Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 03, No. 2(2014), hal 107 – 116.

METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL NON LINEAR

Apriadi, Bayu Prihandono, Evi Noviani

INTISARI

Metode Adams-Bashforth-Moulton merupakan cara mencari solusi numerik pada titik tertentu dari suatu persamaan diferensial non linear dengan nilai awal yang telah diketahui. Persamaan diferensial tersebut terlebih dahulu diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk memperoleh empat solusi awal yang kemudian disubstitusikan ke persamaan prediktor Adams-Bashforth orde empat. Selanjutnya nilai prediksi tersebut diperbaiki menggunakan persamaan korektor Adams-Moulton orde empat. Metode Adams-Moulton dapat diselesaikan secara iterasi. Iterasi dihentikan apabila galat relatif kurang dari kriteria pemberhentian. Agar jumlah iterasi pada korektor Adams-Moulton dapat berkurang, maka diperlukan analisis pemilihan ukuran langkah h. Dalam menganalisis kriteria pemilihan ukuran langkah h, terlebih dahulu ditentukan galat relatif ε *terhadap iterasi sebelumnya. Jika galat relatifnya berada dalam interval* (ε_1, ε_2), *dengan* ε_1 *dan* ε_2 *merupakan kriteria pemilihan ukuran langkah h, maka h telah optimal dan untuk langkah berikutnya digunakan nilai h yang sama dengan langkah sebelumnya. Jika galat relatif tidak memenuhi kriteria pemilihan ukuran langkah h, maka ukuran langkah h diubah dan kembali dihitung empat solusi awal menggunakan metode Runge-Kutta orde empat hingga diperoleh ukuran langkah h yang optimal. Metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat dapat digunakan untuk mencari solusi numerik dari persamaan bandul sederhana dengan ukuran langkah* $h=0{,}1$ *dan sudut awal* 60^o *yang dibentuk oleh tali bandul dengan garis vertikal. Solusi numerik persamaan bandul sederhana pada saat* $t=1$ *detik dengan ukuran langkah optimal* $h=0{,}05$ *adalah* $39{,}21921867^o$.

Kata Kunci : *Metode Adams-Bashforth dan Metode Adams-Moulton*

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial banyak ditemukan dalam berbagai bidang, sebagai contoh dalam bidang teknik, kedokteran, ekonomi, dan matematika. Motivasi munculnya persamaan diferensial secara umum berhubungan dengan kecepatan perubahan suatu variabel terhadap variabel lainnya. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang tidak diketahui. Persamaan diferensial biasa terbagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa linear dan non linear. Gabungan dari beberapa persamaan diferensial disebut sistem persamaan diferensial [1].

Persamaan diferensial non linear sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Persamaan bandul sederhana yang dibahas pada penelitian ini merupakan salah satu contoh persamaan diferensial non linear. Persamaan diferensial biasa non linear adalah persamaan diferensial biasa yang memuat variabel terikat dan turunan-turunannya yang berderajat lebih dari satu, terdapat perkalian antara variabel terikat dengan turunannya, serta variabel terikat yang dapat diubah ke dalam deret Taylor (misalkan sin y). Suatu persamaan diferensial dapat diselesaikan secara analitik atau secara numerik. Sebagian besar persamaan diferensial non linear sulit ditemukan solusinya secara analitik, sehingga penyelesaian secara numerik dapat digunakan untuk memperoleh solusi persamaan diferensial non linear tersebut. Solusi yang diperoleh dari metode numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan dari solusi analitiknya, sehingga solusi numerik tersebut memuat nilai kesalahan.

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat diselesaikan dengan operasi perhitungan atau aritmetika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi) [2]. Metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah sistem persamaan yang besar, persamaan-persamaan non linear, masalah geometri yang rumit serta suatu persamaan yang sangat kompleks yang sulit untuk diselesaikan secara analitik. Metode numerik dalam penyelesaian persamaan diferensial biasa terbagi atas dua metode, yaitu metode *one-step* dan metode *multi-step*.

Dalam memperoleh solusi menggunakan metode *one-step*, dibutuhkan sebuah nilai awal. Sedangkan dalam metode *multi-step* dibutuhkan beberapa solusi awal yang dapat diperoleh dari metode *one-step*. Metode *multi-step* biasa disebut sebagai metode prediktor-korektor karena dalam penyelesaiannya digunakan persamaan prediktor dan persamaan korektor, salah satu metode *multi-step* adalah metode Adams-Bashforth-Moulton. Metode Adams-Bashforth-Moulton dapat digunakan tanpa harus mencari turunan-turunan fungsinya terlebih dahulu, melainkan langsung menggunakan persamaan prediktor-korektor. Hal ini dikarenakan turunan suatu fungsi tidak dapat diperoleh menggunakan metode numerik. Galat pemotongan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat lebih kecil daripada galat pemotongan metode Adams-Bashforth-Moulton untuk orde dua dan tiga. Oleh karena itu penulis tertarik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial biasa non linear orde satu. Metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat memberikan solusi yang cukup akurat dalam penyelesaian masalah nilai awal persamaan diferensial biasa non linear [3].

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah mengkaji metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat dalam menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial biasa non linear orde satu serta menganalisis pemilihan ukuran langkah h yang optimal dalam menyelesaikan masalah nilai awal menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat. Analisis pemilihan ukuran langkah h bertujuan agar iterasi pada persamaan korektor Adams-Moulton dilakukan sedikit mungkin.

Diberikan masalah nilai awal persamaan diferensial non linear orde satu dengan nilai awal dan ukuran langkah h yang telah diketahui. Jika diberikan persamaan diferensial non linear orde n, maka persamaan diferensial tersebut harus direduksi menjadi sistem persamaan diferensial orde satu yang terdiri dari n buah persamaan. Persamaan diferensial non linear terlebih dahulu diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat, sehingga diperoleh empat buah solusi awal. Kemudian empat solusi awal yang diperoleh disubstitusikan ke persamaan prediktor Adams-Bashforth orde empat. Selanjutnya nilai prediksi tersebut diperbaiki menggunakan persamaan korektor Adams-Moulton orde empat. Persamaan Adams-Moulton dapat diselesaikan secara iterasi. Iterasi dihentikan apabila galat relatif telah memenuhi kriteria pemberhentian tertentu. Jika iterasi yang dilakukan dalam jumlah yang besar, maka lebih baik ukuran langkah h diperkecil atau diperbesar. Setelah diperoleh ukuran langkah h yang baru, kemudian dihitung kembali empat solusi awal menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Pengendalian ukuran langkah h dilakukan agar iterasi pada metode Adams-Moulton dapat dilakukan sedikit mungkin sehingga diperoleh solusi pendekatan secara numerik dari suatu persamaan diferensial non linear.

METODE RUNGE-KUTTA

Metode Runge-Kutta merupakan metode *one-step*, karena dalam penggunaannya hanya dibutuhkan sebuah nilai awal. Metode Runge-Kutta orde empat dapat digunakan sebagai metode pendahuluan untuk mendapatkan nilai-nilai awal yang dibutuhkan pada metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat. Metode Runge-Kutta orde empat yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial $y' = f(x,y)$ dengan nilai awal $y(x_0) = y_0$, adalah sebagai berikut [4]:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

dengan $$k_1 = hf\left(x_n, y_n\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right),\ k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right),\ k_4 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right)$$

untuk $n = 0,1,2$.

METODE ADAMS-BASHFORTH

Penyelesaian persamaan diferensial biasa dengan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton adalah proses mencari nilai fungsi $y(x)$ pada titik x tertentu dari persamaan diferensial biasa non linear orde satu $y' = f(x, y)$ dan nilai awal $y(x_0) = y_0$ yang diketahui dengan melakukan prediksi dengan persamaan prediktor dan melakukan koreksi dengan persamaan korektor [4]. Nilai-nilai awal yang dibutuhkan pada metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat dapat diperoleh dari metode satu langkah (*one-step method*). Untuk mendapatkan kombinasi hasil yang baik, metode Runge-Kutta orde empat dapat digunakan bersama metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat [5].

Diberikan persamaan diferensial non linear orde satu dengan nilai awal $y(x_0) = y_0$ sebagai berikut,

$$y' = f\left(x, y\left(x\right)\right). \tag{1}$$

Persamaan (1) diintegralkan dari x_n sampai $x_{n+1} = x_n + h$ untuk mendapatkan solusi y_{n+1} pada titik x_{n+1}, sehingga diperoleh

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dy}{dx} dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\left(x, y\left(x\right)\right) dx$$

$$y\left(x\right)\Big|_{x_n}^{x_{n+1}} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\left(x, y\left(x\right)\right) dx$$

$$y\left(x_{n+1}\right) - y\left(x_n\right) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\left(x, y\left(x\right)\right) dx$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\left(x, y\left(x\right)\right) dx.$$

Apabila $f\left(x, y\left(x\right)\right)$ merupakan persamaan yang kompleks yang tidak dapat diintegralkan, maka $f\left(x, y\left(x\right)\right)$ diganti dengan polinomial interpolasi $p(x)$ agar dapat diintegralkan lebih jauh lagi

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p\left(x\right) dx. \tag{2}$$

Interpolasi selisih mundur Newton berderajat tiga dipilih untuk mendapatkan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat. Rumus interpolasi selisih mundur Newton berderajat tiga dapat dituliskan sebagai berikut [6]:

$$p_3\left(x\right) = f_n + r\nabla f_n + \frac{1}{2} r\left(r+1\right)\nabla^2 f_n + \frac{1}{6} r\left(r+1\right)\left(r+2\right)\nabla^3 f_n$$

dengan $r = \dfrac{x - x_n}{h}$, kemudian polinomial $p_3\left(x\right)$ diintegralkan dari x_n sampai $x_{n+1} = x_n + h$. Jika $x = x_n$ dan $x = x_{n+1}$ masing-masing disubstitusikan ke dalam persamaan $r = \dfrac{x - x_n}{h}$ maka berturut-turut akan diperoleh r = 0 dan r = 1. Dikarenakan $x = x_n + hr$ dan jika x diturunkan terhadap variabel r, maka diperoleh $dx = h \cdot dr$. Sehingga didapat,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} p_3(x)\,dx = h\int_0^1 p_3(x)dr = h\left(f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \frac{3}{8}\nabla^3 f_n \right). \tag{3}$$

Didefinisikan bahwa $\nabla^k f_j = \nabla^{k-1} f_j - \nabla^{k-1} f_{j-1}$, oleh karena itu diperoleh [6]:

$$\begin{aligned} \nabla f_n &= f_n - f_{n-1} \\ \nabla^2 f_n &= \nabla f_n - \nabla f_{n-1} = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} \\ \nabla^3 f_n &= \nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n-1} = f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}. \end{aligned} \tag{4}$$

Apabila persamaan (4) disubstitusikan ke persamaan (3), maka akan diperoleh metode Adams-Bashforth orde empat dengan rumus sebagai berikut,

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{h}{24}\left(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right). \tag{5}$$

Rumus galat pemotongan untuk metode Adams-Bashforth orde empat adalah sebagai berikut [3]:

$$E_{AB} = \frac{251}{720} h^5 y^v(\xi) \tag{6}$$

dengan y^v adalah turunan kelima dari *y*, dan E_{AB} adalah galat pada titik ξ.

METODE ADAMS-MOULTON

Sebelumnya pada metode Adams-Bashforth digunakan interpolasi selisih mundur Newton derajat tiga yang menginterpolasi $f(x, y(x))$ pada titik $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}$. Metode Adams-Moulton orde empat dapat diperoleh jika polinomial $p(x)$ pada persamaan (2) merupakan polinomial interpolasi selisih mundur Newton berderajat tiga yang menginterpolasi $f(x, y(x))$ di titik $x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}$ yang dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\overline{p}_3(x) = f_{n+1} + r\nabla f_{n+1} + \frac{1}{2} r(r+1)\nabla^2 f_{n+1} + \frac{1}{6} r(r+1)(r+2)\nabla^3 f_{n+1}$$

dengan $r = \dfrac{x - x_{n+1}}{h}$. Sekarang polinomial $\overline{p}_3(x)$ diintegralkan terhadap variabel *x* dari titik x_n sampai titik $x_{n+1} = x_n + h$, hal ini bersesuaian dengan pengintegralan $\overline{p}_3(x)$ terhadap variabel *r* dari -1 sampai 0

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \overline{p}_3(x)\,dx = h\int_{-1}^{0} \overline{p}_3(x)\,dr = h\left(f_{n+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{n+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{n+1} \right). \tag{7}$$

Kemudian ditinjau kembali persamaan $\nabla^k f_j = \nabla^{k-1} f_j - \nabla^{k-1} f_{j-1}$ untuk $k = 1, 2, 3$ dan hasilnya disubstitusikan ke persamaan (7) maka diperoleh metode Adams-Moulton orde empat dengan rumus sebagai berikut:

$$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{24}\left(9 f_{n+1}^{(k-1)} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right) \tag{8}$$

dengan $k = 1, 2, 3, \ldots$ yang menunjukkan bahwa persamaan (8) dapat diselesaikan secara iterasi. Untuk menggunakan persamaan (8), diperlukan nilai prediksi y_{n+1} yang merupakan hasil dari penggunaan persamaan (5). Galat pemotongan untuk metode Adams-Moulton orde empat adalah

$$E_{AM} = -\frac{19}{720} h^5 y^v(\xi) \tag{9}$$

dengan y^v adalah turunan kelima dari *y*, dan E_{AM} adalah galat pada titik ξ.

PENGENDALIAN UKURAN LANGKAH *h*

Dalam menyelidiki prosedur pengendalian ukuran langkah *h*, terlebih dahulu ditinjau galat pemotongan (6) untuk metode Adams-Bashforth dan galat pemotongan (9) untuk metode Adams-Moulton berorde empat. Diketahui $y_{n+1}^{(0)}$ adalah nilai prediksi y_{n+1} yang diperoleh dari persamaan (5) dan $y_{n+1}^{(1)}$ hasil yang diperoleh dari iterasi pertama persamaan (8). Jika $y(x_{n+1})$ merupakan nilai eksak dari *y* pada x_{n+1}, maka dari persamaan (6) dan (9) diperoleh perkiraan kesalahan [5]:

$$y\left(x_{n+1}\right)-y_{n+1}^{(0)}=\frac{251}{720}h^5y^v\left(\xi\right) \tag{10}$$

$$y\left(x_{n+1}\right)-y_{n+1}^{(1)}=-\frac{19}{720}h^5y^v\left(\xi\right). \tag{11}$$

Selanjutnya persamaan (10) dan persamaan (11) tersebut dieliminasi sehingga diperoleh hasil sebagai berikut,

$$h^5y^v=\frac{720}{270}\left(y_{n+1}^{(1)}-y_{n+1}^{(0)}\right).$$

Kemudian disubstitusikan ke persamaan (11), sehingga diperoleh galat antara solusi numerik dan solusi analitik dari metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, yaitu

$$y\left(x_{n+1}\right)-y_{n+1}^{(1)}=-\frac{19}{270}\left(y_{n+1}^{(1)}-y_{n+1}^{(0)}\right)=\frac{19}{270}\left|y_{n+1}^{(1)}-y_{n+1}^{(0)}\right|. \tag{12}$$

Persamaan (8) dapat diselesaikan secara iterasi, iterasi dihentikan apabila galat relatif kurang dari kriteria pemberhentian tertentu. Jika ukuran langkah *h* yang dipilih sudah tepat, maka solusi numerik akan diperoleh dengan jumlah iterasi yang sedikit. Lebih baik ukuran langkah *h* diperkecil atau diperbesar daripada melakukan iterasi dalam jumlah yang banyak. Persamaan (12) dapat digunakan untuk melakukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah *h* [7].

ALGORITMA METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON

Algoritma penyelesaian persamaan diferensial biasa non linear menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat adalah sebagai berikut:

1. Diberikan masalah nilai awal persamaan diferensial non linear,

$$y'=\frac{dy}{dx}=f\left(x,y\right),\ \text{dengan nilai awal}\ y\left(x_0\right)=y_0,$$

   dengan ukuran langkah *h* yang tetap dan $x_{n+1}=x_n+h$.

2. Dihitung empat solusi awal y_0, y_1, y_2, dan y_3 menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.
3. Tentukan nilai-nilai f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, dan f_{n-3} dengan $n=3,4,\ldots$ sebagai berikut:

$$f_{n-3}=f_0=f\left(x_0,y_0\right)$$
$$f_{n-2}=f_1=f\left(x_1,y_1\right)$$
$$f_{n-1}=f_2=f\left(x_2,y_2\right)$$
$$f_n=f_3=f\left(x_3,y_3\right)$$

4. Tentukan solusi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth orde empat:

$$y_{n+1}^{(0)}=y_n+\frac{h}{24}\left(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3}\right)$$

5. Hitung $f_{n+1}^{(0)}=f\left(x_{n+1},y_{n+1}^{(0)}\right)$ dan disubstitusikan pada metode Adams-Moulton.

6. Hitung solusi numerik menggunakan metode Adams-Moulton orde empat, yaitu
$$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{24}\left(9f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k-1)}\right) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$
7. Korektor Adams-Moulton diiterasikan pada *k* sampai memenuhi,
$$\frac{\left|y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}^{(k-1)}\right|}{\left|y_{n+1}^{(k)}\right|} < \varepsilon$$
untuk $k = 1, 2, 3, \ldots$ dan ε adalah kriteria pemberhentian yang dikehendaki, misal $\varepsilon = 8\times 10^{-8}$.
8. Jika kriteria pemberhentian tidak dipenuhi, maka dilakukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah *h* sebagai berikut :

   Jika $10^{-10} < \frac{19}{270}\cdot\frac{\left|y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}\right|}{\left|y_{n+1}^{(1)}\right|} < 10^{-8}$, maka langkah berikutnya digunakan nilai *h* yang sama.

   Jika $\frac{19}{270}\cdot\frac{\left|y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}\right|}{\left|y_{n+1}^{(1)}\right|} > 10^{-8}$, maka *h* diganti dengan $\frac{h}{2}$ dan kembali ke langkah 2.

   Jika $\frac{19}{270}\cdot\frac{\left|y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}\right|}{\left|y_{n+1}^{(1)}\right|} < 10^{-10}$, maka *h* diganti dengan $2h$ kemudian kembali ke langkah 2 [7].

Contoh : Diberikan persamaan diferensial non linear pada masalah nilai awal berikut,
$$\frac{dy}{dx} = \sin\left(xy^2\right) \qquad y(1) = 3$$
ditentukan solusi masalah nilai awal tersebut pada interval $[1, 2]$ dengan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton, serta ukuran langkah $h = 0,2$.

Dari masalah nilai awal tersebut diketahui bahwa $f(x, y) = \sin\left(xy^2\right)$ dengan nilai awal $x_0 = 1$ dan $y_0 = 3$, serta $h = 0,2$ dan $x_{n+1} = x_n + h$. Akan dicari solusi masalah nilai awal tersebut pada interval $[1, 2]$. Untuk memperoleh solusi awal y_1, y_2, dan y_3, digunakan metode Runge-Kutta orde empat.

Tabel 1. Solusi Awal Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat

n	x_n	$h = 0,2$	
		y_n	$f(x, y) = \sin\left(xy^2\right)$
0	1	3	0,156434465
1	1,2	3,034778688	0,191697381
2	1,4	3,076832345	0,229262504
3	1,6	3,126669810	0,269620784

Setelah diperoleh solusi awal menggunakan metode Runge-Kutta orde empat, kemudian hasil tersebut disubstitusikan ke metode Adams-Bashforth orde empat
$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{h}{24}\left(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right)$$
$$y_4^{(0)} = y_3 + \frac{h}{24}\left(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0\right)$$
$$y_4^{(0)} = 3,184899379\,.$$
Setelah itu dicari nilai $f_{n+1}^{(0)} = f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}\right)$,

$$f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k-1)}\right) = f\left(x_4, y_4^{(0)}\right) = f\left(1{,}8; 3{,}184899379\right) = 0{,}313303886$$

disubstitusikan ke persamaan Adams-Moulton orde empat untuk memperoleh nilai koreksi,

$$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{24}\left(9 f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k-1)}\right) + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

$$y_4^{(1)} = y_3 + \frac{h}{24}\left(9 f\left(x_4, y_4^{(0)}\right) + 19 f_3 - 5 f_2 + f_1\right)$$

$$y_4^{(1)} = 3{,}184902433\,.$$

Dihitung galat relatif

$$\frac{\left|y_4^{(1)} - y_4^{(0)}\right|}{\left|y_4^{(1)}\right|} = \frac{|3{,}184902433 - 3{,}184899379|}{|3{,}184902433|} = 9{,}58899076 \times 10^{-7},$$

dari hasil tersebut terlihat bahwa galat relatif lebih besar dari kriteria pemberhentian $\varepsilon = 8 \times 10^{-8}$,

$$9{,}58899076 \times 10^{-7} > 8 \times 10^{-8}$$

sehingga iterasi harus dilanjutkan agar galat relatif memenuhi kriteria pemberhentian. Agar jumlah iterasi yang dilakukan dalam jumlah sedikit, maka diperlukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah *h*. Digunakan solusi numerik yang telah diperoleh untuk menghitung nilai,

$$\frac{19}{270} \cdot \frac{\left|y_4^{(1)} - y_4^{(0)}\right|}{\left|y_4^{(1)}\right|} = 6{,}747808312 \times 10^{-8}\,.$$

Dari hasil tersebut terlihat bahwa

$$6{,}747808312 \times 10^{-8} > 10^{-8}$$

sehingga ukuran langkah $h = 0{,}2$ harus diubah menjadi $\frac{h}{2} = 0{,}1$ dan dihitung kembali empat solusi awal menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Berikut ini adalah tabel dari solusi menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat dengan $h = 0{,}1$:

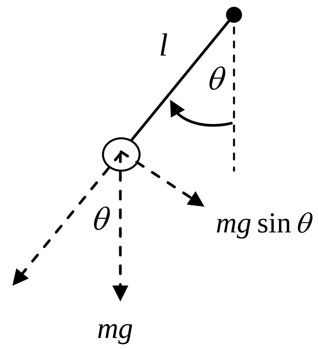
Tabel 2. Solusi Numerik Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton

n	x_n	$h = 0{,}1$		Galat Relatif
		$y_n^{(0)}$	y_n	
0	1		3	
1	1,1		3,016508005	
2	1,2		3,034778687	
3	1,3		3,054866642	
4	1,4	3,076832253	3,076832348	$3{,}087591043 \times 10^{-8}$
5	1,5	3,100742210	3,100742309	$3{,}192783861 \times 10^{-8}$
6	1,6	3,126669628	3,126669724	$3{,}070359471 \times 10^{-8}$
7	1,7	3,154694069	3,154694163	$2{,}979686624 \times 10^{-8}$
8	1,8	3,184902107	3,184902191	$2{,}637443631 \times 10^{-8}$
9	1,9	3,217387411	3,217387479	$2{,}113516026 \times 10^{-8}$
10	2	3,252250912	3,252250952	$1{,}229917389 \times 10^{-8}$

Dari tabel 2 diperoleh solusi numerik persamaan diferensial $y' = \sin(xy^2)$ dengan nilai awal $x_0 = 1$ dan $y_0 = 3$, dengan ukuran langkah $h = 0{,}1$ yang telah optimal pada interval [1, 2] dan semua solusi numerik yang dihasilkan telah memenuhi kriteria pemberhentian $\varepsilon = 8 \times 10^{-8}$.

PERSAMAAN BANDUL SEDERHANA

Gerakan bandul sederhana yang terjadi akibat dipengaruhi oleh gaya gravitasi dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 1. Bandul Sederhana

Penggambaran dinamika gerak bandul dengan massa *m* tersebut diberikan oleh persamaan diferensial non linear orde dua [6]:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \,. \tag{13}$$

Persamaan (13) merupakan persamaan diferensial non linear orde dua, dengan *g* adalah gaya gravitasi, *t* adalah waktu dalam detik, *l* adalah panjang tali bandul, dan θ adalah sudut yang dibentuk oleh tali dan garis vertikal. Persamaan (13) harus direduksi menjadi sistem yang terdiri dari dua persamaan diferensial orde pertama agar dapat diselesaikan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat. Misalkan diberikan masalah nilai awal sebagai berikut untuk $g = 10\text{m}/\text{s}^2$ dan $l = 0,2\text{m}$ pada persamaan bandul sederhana (13):

$$\begin{aligned} \theta' &= f\left(t,\theta,z\right) = z \\ z' &= g\left(t,\theta,z\right) = -50\sin\theta \\ \theta(0) &= 60^\circ,\ z(0) = 0\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Akan ditentukan solusi untuk masalah nilai awal (14) menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat pada selang tertutup [0, 1] dengan $h = 0,1$. Metode Runge-Kutta orde empat yang digunakan untuk memperoleh solusi sistem yang terdiri dari dua persamaan diferensial adalah

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \qquad z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}\left(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4\right)$$

$$k_1 = hf\left(t_n,\theta_n,z_n\right) \qquad l_1 = hg\left(t_n,\theta_n,z_n\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}\right) \qquad l_2 = hg\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}\right) \qquad l_3 = hg\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3\right) \qquad l_4 = hg\left(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3\right)$$

Metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat untuk sistem (14) dapat dituliskan seperti berikut:

$$\theta_{n+1}^{(0)} = \theta_n + \frac{h}{24}\left(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right) \qquad z_{n+1}^{(0)} = z_n + \frac{h}{24}\left(55g_n - 59g_{n-1} + 37g_{n-2} - 9g_{n-3}\right)$$

$$\theta_{n+1}^{(k)} = \theta_n + \frac{h}{24}\left(9f_{n+1}^{(k-1)} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right) \qquad z_{n+1}^{(k)} = z_n + \frac{h}{24}\left(9g_{n+1}^{(k-1)} + 19g_n - 5g_{n-1} + g_{n-2}\right)$$

Solusi numerik dari masalah nilai awal (14) pada saat $t = 0,4$ detik menggunakan metode Adams-Bashforth orde empat diperoleh $\theta_4^{(0)} = 56,55637973°$ dan menggunakan metode Adams-Moulton orde empat diperoleh $\theta_4^{(1)} = 56,55641923°$. Misalkan dipilih kriteria pemberhentian $\varepsilon = 8 \times 10^{-8}$, dari solusi numerik yang diperoleh terlihat bahwa galat relatif lebih besar dari ε sebagai berikut

$$\frac{\left|\theta_4^{(1)} - \theta_4^{(0)}\right|}{\left|\theta_4^{(1)}\right|} = 6,984176251 \times 10^{-7} > 8 \times 10^{-8}.$$

Oleh karena galat relatif tidak memenuhi kriteria pemberhentian, maka dilakukan analisis pemilihan ukuran langkah *h* agar iterasi dapat dilakukan dalam jumlah yang sedikit. Dari analisis pemilihan ukuran langkah *h*, disimpulkan bahwa ukuran langkah $h = 0,1$ diubah menjadi setengahnya yaitu $h = 0,05$. Solusi numerik dari persamaan bandul sederhana disajikan pada tabel berikut ini:

Tabel 3. Solusi Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Persamaan Bandul Sederhana

t_n	$h = 0,05$			
	$\theta_n^{(0)}$	$z_n^{(0)}$	θ_n	z_n
0			60°	0
0,05			59,94587834°	-2,164669648
0,1			59,78357247°	-4,326972433
0,15			59,51326030°	-6,484520974
0,2	59,13523935°	-8,634894186	59,13523997°	-8,634886676
0,25	58,64993167°	-10,77558868	58,64993265°	-10,77558143
0,3	58,05788434°	-12,90404424	58,05788571°	-12,90403735
0,35	57,35977557°	-15,01759597	57,35977727°	-15,01758956
0,4	56,55641945°	-17,11346568	56,55642146°	-17,11345986
0,45	55,64877217°	-19,18874728	55,64877448°	-19,18874215
0,5	54,63793872°	-21,24039424	54,63794127°	-21,24038993
0,55	53,52518009°	-23,26520945	53,52518285°	-23,26520609
0,6	52,31192108°	-25,25983768	52,31192400°	-25,25983536
0,65	50,99975831°	-27,22076096	50,99976133°	-27,22075981
0,7	49,59046837°	-29,14429739	49,59047145°	-29,14429753
0,75	48,08601606°	-31,02660337	48,08601912°	-31,02660488
0,8	46,48856223°	-32,86367961	46,48856520°	-32,86368259
0,85	44,80047140°	-34,65138127	44,80047421°	-34,65138579
0,9	43,02431869°	-36,38543216	43,02432127°	-36,38543826
0,95	41,16289595°	-38,06144320	41,16289821°	-38,06145090
1	39,21921681°	-39,67493522	39,21921867°	-39,67494453

Semua solusi numerik yang disajikan pada tabel 3 telah memenuhi kriteria pemberhentian $\varepsilon = 8 \times 10^{-8}$. Terlihat bahwa semakin waktu bertambah, maka sudut yang dibentuk oleh tali bandul dan garis vertikal semakin mengecil.

PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan dan contoh aplikasi numerik, dapat disimpulkan bahwa solusi dari masalah nilai awal dengan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat adalah berbentuk y_{n+1}. Langkah awal yang dilakukan adalah menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk memperoleh tiga solusi awal y_n, y_{n-1}, dan y_{n-2} pada titik sebelum x_{n+1}. Kemudian digunakan metode Adams-Bashforth orde empat untuk memprediksi nilai y_{n+1}. Kemudian nilai prediksi tersebut diperbaiki menggunakan metode Adams-Moulton orde empat. Metode Adams-Moulton dapat diselesaikan secara iterasi, apabila galat relatif terhadap iterasi sebelumnya kurang dari kriteria pemberhentian, maka iterasi dihentikan dan diperoleh solusi numerik dari persamaan diferensial non linear tersebut.

Apabila galat relatif tidak memenuhi kriteria pemberhentian, maka dilakukan analisis pemilihan ukuran langkah *h*, yang bertujuan agar iterasi pada persamaan Adams-Moulton dapat dilakukan dalam jumlah yang sedikit. Jika $10^{-10} < \frac{19}{270} \cdot \frac{\left|y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}\right|}{\left|y_{n+1}^{(1)}\right|} < 10^{-8}$, maka ukuran langkah *h* telah optimal dan untuk langkah berikutnya digunakan nilai *h* yang sama. Apabila galat relatif tidak memenuhi interval tersebut, maka nilai *h* diganti dan dihitung kembali empat solusi awal menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

Penyelesaian numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat pada persamaan bandul sederhana menunjukkan besarnya sudut yang dibentuk oleh tali bandul dengan garis vertikal pada waktu tertentu. Persamaan bandul sederhana merupakan persamaan diferensial non linear orde dua, sehingga persamaan tersebut harus direduksi menjadi sistem yang terdiri dari dua persamaan diferensial orde satu agar dapat diselesaikan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat. Untuk sudut awal $\theta = 60°$ dan ukuran langkah *h* yang telah optimal adalah $h = 0,05$ diperoleh solusi numerik persamaan bandul sederhana pada saat $t = 1$detik yaitu $\theta = 39,21921867°$.

Penulis menyarankan perlu dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai metode numerik dalam menyelesaikan persamaan diferensial berorde lebih tinggi, ataupun persamaan diferensial parsial yang diselesaikan secara numerik.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Finizio, N. dan Ladas G. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern* [Santoso, W, trans]. Jakarta: Ed ke-2. Erlangga; 1988.

[2]. Munir, R. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika; 2003.

[3]. Djojodihardjo, H. *Metode Numerik*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama; 2000.

[4]. Munif, A. dan Hidayatullah, A. P. *Cara Praktis Penguasaan dan Penggunaan Metode Numerik*. Surabaya: Guna Widya; 2003.

[5]. Conte, S. D. dan Boor, C. D. *Dasar-Dasar Analisis Numerik suatu Pendekatan Algoritma*. Jakarta: Ed ke-3. Erlangga; 2004.

[6]. Kreyszig, E. *Advanced Engineering Mathematics*.New York: 9th Edition. John Wiley & Sons Inc; 2006.

[7]. Mathews, J. H. and Fink, K. K. *Numerical Methods Using Matlab*. New Jersey: 4th Edition. Prentice-Hall Inc; 2004.

APRIADI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, apematik@gmail.com

BAYU PRIHANDONO : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, beiprihandono@gmail.com

EVI NOVIANI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, evi_noviani@mipa.untan.ac.id