Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 03, No. 2(2014), hal 143 – 152.

METODE SIMPLEKS UNTUK PERSOALAN PEMROGRAMAN LINEAR DENGAN KOEFISIEN FUNGSI TUJUAN BILANGAN *FUZZY TRAPEZOIDAL*

Paula Arista, Bayu Prihandono, Nilamsari Kusumastuti

INTISARI

Himpunan fuzzy merupakan kumpulan bilangan real yang dinyatakan dengan suatu fungsi keanggotaan yang memetakan setiap domainnya ke tepat satu bilangan real pada interval tertutup $[0,1]$. *Teori himpunan fuzzy banyak diterapkan dalam berbagai disiplin ilmu seperti dalam pemrograman linear fuzzy. Pemrograman linear fuzzy digunakan untuk mencari solusi yang optimal berdasarkan kendala dan kriteria yang dinyatakan dalam fungsi tujuan dengan koefisien berupa bilangan fuzzy trapezoidal. Untuk mengurutkan bilangan fuzzy trapezoidal digunakan fungsi ranking linear yang memetakan setiap bilangan fuzzy trapezoidal ke dalam bilangan real. Pada pemrograman linear fuzzy ini digunakan metode simpleks untuk mencari solusi optimal dengan melakukan beberapa iterasi pada tabel simpleks. Pada penyelesaian contoh soal, keuntungan perusahaan yang tidak pasti merupakan bilangan fuzzy trapezoidal yaitu* $(50,55,6,11)$ *dalam ribuan rupiah untuk kue sus kering dan* $(60,65,6,16)$ *dalam ribuan rupiah untuk kue kuping gajah. Sehingga dengan pengoptimalan produksi kue sus kering sebanyak 66,67 kg dan kue kuping gajah sebanyak 50 kg, maka keuntungan maksimum yang bisa didapat oleh perusahaan adalah sebesar* $\left({}^{18400}\!/_{3}, {}^{21350}\!/_{3}, 1580, {}^{7240}\!/_{3} \right)$ *dalam ribuan rupiah atau senilai Rp 6.833.333,00.*

Kata Kunci: *Bilangan Fuzzy Trapezoidal, Metode Simpleks.*

PENDAHULUAN

Permasalahan dalam kehidupan nyata erat hubungannya dengan permasalahan yang mengandung ketidakpastian. Salah satu contohnya pada masalah pengalokasian sumber daya yang terbatas sehingga laba yang didapatkan oleh suatu perusahaan tersebut tidaklah pasti. Penggambaran keadaan dunia nyata yang tidak pasti inilah muncul istilah *fuzzy*. Teori *fuzzy* pertama kali diperkenalkan oleh Lotfi A. Zadeh dari Universitas California di Barkley pada tahun 1965 $[1]$. Teori himpunan *fuzzy* dapat digunakan untuk menangani ketidakpastian dengan memperkenalkan himpunan yang dinyatakan dengan suatu fungsi keanggotaan yang memetakan setiap domain pada himpunan *fuzzy* ke tepat satu bilangan real pada interval tertutup $[0,1]$. Teori himpunan *fuzzy* banyak diterapkan dalam berbagai disiplin ilmu seperti dalam pemrograman linear.

Pemrograman linear *fuzzy* digunakan untuk mencari solusi yang optimal seperti memaksimumkan keuntungan atau meminimumkan biaya berdasarkan kendala dan kriteria yang dinyatakan dalam fungsi tujuan dengan koefisien berupa bilangan *fuzzy trapezoidal*. Untuk mengurutkan bilangan *fuzzy trapezoidal* digunakan fungsi ranking linear yang memetakan setiap bilangan *fuzzy trapezoidal* ke dalam bilangan real. Jadi, pemrograman linear *fuzzy* memiliki peranan penting dalam merumuskan ketidakpastian ke dalam lingkungan nyata. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan persoalan pemrograman linear *fuzzy* yaitu metode simpleks. Metode simpleks adalah suatu algoritma yang merupakan suatu proses dengan prosedur sistematis yang diulang-ulang sampai hasil yang diinginkan tercapai (solusi optimal). Pada penelitian ini dibahas mengenai bagaimana menyelesaikan persoalan pemrograman linear dengan koefisien fungsi tujuan bilangan *fuzzy trapezoidal* (*Fuzzy Number Linear Programming* atau disingkat FNLP) menggunakan metode simpleks. Tujuan dari penelitian ini yaitu mengkaji bilangan *fuzzy trapezoidal* dan langkah-langkah metode simpleks untuk menyelesaikan persoalan FNLP.

Langkah-langkah penyelesaian persoalan FNLP dengan metode simpleks dimulai dengan memodelkan persoalan optimasi ke dalam bentuk kanonik pemrograman linear. Nilai koefisien fungsi tujuan diubah menjadi bentuk bilangan *fuzzy trapezoidal*. Apabila telah tersusun dalam bentuk kanonik, maka disusun tabel awal simpleks. Tabel awal simpleks tersebut diuji keoptimalannya. Apabila belum optimal, maka tabel harus diperbaiki dengan mencari variabel masuk dan variabel keluar. Selanjutnya ditentukan basis baru dengan menggunakan metode *eliminasi Gauss-Jordan*. Kemudian disusun kembali tabel simpleks yang baru dan diuji kembali keoptimalannya. Jika sudah optimal, maka diperiksa kembali apakah tabel tersebut memiliki variabel buatan positif atau tidak. Jika tabel memiliki variabel buatan positif maka persoalan menjadi tidak layak. Namun jika sebaliknya, maka penyelesaian persoalan telah selesai. Sebagai hasil akhir, nilai optimal pada fungsi tujuan yang berupa bilangan *fuzzy trapezoidal* diurutkan dengan menggunakan fungsi ranking linear yang memetakan setiap bilangan *fuzzy trapezoidal* ke dalam bilangan real.

BILANGAN *FUZZY TRAPEZOIDAL*

Teori himpunan *fuzzy* diperkenalkan oleh Lotfi A. Zadeh dari Universitas California di Barkley pada tahun 1965. Teori himpunan *fuzzy* ini diperkenalkan karena ada hal yang tidak dapat direpresentasikan dengan baik oleh himpunan *crisp* seperti suatu persoalan tidaklah selalu bernilai mutlak nol atau satu seperti pada himpunan *crisp* [1]. Pada himpunan *crisp*, derajat keanggotaan sebuah elemen terhadap suatu himpunan bernilai nol atau satu. Sedangkan pada himpunan *fuzzy*, derajat keanggotaan sebuah elemen berada pada interval terutup $[0,1]$.

Dimisalkan himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ adalah kumpulan elemen $x \in \mathbb{R}$ yang dinyatakan dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$. Fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$ yang menyatakan suatu elemen $x \in \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai berikut:

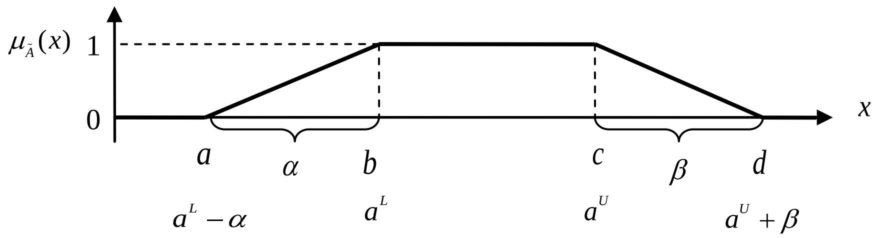
Definisi 1 [2] *Fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy* $\tilde{A}$ *dinotasikan dengan* $\mu_{\tilde{A}}$, *yang didefinisikan sebagai berikut:* $\mu_{\tilde{A}}(x): \mathbb{R} \to [0,1]$.

Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ pada $\mathbb{R}$ adalah konveks jika untuk sebarang $x, y \in \mathbb{R}$ dan $\lambda \in [0,1]$ berlaku $\mu_{\tilde{A}}\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$. [3]

Definisi 2 [4] *Diberikan* $\mathbb{R}$ *himpunan semua bilangan real. Bilangan fuzzy trapezoidal adalah himpunan fuzzy konveks* $\tilde{A}$ *dengan* $\mu_{\tilde{A}}: \mathbb{R} \to [0,1]$ *yang memenuhi kondisi berikut:*

1. *Fungsi keanggotaannya* $\mu_{\tilde{A}}(x)$ *adalah kontinu sepotong-sepotong.*
2. *Terdapat tiga interval* $[a,b]$, $[b,c]$, *dan* $[c,d]$ *dengan* $\mu_{\tilde{A}}$ *meningkat pada* $[a,b]$, *sama dengan 1 pada* $[b,c]$, *menurun pada* $[c,d]$, *dan sama dengan* 0 *untuk yang lainnya.*

Bilangan *fuzzy trapezoidal* ditunjukkan pada Gambar 1 dinotasikan dengan $\tilde{A} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ dengan $a^L \leq a^U$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, dan $a^L, a^U, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.



Gambar 1. Bilangan *Fuzzy Trapezoidal*

Definisi 3 [4] *Diberikan* $\tilde{A}=(a^L,a^U,\alpha,\beta)$ *sebuah bilangan fuzzy trapezoidal. Support himpunan* $\tilde{A}$ *adalah* $(a^L-\alpha, a^U+\beta)$ *dan core himpunan* $\tilde{A}$ *adalah* $\left[a^L, a^U\right]$.

Setiap bilangan *fuzzy* didefinisikan sesuai dengan fungsi keanggotaannya [5]. Diberikan $\tilde{a}=(a^L,a^U,\alpha,\beta)$ dan $\tilde{b}=(b^L,b^U,\gamma,\theta)$ dua bilangan *fuzzy trapezoidal*, operasi antara bilangan-bilangan *fuzzy trapezoidal* tersebut didefinisikan sebagai berikut:

1. Perkalian dengan skalar: untuk $x>0,\, x\in\mathbb{R};\; x\tilde{a}=(xa^L,xa^U,x\alpha,x\beta)$
   untuk $x<0,\, x\in\mathbb{R};\; x\tilde{a}=(xa^U,xa^L,-x\beta,-x\alpha)$
2. Pembagian dengan skalar: untuk $x>0,\, x\in\mathbb{R};\; \frac{\tilde{a}}{x}=\left(\frac{a^L}{x},\frac{a^U}{x},\frac{\alpha}{x},\frac{\beta}{x}\right)$
   untuk $x<0,\, x\in\mathbb{R};\; \frac{\tilde{a}}{x}=\left(\frac{a^U}{x},\frac{a^L}{x},\frac{\beta}{-x},\frac{\alpha}{-x}\right)$
3. Penjumlahan: $\tilde{a}+\tilde{b}=(a^L+b^L,a^U+b^U,\alpha+\gamma,\beta+\theta)$
4. Pengurangan: $\tilde{a}-\tilde{b}=(a^L-b^U,a^U-b^L,\alpha+\theta,\beta+\gamma)$
5. Negasi dari $\tilde{a}$: $-\tilde{a}=(-a^U,-a^L,\beta,\alpha)$. [4]

Fungsi ranking digunakan untuk mengurutkan bilangan *fuzzy trapezoidal* yang didasarkan pada perbandingan bilangan *fuzzy trapezoidal* [3]. Perbandingan bilangan *fuzzy trapezoidal* merupakan cara untuk mengurutkan unsur-unsur dari $F(\mathbb{R})$ dengan mendefinisikan fungsi ranking $\Re: F(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ yang memetakan setiap bilangan *fuzzy trapezoidal* ke dalam bilangan real dengan suatu relasi urutan.

Beberapa relasi urutan pada $F(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai berikut:

1. $\tilde{a}\underset{\Re}{\geq}\tilde{b}$ jika dan hanya jika $\Re(\tilde{a})\geq\Re(\tilde{b})$
2. $\tilde{a}\underset{\Re}{>}\tilde{b}$ jika dan hanya jika $\Re(\tilde{a})>\Re(\tilde{b})$
3. $\tilde{a}\underset{\Re}{=}\tilde{b}$ jika dan hanya jika $\Re(\tilde{a})=\Re(\tilde{b})$

dengan $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ di $F(\mathbb{R})$, $\Re$ adalah fungsi ranking dan simbol "$\underset{\Re}{\geq}$" merepresentasikan relasi urutan *fuzzy*. Berikut dijelaskan mengenai fungsi ranking linear yang digunakan dalam pemrograman linear *fuzzy*.

Definisi 4 [4] *Diberikan* $\tilde{a}=(a^L,a^U,\alpha,\beta)\in F(\mathbb{R})$. *Fungsi ranking* $\Re$ *adalah adalah fungsi yang memetakan setiap bilangan fuzzy trapezoidal ke bilangan real dan didefinisikan sebagai berikut*

$$\Re(\tilde{a})=\frac{1}{2}\left(a^L+a^U\right)+\frac{1}{4}(\beta-\alpha) \tag{1}$$

Fungsi ranking linear memenuhi sifat sebagai berikut:

1. $\Re(\tilde{a}+\hat{b})=\Re(\tilde{a})+\Re(\tilde{b})$ untuk setiap $\tilde{a},\tilde{b}\in F(\mathbb{R})$.
2. $\Re(k\tilde{a})=k\Re(\tilde{a})$ untuk setiap $\tilde{a}\in F(\mathbb{R})$ dan skalar $k\in\mathbb{R}$.

METODE SIMPLEKS UNTUK PERSOALAN FNLP

Ada beberapa hal dalam pemrograman linear yang keadaannya lebih cenderung ke suatu hal yang samar (*fuzzy*) dibandingkan dengan suatu hal yang jelas (*crisp*). Misalnya, dalam kehidupan nyata terdapat masalah pengalokasian sumber daya yang terbatas sehingga laba yang didapatkan oleh suatu perusahaan tersebut tidaklah pasti. Sehingga teori himpunan *fuzzy* dapat digunakan untuk mengatasi persoalan pemrograman linear *fuzzy* tersebut.

Persoalan pemrograman linear *fuzzy* dengan koefisien fungsi tujuan bilangan *fuzzy trapezoidal* atau yang disingkat FNLP (*Fuzzy Number Linear Programming*) didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\text{Maks. (atau Min.)} \quad \tilde{z} \underset{\Re}{=} \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}, \\ &\text{kendala} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ &\qquad\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{2}$$

dengan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T \in \left(F(\mathbb{R})\right)^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dan $\Re$ adalah fungsi ranking linear yang didefinisikan oleh Persamaan (1).

Definisi 5 $[3]$ *Sebarang* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *merupakan penyelesaian layak untuk Persamaan* (2) *jika* $\mathbf{x}$ *memenuhi kendala-kendala pada Persamaan* (2).

Diberikan Q_N adalah himpunan semua penyelesaian layak dari persoalan FNLP. Penyelesaian layak optimal untuk persoalan FNLP adalah $\mathbf{x}^* \in Q_N$ jika $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^* \underset{\Re}{\geq} \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}$ ($\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^* \underset{\Re}{\leq} \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}$) untuk setiap $\mathbf{x} \in Q_N$ pada persoalan maksimasi (minimasi). Dengan kata lain, setiap penyelesaian layak yang memaksimumkan (meminimumkan) fungsi tujuan disebut penyelesaian layak optimal.

Gagasan umum dari metode simpleks adalah memulai dari satu penyelesaian basis kemudian melanjutkan ke penyelesaian basis selanjutnya yang bertujuan memperbaiki optimalitas dengan mempertahankan kelayakan. Cara yang paling sederhana untuk memilih penyelesaian basis awal adalah menggunakan basis $\mathbf{B}$ yang merupakan matriks identitas $m \times m$ yang terdiri dari variabel *slack*, *surplus*, atau variabel buatan. Dengan cara ini, selanjutnya ditentukan dengan menukarkan satu vektor dalam $\mathbf{B}$ dengan satu vektor non basis dalam $\mathbf{N}_{m\times(n-m)}$ yang akan menggerakkan penyelesaian ke arah optimalitas.

Dimisalkan persoalan FNLP seperti pada Persamaan (2) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\text{Maks.} \quad \tilde{z} \underset{\Re}{=} \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x} \\ &\text{Kendala} \quad (\mathbf{N},\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{b}, \text{ dan } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Vektor $\mathbf{x}$ dipartisi menjadi $\mathbf{x}_N$ dan $\mathbf{x}_B$, di mana $\mathbf{x}_B$ bersesuaian dengan elemen-elemen dari $\mathbf{x}$ yang berkaitan dengan basis awal $\mathbf{B} = \mathbf{I}$. Kemudian $\tilde{\mathbf{c}}$ dipartisi menjadi $\tilde{\mathbf{c}}_N$ dan $\tilde{\mathbf{c}}_B$ yang bersesuaian dengan $\mathbf{x}_N$ dan $\mathbf{x}_B$. Jadi, persoalan FNLP standar dapat ditulis sebagai

$$\left[\begin{array}{c:c:c} 1 & -\tilde{\mathbf{c}}_N & -\tilde{\mathbf{c}}_B \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{B} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{aligned} &\text{Maks.} \quad \tilde{z} \underset{\Re}{=} \tilde{\mathbf{c}}_N\mathbf{x}_N + \tilde{\mathbf{c}}_B\mathbf{x}_B, \\ &\text{kendala} \quad \mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}, \\ &\qquad \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0} \text{ dan } \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3}$$

Tabel 1 Tabel Umum Simpleks FNLP

Basis	$\tilde{z}$	$\mathbf{x}_N$	$\mathbf{x}_B$	*RHS*
$\tilde{z}$	1	$\tilde{\mathbf{c}}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\tilde{\mathbf{c}}_N$	$\tilde{\mathbf{c}}_B\mathbf{B}^{-1}-\tilde{\mathbf{c}}_B$	$\tilde{\mathbf{c}}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Sebagai ilustrasi, dimisalkan Tabel 1 yang terdiri dari variabel *slack*. Dalam kasus ini $\tilde{\mathbf{c}}_B=\tilde{\mathbf{0}}$ dan $\mathbf{B}=\mathbf{I}$. Oleh karena $\mathbf{B}=\mathbf{I}$, $\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{I}$, maka tabel awal simpleks FNLP yang diperoleh dari Tabel 1 dengan substitusi langsung adalah sebagai berikut:

Tabel 2 Tabel Awal Simpleks FNLP

Basis	$\tilde{z}$	$\mathbf{x}_N$	$\mathbf{x}_B$	*RHS*
$\tilde{z}$	1	$-\tilde{\mathbf{c}}_N$	$\tilde{\mathbf{0}}$	$\tilde{0}$
$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{b}$

Berikut adalah langkah utama metode simpleks untuk persoalan FNLP:
Diasumsikan penyelesaian layak basis dengan basis $\mathbf{B}$ dan tabel simpleks yang sesuai sudah diketahui. Langkah-langkah metode simpleks untuk persoalan FNLP adalah sebagai berikut:

1. Penentuan variabel masuk $\mathbf{P}_j$. Untuk setiap vektor non basis $\mathbf{P}_j$, dihitung $\tilde{z}_j-\tilde{c}_j \underset{\Re}{=} \tilde{\mathbf{c}}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j-\tilde{c}_j$.
   Untuk persoalan maksimasi (minimasi), vektor masuk $\mathbf{P}_j$ dipilih yang memiliki $\tilde{z}_j-\tilde{c}_j$ negatif (positif) terbesar (tentukan secara sebarang jika terdapat lebih dari satu yang sama). Kemudian jika semua $\tilde{z}_j-\tilde{c}_j \underset{\Re}{\geq} \tilde{0}$ ($\underset{\Re}{\leq} \tilde{0}$) maka penyelesaian optimal telah dicapai dan diketahui $\mathbf{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ dan $\tilde{z} \underset{\Re}{=} \tilde{\mathbf{c}}_B\mathbf{x}_B=\tilde{\mathbf{c}}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. Namun jika terdapat $\tilde{z}_j-\tilde{c}_j \underset{\Re}{<} \tilde{0}$ ($\underset{\Re}{>} \tilde{0}$) maka dilanjutkan ke langkah 2.
2. Penentuan variabel keluar $\mathbf{P}_r$. Setelah diketahui vektor masuk $\mathbf{P}_j$, dihitung:
   a. Nilai variabel basis saat ini, yaitu $\mathbf{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.
   b. Koefisien kendala dari variabel masuk, yaitu $\boldsymbol{\alpha}^j=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$.

   Variabel keluar $\mathbf{P}_r$ (baik untuk persoalan maksimasi atau minimasi) harus berkaitan dengan rasio $\theta=\min_k\left\{\dfrac{\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\right)_k}{\alpha_k^j}, \alpha_k^j>0\right\}$ di mana $\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\right)_k$ dan α_k^j adalah elemen ke-k dari $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ dan $\boldsymbol{\alpha}^j$. Jika semua $\alpha_k^j\leq 0$, persoalan tersebut tidak memiliki penyelesaian yang terbatas. Namun jika terdapat $\alpha_k^j>0$ maka dapat ditentukan variable keluar dan dilanjutkan ke langkah 3.
3. Penentuan basis baru dengan menggunakan *eliminasi Gauss-Jordan*. Metode ini dimulai dengan mengidentifikasi kolom di bawah variabel masuk sebagai **kolom masuk**. Baris yang berkaitan dengan variabel keluar dapat dinyatakan sebagai **persamaan pivot** seperti pada Persamaan (3) dan elemen di titik potong antara kolom masuk dan persamaan pivot dinyatakan sebagai **elemen pivot**. Metode *eliminasi Gauss-Jordan* menentukan basis baru dengan penggunaan dua jenis perhitungan, yaitu:
   a. Persamaan pivot:
      Persamaan pivot baru = persamaan pivot lama $\div$ elemen pivot.
   b. Semua persamaan lainnya, termasuk $\tilde{z}$:
      Persamaan baru = persamaan lama – (koefisien kolom masuk $\times$ persamaan pivot baru).
4. Kembali ke langkah 1.

Contoh Soal. Sebuah perusahaan makanan memproduksi 2 jenis produk yang berbeda yaitu kue sus kering dan kue kuping gajah yang masing-masing membutuhkan 3 jenis bahan baku, yaitu terigu, telur ayam, dan gula pasir. Produk tersebut dikerjakan melalui 2 proses pengerjaan manual, yaitu Proses I dan Proses II. Setiap kg kue sus kering membutuhkan 1 kg terigu, 0,6 kg telur ayam, dan 1,2 kg gula pasir. Setiap kg kuping gajah membutuhkan 0,8 kg terigu, 1 kg telur ayam, dan 0,9 kg gula pasir. Akibat keterbatasan gudang bahan baku dan dana yang ada, bahan baku yang disediakan tiap minggu adalah 120 kg terigu, 90 kg telur ayam, dan 125 kg gula pasir.

Kue sus kering membutuhkan waktu 4 jam pada Proses I dan 2 jam pada Proses II. Kue kuping gajah membutuhkan waktu 3 jam pada Proses I dan 4 jam pada Proses II. Jumlah karyawan pada Proses I sebanyak 10 orang, sedangkan pada Proses II sebanyak 12 orang. Perusahaan bekerja dengan 1 shift, mulai pukul 08.00 sampai pukul 16.00 dengan istirahat selama 1 jam mulai pukul 12.00 hingga 13.00, selama 6 hari kerja dalam 1 minggu.

Keuntungan per kg untuk kue sus kering sebesar Rp 50.000,00 sampai Rp 55.000,00 dan untuk kue kuping gajah sebesar Rp 60.000,00 sampai Rp 65.000,00. Keuntungan per kg kedua produk tersebut seringkali berubah sesuai dengan kondisi pasar. Ketika order produk tersebut banyak berdatangan ke perusahaan dan dituntut untuk segera memenuhinya, maka keuntungan per kg untuk kue sus kering bisa bertambah tetapi tidak pernah mencapai Rp 66.000,00 dan untuk kue kuping gajah juga bisa bertambah tetapi tidak pernah mencapai Rp 81.000,00. Akan tetapi ketika produk tersebut sulit untuk terjual dan terkadang konsumen meminta diskon, maka keuntungan per kg untuk kue sus kering bisa berkurang tetapi tidak pernah mencapai Rp 44.000,00 dan untuk kue kuping gajah juga bisa berkurang tetapi tidak pernah mencapai Rp 54.000,00.

Berdasarkan kondisi tersebut, berapakah keuntungan maksimum yang bisa didapat oleh perusahaan?

Penyelesaian:

Pada penyelesaian kasus ini, selanjutnya bahan baku dinyatakan dalam kg. Jam kerja karyawan per minggu dapat dihitung:

Proses I: $10 \times 7 \times 6 = 420$ jam

Proses II: $12 \times 7 \times 6 = 504$ jam.

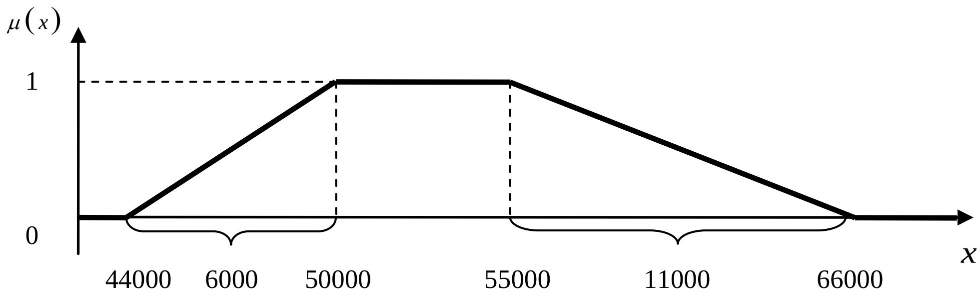
Kasus ini dapat ditabulasikan sebagai berikut:

Tabel 3 Persoalan pada Perusahaan Makanan

Bahan Baku	**Produk**		**Kapasitas**
	I Kue Sus Kering	**II Kue Kuping Gajah**	
Terigu (kg)	1	0,8	120
Telur Ayam (kg)	0,6	1	90
Gula Pasir (kg)	1,2	0,9	125
Proses I (jam)	4	3	420
Proses II (jam)	2	4	504
Keuntungan per kg (Rp)	50000-55000	60000-65000	
Keuntungan maks per kg (Rp)	< 66000	< 81000	
Keuntungan min per kg (Rp)	> 44000	> 54000	

Keuntungan untuk kedua produk tersebut dapat dibentuk ke dalam bilangan *fuzzy trapezoidal* sebagai berikut:

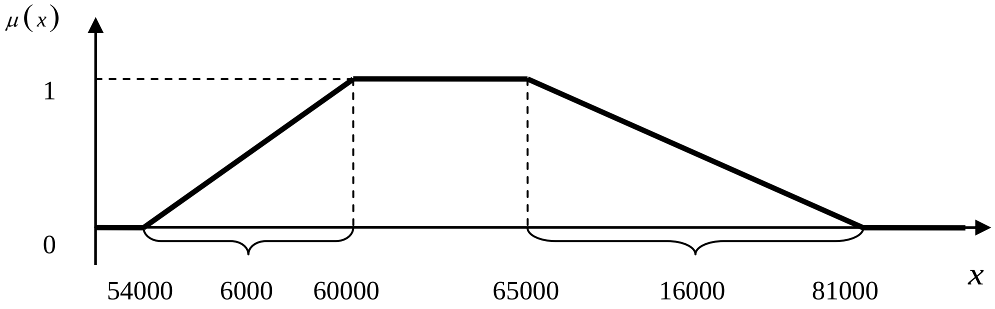
Produk I (Kue Sus Kering):



Gambar 2. Bilangan *Fuzzy Trapezoidal* untuk Keuntungan Produk I

Keuntungan per kg untuk Produk I (kue sus kering) dalam bilangan *fuzzy trapezoidal* yaitu $(50000, 55000, 6000, 11000)$ atau dapat ditulis menjadi $(50, 55, 6, 11)$ dalam ribuan rupiah.

Produk II (Kue Kuping Gajah):



Gambar 3. Bilangan *Fuzzy Trapezoidal* untuk Keuntungan Produk II

Keuntungan per kg untuk Produk II (kue kuping gajah) dalam bilangan *fuzzy trapezoidal* yaitu $(60000, 65000, 6000, 16000)$ atau dapat ditulis menjadi $(60, 65, 6, 16)$ dalam ribuan rupiah.

Variabel keputusan: x_1 = jumlah Produk I (kue sus kering) yang dibuat dalam kg.

x_2 = jumlah Produk II (kue kuping gajah) yang dibuat dalam kg.

Kasus tersebut dapat diformulasikan sebagai berikut:

Maksimumkan: $\tilde{z} \underset{\mathfrak{R}}{=} (50, 55, 6, 11)\, x_1 + (60, 65, 6, 16)\, x_2$

dengan kendala $x_1 + 0,8x_2 \leq 120$,

$0,6x_1 + x_2 \leq 90$,

$1,2x_1 + 0,9x_2 \leq 125$,

$4x_1 + 3x_2 \leq 420$,

$2x_1 + 4x_2 \leq 504$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

Kemudian diubah ke bentuk kanonik sebagai berikut:

Maks. $\tilde{z}-\left(50,55,6,11\right)x_1-\left(60,65,6,16\right)x_2+\tilde{0}S_1+\tilde{0}S_2+\tilde{0}S_3+\tilde{0}S_4+\tilde{0}S_5 \underset{\Re}{=} \tilde{0}$

$\Leftrightarrow \tilde{z}+\left(-55,-50,11,6\right)x_1+\left(-65,-60,16,6\right)x_2+\tilde{0}S_1+\tilde{0}S_2+\tilde{0}S_3+\tilde{0}S_4+\tilde{0}S_5 \underset{\Re}{=} \tilde{0}$

dengan kendala $x_1+0,8x_2+S_1=120$,
$0,6x_1+x_2+S_2=90$,
$1,2x_1+0,9x_2+S_3=125$,
$4x_1+3x_2+S_4=420$,
$2x_1+4x_2+S_5=504$,
$x_1,x_2,S_1,S_2,S_3,S_4,S_5\geq 0$.

Tabel 4 Tabel Simpleks untuk Solusi Awal

VB	$\tilde{z}$	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	*RHS*	$\Re\left(RHS\right)$	Rasio
$\tilde{z}$	1	$\left(-55,-50,11,6\right)$	$\left(-65,-60,16,6\right)$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	0	
S_1	0	1	0,8	1	0	0	0	0	120		$\frac{120}{0,8}=150$
S_2	0	0,6	1*	0	1	0	0	0	90		$\frac{90}{1}=90$
S_3	0	1,2	0,9	0	0	1	0	0	125		$\frac{125}{0,9}=138,8$
S_4	0	4	3	0	0	0	1	0	420		$\frac{420}{3}=140$
S_5	0	2	4	0	0	0	0	1	504		$\frac{504}{4}=126$

Untuk setiap vektor non basis, ditentukan variabel masuk dengan menghitung $\tilde{z}_j-\tilde{c}_j$ yang paling negatif.

$\Re\left(-55,-50,11,6\right)=\frac{1}{2}\left(-55-50\right)+\frac{1}{4}\left(6-11\right)=-52,5-1,25=-53,75$.

$\Re\left(-65,-60,16,6\right)=\frac{1}{2}\left(-65-60\right)+\frac{1}{4}\left(6-16\right)=-62,5-2,5=-65$.

Sehingga yang menjadi variabel masuk adalah x_2.

Untuk penentuan variabel dikeluar, dipilih variabel basis yang memiliki rasio positif terkecil. Sehingga variabel basis S_2 menjadi variabel keluar dengan nilai rasio 90. Untuk penentuan basis baru, kolom di bawah variabel masuk x_2 ditentukan sebagai **kolom masuk**. Baris yang berkaitan dengan variabel keluar S_2 dapat dinyatakan sebagai **persamaan pivot.** Elemen di titik potong antara kolom masuk dan persamaan pivot yaitu 1 dinyatakan sebagai **elemen pivot**, seperti yang terlihat pada Tabel 4 dengan tanda * .

Berikut adalah perhitungan untuk menentukan basis baru dengan metode *eliminasi Gauss-Jordan* lalu kemudian mengisi tabel simpleks untuk solusi yang baru:

1. Dihitung persamaan pivot dengan rumus:
   Persamaan pivot baru = persamaan pivot lama $\div$ elemen pivotnya yaitu.
2. Dihitung semua persamaan lainnya, termasuk $\tilde{z}$ dengan rumus:
   Persamaan baru = persamaan lama – (koefisien kolom masuk $\times$ persamaan pivot baru).

Tabel 5 Tabel Simpleks untuk Solusi Baru

VD	$\tilde{z}$	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	*RHS*	$\Re(RHS)$	Indeks
$\tilde{z}$	1	$\left(-19,-11,\frac{73}{5},\frac{78}{5}\right)$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$(60,65,6,16)$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$(5400,5850,540,1440)$		
S_1	0	$\frac{13}{25}$	0	1	$-\frac{8}{10}$	0	0	0	48		92,31
x_2	0	$\frac{6}{10}$	1	0	1	0	0	0	90		150
S_3	0	$\frac{33}{50}$ *	0	0	$-\frac{9}{10}$	1	0	0	44		66,67
S_4	0	$\frac{11}{5}$	0	0	-3	0	1	0	150		68,18
S_5	0	$-\frac{2}{5}$	0	0	-4	0	0	1	144		-360

Selanjutnya dengan cara yang sama disusun tabel-tabel simpleks untuk iterasi selanjutnya hingga optimal. Sehingga didapatlah tabel simpleks yang telah optimal sebagai berikut:

Tabel 6 Tabel Simpleks untuk Solusi Akhir

VD	$\tilde{z}$	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	*RHS*	$\Re(RHS)$
$\tilde{z}$	1	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\left(15.\frac{285}{11},\frac{234}{11},\frac{219}{11}\right)$	$\left(\frac{50}{3},\frac{950}{33},\frac{260}{11},\frac{730}{33}\right)$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\left(\frac{18400}{3},\frac{21350}{3},1580,\frac{7240}{3}\right)$	6833,33
S_1	0	0	0	1	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{26}{33}$	0	0	$\frac{40}{3}$	
x_2	0	0	1	0	$\frac{20}{11}$	$-\frac{10}{11}$	0	0	50	
x_1	0	1	0	0	$-\frac{15}{11}$	$\frac{50}{33}$	0	0	$\frac{200}{3}$	
S_4	0	0	0	0	0	$-\frac{10}{3}$	1	0	$\frac{10}{3}$	
S_5	0	0	0	0	$-\frac{50}{11}$	$\frac{20}{33}$	0	1	$\frac{512}{3}$	

$$\Re\left(\frac{18400}{3},\frac{21350}{3},1580,\frac{7240}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{18400}{3}+\frac{21350}{3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{7240}{3}-1580\right)=6833,333$$

Oleh karena nilai $\tilde{z}_j - \tilde{c}_j \underset{\Re}{\geq} \tilde{0}$, maka penyelesaian optimal telah dicapai.

Sehingga penyelesaian optimal dari persoalan yaitu

$\tilde{z} = \left({}^{18400}\!/_{3}, {}^{21350}\!/_{3}, 1580, {}^{7240}\!/_{3} \right)$; $\Re(\tilde{z}) = 6833,333$ dengan $x_1 = {}^{200}\!/_{3} = 66,67$ dan $x_2 = 50$.

PENUTUP

Dari penelitian ini dapat disimpulkan bahwa:

1. Bilangan *fuzzy trapezoidal* dinotasikan dengan $\tilde{A} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ dengan $a^L \leq a^U$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, dan $a^L, a^U, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan grafik fungsi keanggotaannya merupakan representasi kurva trapesium.
2. Model persoalan pemrograman linear dengan koefisien fungsi tujuan bilangan *fuzzy trapezoidal* dapat diselesaikan dengan metode simpleks yang dimulai dengan memodelkan persoalan optimasi ke dalam bentuk kanonik pemrograman linear. Nilai koefisien fungsi tujuan diubah menjadi bentuk bilangan *fuzzy trapezoidal*. Apabila telah tersusun dalam bentuk kanonik, maka disusun tabel awal simpleks. Tabel awal simpleks tersebut diuji keoptimalannya. Apabila belum optimal, maka tabel harus diperbaiki dengan mencari variabel masuk dan keluar. Selanjutnya ditentukan basis baru dengan metode *eliminasi Gauss-Jordan*. Kemudian disusun kembali tabel simpleks yang baru dan diuji kembali keoptimalannya. Jika sudah optimal, maka diperiksa kembali apakah tabel tersebut memiliki variabel buatan positif atau tidak. Jika memiliki, maka persoalan menjadi tidak layak. Namun jika sebaliknya, maka penyelesaian persoalan telah selesai. Sebagai hasil akhir, nilai optimal pada fungsi tujuan yang berupa bilangan *fuzzy trapezoidal* diurutkan menggunakan fungsi ranking linear yang memetakan setiap bilangan *fuzzy trapezoidal* ke dalam bilangan real.
3. Pada penyelesaian contoh soal, keuntungan perusahaan yang tidak pasti merupakan bilangan *fuzzy trapezoidal* yaitu $(50, 55, 6, 11)$ dalam ribuan rupiah untuk kue sus kering dan $(60, 65, 6, 16)$ dalam ribuan rupiah untuk kue kuping gajah. Sehingga dengan pengoptimalan produksi kue sus kering sebanyak 66,67 kg dan kue kuping gajah sebanyak 50 kg, maka keuntungan maksimum yang bisa didapat oleh perusahaan adalah sebesar $\left({}^{18400}\!/_{3}, {}^{21350}\!/_{3}, 1580, {}^{7240}\!/_{3} \right)$ dalam ribuan rupiah atau senilai Rp 6.833.333,00.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Setiadji. *Himpunan & Logika Samar serta Aplikasinya*; Ed ke-1. Yogyakarta: Graha Ilmu; 2009.

[2]. Klir GJ dan Bo Yuan. *Fuzzy Set and Fuzzy Logic (Theory and Applications)*. Toronto: Asimon & Schuster Company; 1995.

[3]. Mahdavi N, Amiri, Nasseri SH, dan Yazdani A. Fuzzy Primal Simplex Algorithms for Solving Fuzzy Linear Programming Problems. *Iranian Journal ofOperations Research*. 2009; 1:68-84.

[4]. Mahdavi N, Amiri, Nasseri SH. Duality Results and a Dual Simplex Method for Linear Programming Problems with Trapezoidal Fuzzy Variables. *Fuzzy Sets and Systems*. 2007; 158:1961-1978.

[5]. Kusumadewi S dan Purnomo H. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*; Ed ke-2. Yogyakarta: Graha Ilmu; 2010.

PAULA ARISTA : Jurusan Matematika, FMIPA Untan, Pontianak, paula_arista@yahoo.com

BAYU PRIHANDONO : Jurusan Matematika, FMIPA Untan, Pontianak, beiprihandono@gmail.com

NILAMSARI KUSUMASTUTI : Jurusan Matematika, FMIPA Untan, Pontianak, uminilam@yahoo.com