry Mebel bisa melakukan paling sedikit lima kali produksi dan paling banyak delapan kali produksi.

PENUTUP

Dengan sistem linear maks-plus interval waktu invarian *autonomous* (SLMIIA), hasil *output* sistem pada sistem produksi sofa Romeo di Febbry Mebel menunjukkan bahwa waktu penyelesaian produksi untuk satu sofa adalah paling cepat 780 menit atau 13 jam 0 menit dan paling lambat 1.125 menit atau 18 jam 45 menit. Sedangkan dalam waktu satu minggu Febbry Mebel bisa melakukan paling sedikit 5 kali produksi dan paling banyak hingga 8 kali produksi. Hal ini dikarenakan unit pemrosesannya telah beroperasi sejak awal, sehingga tanpa perlu menunggu datangnya *input*, karena *input* selalu ada.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bacceli F, Cohen G, Olsder G dan Quadrat J. *Synchronization and Linearity*, New York: John Willet & Sons, 2001.

[2] Winarti WF, Kusumastuti N dan Noviani E. Optimalisasi Waktu Produksi Mie Instan Menggunakan Analisis Input-output Sistem Linear Maks-Plus Waktu Invarian, *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, pp. Volume 04, No. 1 (2015), hal 63-68, 2015.

[3] Gumelar A, Kiftiah M dan Budiartini PW. Penerapan Sistem Linear Aljabar Max-Plus Interval Waktu Invarian pada Sistem Produksi (Studi Kasus: Minuman Khas Pontianak Lidah Buaya I Sun Vera), *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, pp. Volume 07, No. 1 (2018), hal 15-22, 2018.

[4] Farlow K. *Max-Plus Algebra*, Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State Universiy, 2009.

[5] Rudhito A, Wahyuni S, Suparwanto A dan Susilo F. Matriks Atas Aljabar Max-Plus, *Jurnal Natur Indonesia*, vol. 13, no. 2, pp. 94-99, 2011.

[6] Rudhito A. Sistem Linear Max-Plus Interval Waktu Invarian *Autonomous*, *Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA*, *Fakultas MIPA UNY*, pp. 163-169, 2012.

VERASISKA. YB : UNIVERSITAS TANJUNGPURA, PONTIANAK,
verasiska.yb@gmail.com

NILAMSARI KUSUMASTUTI : UNIVERSITAS TANJUNGPURA, PONTIANAK,
nilamsari@math.untan.ac.id

MELIANA PASARIBU : UNIVERSITAS TANJUNGPURA, PONTIANAK,
meliana.pasaribu@math.untan.ac.id