

MODEL DENYUT JANTUNG DENGAN FUNGSI VARIAN EKSPONENSIAL KUADRAT MENGGUNAKAN NELDER-MEAD SIMPLEX

Indrawan Batolomius, Helmi, Yudhi

INTISARI

Denyut jantung yang berkontraksi dapat direkam menggunakan elektrokardiogram. Informasi denyut jantung tersebut ditampilkan dalam bentuk gelombang EKG atau gelombang PQRS. Satu gelombang dapat dimodelkan sebagai bentuk fungsi varian eksponensial kuadrat dan parameter model tersebut dapat diperoleh dengan bantuan Nelder-Mead Simplex. Oleh karena itu tujuan penelitian ini mendapatkan model denyut jantung untuk satu orang yang mengalami kelainan jantung dengan bantuan Nelder-Mead Simplex. Nelder-Mead Simplex merupakan salah satu metode optimasi untuk fungsi tujuan nonlinear. Fungsi tujuan dalam penelitian ini adalah $y(t) = \sum_{i \in G} A_i \exp\left(\frac{-(t-t_{0_i})^2}{2S_i^2}\right)$, dengan A_i adalah puncak ke- i , t_{0_i} adalah waktu untuk sampai pada puncak ke- i , S_i adalah lebar puncak ke- i untuk $i \in G$, $G = \{P, Q, R, S, T\}$, dan $y(t)$ merupakan model denyut jantung. Dari hasil iterasi didapat model denyut jantung, yaitu

$$y(t) = -0,00554 \exp\left(\frac{-(t-1,174877)^2}{0,000118518}\right) + (-0,02759) \exp\left(\frac{-(t-1,18934)^2}{0,000845838}\right) + 0,125044 \exp\left(\frac{-(t-1,200747)^2}{0,0000833857}\right) \\ + (-0,17313) \exp\left(\frac{-(t-1,205417)^2}{0,000565085}\right) + 0,017691 \exp\left(\frac{-(t-1,239994)^2}{0,001492218}\right)$$

Kata Kunci: Elektrokardiogram, Fungsi Varian Eksponensial Kuadrat, Nelder-Mead Simplex.

PENDAHULUAN

Jantung adalah organ berupa otot, berbentuk kerucut, berongga, basisnya di atas dan puncaknya di bawah [1]. Gerakan jantung terdiri atas dua jenis yaitu kontraksi atau sistol dan pengenduran atau diastole [2]. Gerakan yang berulang dan terus menerus adalah denyut jantung. Denyut jantung yang terjadi dikarenakan jantung yang terdiri dari otot jantung yang disebut miokardium. Miokardium tersusun dari sel-sel otot jantung yang disebut miosit [3]. Sel miosit yang terhubung sebagai suatu rangkaian kemudian membentuk hubungan listrik melalui *gap junction* [4].

Rangsangan kontraksi otot jantung memiliki rasio permukaan terhadap volume yang besar, dan akibatnya sinyal yang kuat dibangkitkan dan dapat dideteksi pada permukaan tubuh menggunakan elektrokardiogram [5]. Gelombang yang dihasilkan dari alat elektrokardiogram memiliki periode waktu dan tinggi puncak serta lembah yang berbeda-beda. Gelombang denyut jantung sehat yang pernah diteliti oleh Herlina D Tendean dkk [6], merupakan persamaan tidak linear yang memenuhi fungsi varian eksponensial kuadrat berikut

$$y(t) = \sum_{i \in G} A_i \exp\left(\frac{-(t-t_{0_i})^2}{2S_i^2}\right).$$

Gelombang denyut jantung pasien kelainan jantung jika dilihat dari EKG akan memiliki perbedaan pada puncak dan lembah gelombang. Pada puncak P pasien kelainan jantung umumnya memiliki panjang lebih dari 0,12 detik yang biasa disebabkan oleh peningkatan resistensi pengosongan darah ke ventrikel kiri atau kondisi tersebut terdapat pada penyakit paru obstruktif kronis [7]. Penelitian ini untuk membentuk model dari denyut jantung dengan fungsi varian eksponensial kuadrat menggunakan Nelder-Mead Simplex. Metode Nelder-Mead Simplex merupakan salah satu metode optimasi nonlinear. Metode ini termasuk metode pencarian secara langsung karena dalam prosesnya tidak memerlukan turunan fungsi objektif sehingga mudah diimplementasikan [8].

Tahapan dalam memodelkan denyut jantung yang pertama menentukan titik puncak dan lembah gelombang denyut jantung. Satu set gelombang denyut jantung terdiri dari tiga titik maksimum dan dua titik minimum yang diinisialkan dengan $PQRST$. Setelah mendapatkan titik puncak maka mengukur grafik EKG yang terdiri dari nilai puncak yang dinotasikan sebagai $A_{P_j}, A_{Q_j}, A_{R_j}, A_{S_j}$ dan A_{T_j} . Untuk waktu yang diperlukan untuk sampai pada puncak dinotasikan sebagai $t_{0P_j}, t_{0Q_j}, t_{0R_j}, t_{0S_j}$ dan t_{0T_j} . Untuk nilai lebar puncak dinotasikan sebagai $S_{P_j}, S_{Q_j}, S_{R_j}, S_{S_j}$ dan S_{T_j} . Nilai parameter tersebut direpresentasikan ke dalam bentuk matriks

$$x_j = \begin{bmatrix} A_{P_j} & t_{0P_j} & S_{P_j} \\ A_{Q_j} & t_{0Q_j} & S_{Q_j} \\ A_{R_j} & t_{0R_j} & S_{R_j} \\ A_{S_j} & t_{0S_j} & S_{S_j} \\ A_{T_j} & t_{0T_j} & S_{T_j} \end{bmatrix}$$

dengan x_j adalah matriks yang merepresentasikan satu set gelombang, j menyatakan letak gelombang, untuk $j = 1, 2, 3, \dots, 20$. Langkah yang kedua menghitung galat x_j dengan rumus

$$\varepsilon(x_j) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (y_d(t_{k_j}) - y(t_{k_j}))^2}{N}} \quad (1)$$

dengan $y(t_k)$ adalah nilai dugaan denyut jantung pada saat ke t_k , dengan rumusnya yaitu

$$y(t_k) = \sum_{i \in G} A_i \exp\left(\frac{-(t_k - t_{0i})^2}{2S_i^2}\right) \quad (2)$$

$y_d(t_k)$ adalah nilai pada denyut jantung pada saat ke t_k dan N adalah banyak data. Langkah selanjutnya menerapkan metode Nelder-Mead Simplex untuk memperkecil nilai galat dan mengevaluasi parameter pada gelombang.

Nelder-Mead Simplex

Metode Nelder-Mead Simplex dikategorikan sebagai metode numerik yang bermanfaat untuk mencari nilai minimum fungsi dengan banyak variabel apabila turunan dari fungsi ini sulit ditemukan [9]. Setiap operasi dalam satu iterasi dikaitkan dengan parameter skalar yaitu α (refleksi), β (ekspansi), γ (kontraksi) dan δ (penyusutan) dengan nilai umum $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 2, 0.5, 0.5)$. Iterasi Nelder-Mead Simplex seperti berikut ini.

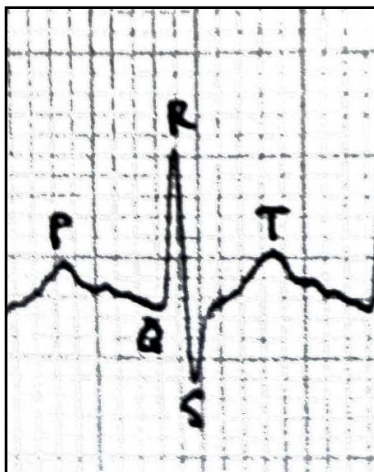
1. Urutkan nilai galat sehingga memenuhi $\varepsilon(x_1^*) \leq \varepsilon(x_2^*) \leq \dots \leq \varepsilon(x_{n+1}^*)$.

2. Hitung rata-rata parameter $\bar{X}^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^*$.
3. Hitung titik refleksi dengan rumus $x_r = \bar{X}^* + \alpha(\bar{X}^* - x_{n+1}^*)$, evaluasi jika $\varepsilon(x_1^*) \leq \varepsilon(x_r) < \varepsilon(x_n^*)$ maka ganti x_{n+1}^* dengan x_r . Jika $\varepsilon(x_r) < \varepsilon(x_1^*)$ maka hitung titik ekspansi dengan rumus $x_e = \bar{X}^* + \beta(x_r - \bar{X}^*)$, evaluasi jika $\varepsilon(x_e) < \varepsilon(x_r)$ maka ganti x_{n+1}^* dengan x_e . Jika $\varepsilon(x_n^*) \leq \varepsilon(x_r) < \varepsilon(x_{n+1}^*)$ hitung kontraksi luar dengan rumus $x_{oc} = \bar{X}^* + \gamma(x_r - \bar{X}^*)$, evaluasi jika nilai $\varepsilon(x_{oc}) \leq \varepsilon(x_r)$ ganti x_{n+1}^* dengan x_{oc} . Jika $\varepsilon(x_r) \geq \varepsilon(x_{n+1}^*)$ hitung kontraksi dalam dengan rumus $x_{ic} = \bar{X}^* - \gamma(x_r - \bar{X}^*)$, evaluasi jika nilai $\varepsilon(x_{ic}) < \varepsilon(x_{n+1}^*)$ maka ganti x_{n+1}^* dengan x_{ic} . Jika refleksi, ekspansi dan kontraksi tidak memenuhi hitung penyusutan dengan rumus $v_j = x_1^* + \delta(x_j^* - x_1^*)$, untuk $2 \leq j \leq n + 1$.

MENDAPATKAN MODEL DENYUT JANTUNG DENGAN FUNGSI VARIAN EKSPONENSIAL KUADRAT MENGGUNAKAN NELDER-MEAD SIMPLEX.

Menentukan nilai parameter pada gelombang

Penentuan titik *PQRST* dilakukan oleh peneliti dengan menggunakan kamera *handphone* untuk setiap gelombang EKG denyut jantung. Umumnya dalam satu gelombang denyut jantung memiliki tiga titik maksimum dan dua titik minimum. Titik maksimum pertama atau dengan inisial *P* merupakan titik puncak *P*. Setelah puncak *P* akan ada titik minimum pertama dengan inisial *Q* atau lembah *Q*. Setelah lembah *Q* akan ada titik maksimum kedua dengan inisial *R* atau puncak *R*. Setelah puncak *R* akan ada titik minimum kedua dengan inisial *S* atau lembah *S*. Setelah lembah *S* akan ada titik maksimum ketiga dengan inisial *T* atau puncak *T*. Setiap gelombang denyut jantung terdapat nilai A_{ij} , t_{0ij} dan S_{ij} dengan $i \in G$ untuk $G = \{P, Q, R, S, T\}$ dan untuk $j = 1, 2, 3, \dots, 20$ seperti Gambar 1.



Gambar 1. Gelombang denyut jantung.

Nilai parameter awal untuk gelombang pertama dari denyut jantung disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Parameter gelombang denyut jantung

i	A_{i_1}	$t_{0_{i_1}}$	S_{i_1}
P	0,025	0,38	0,04
Q	-0,100	0,44	0,06
R	0,65	0,48	0,03
S	-0,875	0,50	0,06
T	0,100	0,64	0,08

Nilai A_{i_1} merupakan tinggi tegangan saat puncak ke i pada gelombang pertama. Nilai $t_{0_{i_1}}$ merupakan waktu (detik) saat ke i pada gelombang pertama. Nilai S_{i_1} merupakan lebar puncak ke i pada gelombang pertama dalam satuan waktu (detik).

Perhitungan dengan Nelder-Mead Simplex

Nilai $y(t_k)$ yang diperoleh dari hasil perhitungan dengan Persamaan 2 dan $y_d(t_k)$ yang diperoleh dari hasil pengamatan disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai dugaan dan nilai denyut denyut jantung

k	t_k	$y_d(t_k)$	$y(t_k)$
1	0,38	0,025	-0,137903047
2	0,44	-0,100	-0,200008245
3	0,48	0,650	-0,200007546
4	0,50	-0,875	-0,199824240
5	0,64	0,100	-0,199805846

Sebelum menentukan urutan dari galat untuk setiap x_j terlebih dahulu menghitung nilai $y(t_k)$ berdasarkan pada Persamaan (2). Dengan menggunakan Persamaan (1) dan nilai yang ada pada Tabel 2 dapat dihitung galat untuk $\varepsilon(x_1)$, yaitu sebesar 0,451608604. Galat $\varepsilon(x_2)$ sampai $\varepsilon(x_{20})$ dihitung dengan Persamaan (1) dan diurutkan dari nilai paling kecil sampai yang paling besar sehingga $\varepsilon(x_1^*) \leq \varepsilon(x_2^*) \leq \dots \leq \varepsilon(x_{n+1}^*)$ disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Galat $\varepsilon(x_j)$ dengan $j = 1, 2, 3, \dots, 20$.

j	$\varepsilon(x_j)$	$\varepsilon(x_j^*)$	j	$\varepsilon(x_j)$	$\varepsilon(x_j^*)$
1	0,451608604	0,451608604	11	0,652847109	0,633557912
2	0,633557912	0,490535422	12	0,78137669	0,652847109
3	0,594595876	0,499124233	13	0,599166087	0,6592198
4	0,65921980	0,520096145	14	0,490535422	0,680723856
5	0,792128772	0,550454358	15	0,520096145	0,730204603
6	0,799266201	0,570635611	16	0,57107355	0,755296494
7	0,730204603	0,57107355	17	0,550454358	0,78137669
8	0,680723856	0,580732296	18	0,499124233	0,792128772
9	0,848811713	0,594595876	19	0,570635611	0,799266201
10	0,755296494	0,599166087	20	0,580732296	0,848811713

Galat yang sudah diurutkan $\varepsilon(x_j^*)$ dengan galat yang paling besar $\varepsilon(x_{20}^*) = 0,848811713$ dan galat yang paling kecil $\varepsilon(x_1^*) = 0,451608604$. Berikutnya dihitung rata-rata nilai parameter dengan rumus:

$$\bar{X}^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^* \tag{3}$$

Dengan n adalah banyak matriks dengan nilai galat terbaik sampai pada terburuk kedua yaitu $n = 19$ dan x_j^* adalah matriks ke- j . Titik tengah terbaik terletak pada n kecuali $n + 1$, untuk $n + 1$ adalah matrik dengan nilai dalam paling buruk yaitu $n + 1 = 20$.

Pada iterasi pertama akan dihitung rata-rata nilai parameter seperti berikut:

$$\begin{aligned} \bar{X}^* &= \frac{1}{19} \left((x_1^* + x_2^* + \dots + x_{19}^*) \right) \\ \bar{X}^* &= \frac{1}{19} \left(\begin{pmatrix} 0.025 & 0.38 & 0.04 \\ -0.1 & 0.44 & 0.06 \\ 0.65 & 0.48 & 0.03 \\ -0.875 & 0.5 & 0.06 \\ 0.1 & 0.64 & 0.08 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.05 & 0.78 & 0.04 \\ -0.175 & 0.88 & 0.09 \\ 0.6 & 0.92 & 0.04 \\ -1 & 0.94 & 0.05 \\ 0.1 & 1.08 & 0.16 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} -0.05 & 0.78 & 0.04 \\ -0.175 & 0.88 & 0.09 \\ 0.6 & 0.92 & 0.04 \\ -1 & 0.94 & 0.05 \\ 0.1 & 1.08 & 0.16 \end{pmatrix} \right) \\ \bar{X}^* &= \begin{pmatrix} -0,094736842 & 4,268421053 & 0,043157895 \\ -0,193421053 & 4,372631579 & 0,077368421 \\ 0,594736842 & 4,403157895 & 0,037368421 \\ -1,021052632 & 4,426315789 & 0,053684211 \\ 0,031578947 & 4,577368421 & 0,104210526 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Setelah mendapatkan rata-rata parameter maka selanjutnya dihitung titik refleksi

$$x_r = \bar{X}^* + \alpha(\bar{X}^* - x_{20}^*)$$

Dengan \bar{X}^* adalah rata-rata nilai parameter yang sudah diurutkan, α adalah parameter dengan nilai 1 dan x_{20}^* merupakan matriks dengan nilai error paling besar.

maka:

$$x_r = \begin{pmatrix} -0,039473684 & 5,216842105 & 0,046315789 \\ -0,161842105 & 5,305263158 & 0,094736842 \\ 0,689473684 & 5,336315789 & 0,034736842 \\ -0,942105263 & 5,362631579 & 0,047368421 \\ -0,063157895 & 5,514736842 & 0,118421053 \end{pmatrix}$$

Evaluasi $x_r = \varepsilon(x_r)$, jika $\varepsilon(x_1^*) \leq \varepsilon(x_r) < \varepsilon(x_{19}^*)$ maka titik refleksi diterima dan dipilih sebagai parameter baru untuk mengganti x_{20}^* . Dengan cara yang sama untuk mencari galat pada tahap sebelumnya diperoleh $\varepsilon(x_r) = 0,579023222$, maka hal ini memenuhi $\varepsilon(x_1^*) \leq \varepsilon(x_r) < \varepsilon(x_{19}^*)$. Karena nilai $\varepsilon(x_1^*) = 0,451608604 \leq \varepsilon(x_r) = 0,579023222 < \varepsilon(x_{19}^*) = 0,799266$.

Dihitung rata-rata galat total untuk melihat perubahan galat pada setiap iterasi yang dilakukan. Rata-rata galat total adalah hasil penjumlahan nilai galat dan dibagi dengan banyaknya galat, yang didefinisikan dengan rumus seperti berikut:

$$\overline{\varepsilon(x)} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon(x_j^*) \quad (4)$$

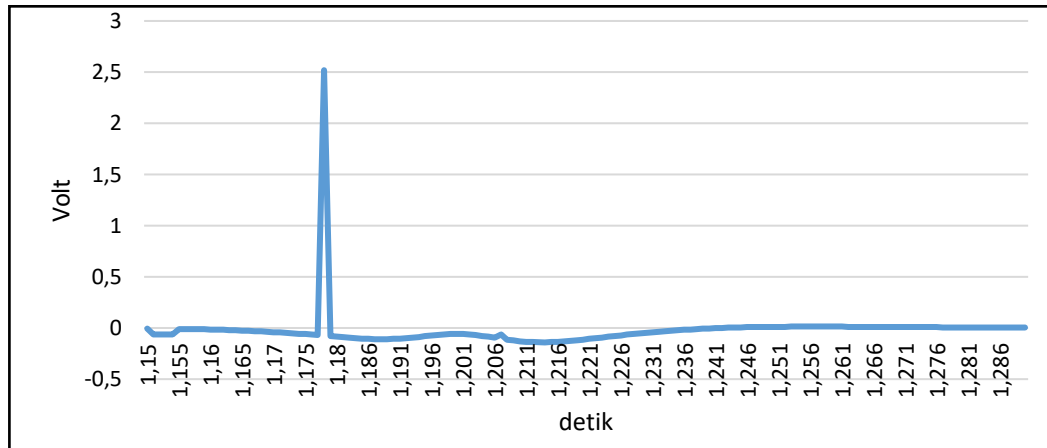
Dengan $\varepsilon(x_j^*)$ adalah nilai galat untuk x_j^* pada saat j . Sebelum iterasi nilai galat total $\overline{\varepsilon(x)} = 0,638072767$ sedangkan setelah iterasi adalah $\overline{\varepsilon(x)} = 0,624583342$. Rata-rata galat total mengecil untuk setiap iterasi yang dilakukan, sampai iterasi dihentikan pada iterasi ke-39 dengan nilai rata-rata galat total $\overline{\varepsilon(x)} = 0,235342658$. Iterasi ke-39 menghasilkan nilai parameter baru untuk puncak P, Q, R, S dan T . Parameter hasil iterasi ini membentuk matriks untuk gelombang pertama berikut ini.

$$x_1 = \begin{bmatrix} -0,00554 & 1,174877 & 0,007698 \\ -0,02759 & 1,18934 & 0,020565 \\ 0,125044 & 1,200747 & 0,006457 \\ -0,17313 & 1,205417 & 0,016809 \\ 0,017691 & 1,239994 & 0,027315 \end{bmatrix}$$

Parameter baru pada iterasi ke-39 ini diperoleh menggunakan metode Nelder Mead-Simplex. Parameter hasil iterasi yang sudah diperoleh disubstitusikan ke Persamaan 2 sehingga memperoleh model:

$$y(t) = -0,00554 \exp\left(\frac{-(t-1,174877)^2}{0,000118518}\right) + (-0,02759) \exp\left(\frac{-(t-1,18934)^2}{0,000845838}\right) + 0,125044 \exp\left(\frac{-(t-1,200747)^2}{0,0000833857}\right) \\ + (-0,17313) \exp\left(\frac{-(t-1,205417)^2}{0,000565085}\right) + 0,017691 \exp\left(\frac{-(t-1,239994)^2}{0,001492218}\right)$$

Model yang sudah diperoleh diuji dengan nilai $1,150 \leq t \leq 1,290$ dengan mensubstitusikan nilai $t = 1,150$ diperoleh $y(1,150)$ adalah $-0,005134$. Untuk mencari nilai $y(1,151)$ sampai $y(1,290)$ substitusikan nilai t kedalam model dengan parameter hasil dari iterasi yang sudah diperoleh. Nilai dari $1,150 \leq t \leq 1,290$ setelah disubstitusi ke dalam model dengan parameter pada iterasi ke-39 dapat direpresentasikan seperti Gambar 2.



Gambar 2. Diagram $y(t)$ dengan $1,150 \leq t \leq 1,290$.

Pada Gambar 2 adalah denyut jantung menggunakan parameter dari iterasi menggunakan Nelder-Mead Simplex pada interval $1,150 \leq t \leq 1,290$ dengan memanfaatkan Fungsi Varian Eksponensial Kuadrat sebagai fungsi tujuan. Pola keseluruhan gelombang dianggap sama, maka data dari seluruh gelombang merupakan data periodik yang memiliki nilai puncak dan lebar puncak akan sama pada waktu tertentu.

KESIMPULAN

Data denyut jantung yang telah diukur merupakan data periodik yang merupakan fungsi varian eksponensial kuadrat. Dengan bantuan metode Nelder-Mead Simplex, maka diperoleh parameter baru hasil dari proses iterasi yang memenuhi fungsi varian eksponensial kuadrat. Nilai galat total yang diperoleh setelah diminimalkan adalah 0,235342658. Iterasi dilakukan sebanyak 39 iterasi, dengan model hasil proses iterasi adalah

$$y(t) = -0,00554 \exp\left(\frac{-(t-1,174877)^2}{0,000118518}\right) + (-0,02759) \exp\left(\frac{-(t-1,18934)^2}{0,000845838}\right) + 0,125044 \exp\left(\frac{-(t-1,200747)^2}{0,0000833857}\right) \\ + (-0,17313) \exp\left(\frac{-(t-1,205417)^2}{0,000565085}\right) + 0,017691 \exp\left(\frac{-(t-1,239994)^2}{0,001492218}\right)$$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chung EK, MD, FACP dan FACC. *100 Tanya-jawab Mengenai Serangan Jantung dan Masalah masalah yang Terkait Dengan Jantung*. Jakarta: PT indeks; 2010.
- [2] Pearce EC, *Anatomy and Physiology for Nurses*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama; 2009
- [3] Ward J, *At a Glance Fisiologi*. Jakarta: Erlangga; 2009.
- [4] Aronson dan Ward, *At Glance Sistem kardiovaskular*. Jakarta: Erlangga; 2010.
- [5] Ernest WA, *Quick Review Anatomi Klinik*, 2th ed, Jakarta: Binapura Aksara Publisher; 2012.
- [6] Herlina D Tendean, Hanna A.P, Suryasatria T, Bambang S. Pola Distribusi Interval Denyut Jantung Dengan Memanfaatkan Jumlahan Fungsi Gauss yang Dioptimasi Secara Nelder-Mead Simplex. *Seminar Nasional Sains dan Pendidikan Sains*, In: UKSW: 2014. p. 739-747.
- [7] Yuliana HS. dan Heru S, *Interpretasi Pemeriksaan Elektrokardiogram*. Surakarta: Fakultas Kedokteran Universitas Sebelas Maret Surakarta; 2019.
- [8] Fan SKS dan Zahara E, A hybrid simplex search and partile swarm optimization for unconstrained optimization. *European Jurnal of Operational research*. 2007; 181(2):527-54.
- [9] Rohman M dan Wirawan. Pemodelan Lapisan Fisik untuk Efisiensi Energi Pada Sensor Jaringan Nirkabel. *Seminar Nasional Manajemen Teknologi XVII*, ITS: 2013. Hal 1-7.

INDRAWAN BATOLOMIUS : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
indrawan1998@gmail.com

HELMI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak,
helmi132205@yahoo.co.id

YUDHI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak,
yudhi@math.untan.ac.id
