Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 11, No. 5 (2022), hal 743 – 750.

BILANGAN DOMINASI PERSEKITARAN TRANSVERSAL PADA *TRIANGULAR SNAKE GRAPH*

Yuni Elisa, Nilamsari Kusumastuti, Fransiskus Fran

INTISARI

Diberikan sebarang graf terhubung $G = (V(G), E(G))$. Himpunan $S \subseteq V(G)$ dikatakan himpunan persekitaran dari graf G jika $G = \cup_{v \in s} \langle N(v) \rangle$ dimana $\langle N(v) \rangle$ merupakan subgraf G yang diinduksi oleh persekitaran tertutup dari titik v. Himpunan $D \subseteq V(G)$ dikatakan himpunan dominasi dari graf G jika setiap titik $V(G) \setminus D$ bertetangga dengan minimal satu titik dari D. Kardinalitas terkecil dari setiap D adalah bilangan dominasi dari graf G atau $(\gamma(G))$. Himpunan D disebut himpunan dominasi persekitaran transversal jika terdapat $D \cap S$ dari setiap himpunan S yang mempunyai kardinalitas terkecil. Kardinalitas terkecil dari setiap himpunan dominasi persekitaran transversal adalah bilangan dominasi persekitaran transversal atau $\gamma_{nt}(G)$. Pada penelitian ini dibahas bilangan dominasi persekitaran transversal pada triangular snake graph (T_n) dan line graph dari triangular snake graph $(L(T_n))$. Triangular snake graph adalah suatu bentuk graf yang diperoleh dari graf lintasan atau graf P_n dimana semua sisinya diganti dengan graf cycle C_3. Line graph dari graf T_n atau graf $(L(T_n))$ adalah graf yang diperoleh dengan mengubah sisi di graf T_n menjadi titik dan sisinya diperoleh dari sisi yang bersisian dari graf T_n. Hasil dari penelitian ini diperoleh $\gamma_{nt}(T_n) = 3$ untuk $n = 2$ dan $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$ dan $\gamma_{nt}(L(T_n)) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$ untuk $n \geq 2$.

Kata Kunci : *dominasi, persekitaran, triangular snake graph, line graph.*

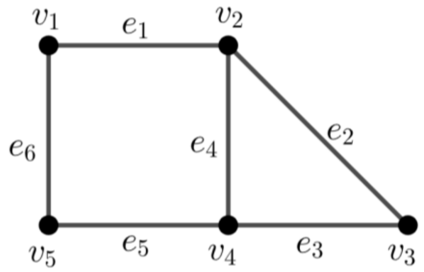
PENDAHULUAN

Teori graf merupakan bagian dari matematika diskrit yang digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan dalam diagram titik dan garis [1]. Pembahasan dalam teori graf salah satunya adalah himpunan persekitaran. Himpunan persekitaran dikategorikan menjadi himpunan persekitaran terbuka dan himpunan persekitaran tertutup, dengan $N(v) = \{u \in V\,; (u, v) \in E(G)\}$ merupakan himpunan persekitaran terbuka dan $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ merupakan himpunan persekitaran tertutup. Suatu himpunan $S \subseteq V(G)$ dikatakan himpunan persekitaran (*neighbourhood set*) pada $G = (V(G), E(G))$ jika himpunan S membentuk $G = \cup_{v \in s} \langle N(v) \rangle$ dimana $\langle N(v) \rangle$ merupakan subgraf G yang diinduksi oleh $N[v]$ [2]. Selain itu, pada teori graf juga terdapat pembahasan himpunan dominasi. Himpunan $D \subseteq V(G)$ disebut himpunan dominasi jika setiap titik dari $V(G) \setminus D$ bertetangga dengan minimal satu titik pada D [3]. Himpunan dominasi D yang beririsan dengan setiap himpunan dominasi persekitaran dengan kardinalitas terkecil disebut himpunan dominasi persekitaran transversal. Kardinalitas terkecil dari setiap himpunan dominasi persekitaran transversal dari G adalah bilangan dominasi persekitaran transversal atau yang di lambangkan dengan $\gamma_{nt}(G)$ [2].

Beberapa penelitian terkait bilangan dominasi persekitaran transversal yang telah dilakukan pada beberapa jenis graf yang diantaranya graf multipartit komplit, graf lintasan, graf *cycle*, dan graf roda [2] serta graf bipartit komplit dan graf lengkap [4]. Pada penelitian ini dikaji bilangan dominasi persekitaran transversal pada *triangular snake graph* dan *line graph* dari *triangular snake graph*. *Triangular snake graph* atau graf T_n adalah suatu bentuk graf yang diperoleh dari graf lintasan atau graf P_n dengan mengganti semua sisi graf P_n menjadi graf *cycle* C_3 [5]. Dari graf T_n kemudian dibentuk graf baru, salah satunya yaitu *line graph* dari graf T_n atau graf $L(T_n)$. Graf $L(T_n)$ diperoleh dengan mengubah sisi dari graf T_n menjadi titik di graf $L(T_n)$ dan sisinya didapatkan dari sisi yang bersisian di graf T_n [6].

TERMINOLOGI DASAR GRAF

Pada bagian ini akan diberikan definisi dari graf dan subgraf induksi. Graf merupakan pasangan himpunan yang tulis dengan $G = (V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ merupakan titik-titik yang ada di G dan $E(G)$ merupakan sisi dari sepasang titik yang terhubung. Berikut ini diberikan salah satu contoh dari graf G.

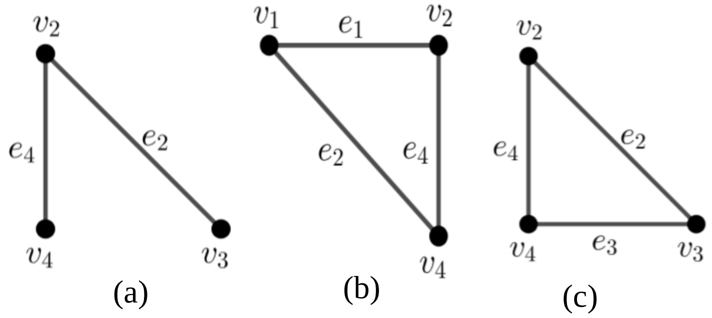


Gambar 1 Graf G dengan 5 buah titik dan 6 buah sisi

Berdasarkan Gambar 1, graf G mempunyai $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ dengan $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_3)$, $e_3 = (v_3, v_4)$, $e_4 = (v_2, v_4)$, $e_5 = (v_4, v_5)$, dan $e_6 = (v_1, v_5)$. Selanjutnya, pada graf terdapat istilah bertetangga dan bersisian. Dua buah titik $u, v \in V(G)$ dikatakan bertetangga jika kedua titik tersebut membentuk sisi atau $e = (u, v)$. Sisi e dikatakan bersisian dengan titik u dan v jika e menghubungkan kedua titik tersebut. Berdasarkan Gambar 1, titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan titik v_5 tetapi titik v_1 tidak bertetangga dengan v_3 dan titik v_4. Sisi e_1 bersisian dengan titik v_1 dan titik v_2, tetapi sisi e_1 tidak bersisian dengan titik v_3, titik v_4 dan titik v_5. Selain itu, pada graf juga terdapat istilah subgraf dan subgraf induksi. Sebuah graf H dikatakan subgraf dari graf G jika dan hanya jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Dengan demikian, jika titik dan sisi yang ada pada graf H juga terdapat pada graf G maka graf H dikatakan subgraf dari G. Sedangkan subgraf induksi diperoleh dengan menghapus titik dan sisi yang tidak bersisian dengan titik tersebut. Untuk lebih jelasnya diberikan Definisi 1 tentang subgraf induksi.

Definisi 1 [7] *Subgraf induksi dari* $G = (V(G), E(G))$ *adalah* $G' = (V(G'), E(G'))$ *untuk setiap* $x, y \in V(G')$ *berlaku* $(x, y) \in E(G')$ *jika dan hanya jika* $(x, y) \in E(G)$.

Berdasarkan Definisi 1, sebuah subgraf dikatakan subgraf induksi jika titik yang berada pada H juga terdapat pada graf G dengan sisi yang menghubungkan semua titik tersebut. Berikut ini diberikan contoh salah satu subgraf, subgraf induksi, dan bukan subgraf dari Gambar 1.



Gambar 2 Salah satu contoh (a) subgraf (b) bukan subgraf dan (c) subgraf induksi dari graf G

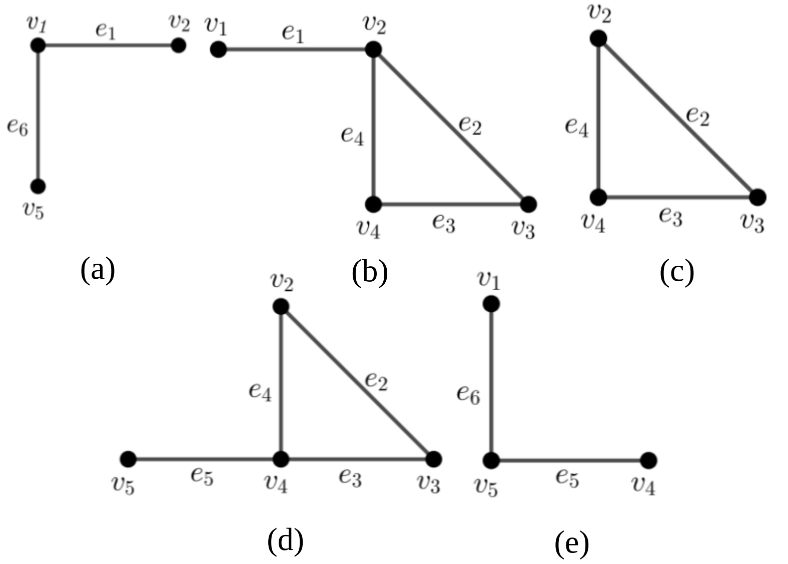
Berdasarkan Gambar 2 (a) tidak dikatakan subgraf induksi dikarenakan tidak terdapat sisi e_3 yang menghubungkan titik v_4 dan v_3, sedangkan pada graf G terdapat sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut.

BILANGAN DOMINASI PERSEKITARAN TRANSVERSAL

Berikut dijelaskan tentang himpunan persekitaran, himpunan dominasi, dan himpunan dominasi persekitaran transversal.

Definisi 2 [2] *Himpunan* $S \subseteq V(G)$ *pada graf* $G = (V(G), E(G))$ *disebut himpunan persekitaran jika* $G = \bigcup_{v \in S} \langle N(v) \rangle$, *dengan* $\langle N(v) \rangle$ *subgraf* G *yang diinduksi oleh* $N[v]$.

Berdasarkan Gambar 1 diperoleh persekitaran tertutup dari masing-masing titik yang ada pada graf G adalah sebagai berikut.
$N[v_1] = N(v_1) \cup \{v_1\} = \{v_2, v_5\} \cup \{v_1\} = \{v_1, v_2, v_5\}$
$N[v_2] = N(v_2) \cup \{v_2\} = \{v_1, v_3, v_4\} \cup \{v_2\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$N[v_3] = N(v_3) \cup \{v_3\} = \{v_2, v_4\} \cup \{v_3\} = \{v_2, v_3, v_4\}$
$N[v_4] = N(v_4) \cup \{v_4\} = \{v_2, v_3, v_5\} \cup \{v_4\} = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$
$N[v_5] = N(v_5) \cup \{v_5\} = \{v_1, v_4\} \cup \{v_5\} = \{v_1, v_4, v_5\}$
Sehingga diperoleh subgraf-subgraf induksi untuk setiap persekitaran dari $v_i \in V(G)$ dengan himpunan titik serta himpunan sisi sebagai berikut.
$V(\langle N(v_1) \rangle) = \{v_1, v_2, v_5\}$ dan $E(\langle N(v_1) \rangle) = \{e_1, e_6\}$
$V(\langle N(v_2) \rangle) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(\langle N(v_2) \rangle) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
$V(\langle N(v_3) \rangle) = \{v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(\langle N(v_3) \rangle) = \{e_2, e_3, e_4\}$
$V(\langle N(v_4) \rangle) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(\langle N(v_4) \rangle) = \{e_2, e_3, e_4, e_5\}$
$V(\langle N(v_5) \rangle) = \{v_1, v_4, v_5\}$ dan $E(\langle N(v_5) \rangle) = \{e_5, e_6\}$
Subgraf-subgraf tersebut direpresentasikan sebagai berikut.



Gambar 3 (a) Subgraf $\langle N(v_1) \rangle$, (b) Subgraf $\langle N(v_2) \rangle$, (c) Subgraf $\langle N(v_3) \rangle$, (d) Subgraf $\langle N(v_4) \rangle$, dan (e) Subgraf $\langle N(v_5) \rangle$ dari G

Oleh karena subgraf induksi untuk setiap titik pada graf G tidak ada yang membentuk graf G, maka diambil himpunan bagian lainnya dari graf G dengan kardinalitas lebih besar atau sama dengan dua. Misal diambil $S_1 = \{v_1, v_4\}$. Berdasarkan Gambar 3 terlihat bahwa S_1 merupakan himpunan persekitaran dari G, karena $\langle N(v_1) \rangle \cup \langle N(v_4) \rangle = G$. Berdasarkan hal tersebut diperoleh kardinalitas terkecilnya adalah dua. Himpunan persekitaran lainnya dari graf G dengan kardinalitas dua diperoleh $S_2 = \{v_2, v_5\}$.

Definisi 3 [3] *Diketahui graf* $G = (V(G), E(G))$. *Himpunan dominasi (dominating set) dari* G *adalah* $D \subseteq V(G)$ *dimana titik-titik yang tidak berada pada* D *atau* $V(G) \setminus D$ *bertetangga dengan minimal satu titik di* D. *Kardinalitas terkecil dari himpunan dominasi dari graf* G *adalah bilangan dominasi dari* *graf G yang dinotasikan $\gamma(G)$.*

Berdasarkan Gambar 1, misal diambil $D_1 = \{v_1, v_2\}$. Diperoleh $V \setminus D_1 = \{v_3, v_4, v_5\}$ dengan titik v_3 bertetangga dengan titik v_2, titik v_4 bertetangga dengan titik v_2, dan titik v_5 bertetangga dengan titik v_1. Karena setiap titik pada $V \setminus D_1$ bertetangga dengan minimal satu titik dari D_1 maka D_1 merupakan himpunan dominasi dari graf G.

Definisi 4 [2] *Himpunan dominasi $D \subseteq V(G)$ dari sebuah graf $G = (V(G), E(G))$ disebut himpunan dominasi persekitaran transversal jika himpunan D beririsan dengan setiap himpunan persekitaran dengan kardinalitas minimum. Kardinalitas terkecilnyanya bilangan dominasi persekitaran transversal yang dinotasikan dengan $\gamma_{nt}(G)$.*

Berdasarkan Gambar 1 diperoleh himpunan persekitaran minimum dari graf G adalah $S_1 = \{v_1, v_2\}$ dan $S_2 = \{v_2, v_5\}$. Diambil $D_1 \subseteq V(G)$ merupakan himpunan dominasi dari graf G.

$D_1 \cap S_1 = \{v_1, v_2\} \cap \{v_1, v_4\} = \{v_1\}$

$D_1 \cap S_2 = \{v_1, v_2\} \cap \{v_2, v_5\} = \{v_2\}$

Karena D_1 irisan S_1 dan S_2 menghasilkan himpunan tak kosong, maka D_1 merupakan himpunan dominasi persekitaran transversal dari graf tersebut. Oleh karena kardinalitas dari D_1 adalah dua dan merupakan kardinalitas minimum dari graf G maka bilangan dominasi persekitaran transversal dari graf G adalah dua.

Lema 5 [2] Untuk setiap graf G, $\gamma(G) \leq \gamma_{nt}(G)$.

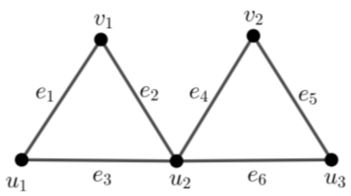
Bukti : Diberikan graf $G = (V(G), E(G))$ dan $D \subseteq V(G)$ adalah himpunan dominasi persekitaran transversal graf G. Diketahui bahwa $D \in \gamma_{nt}$*–set* dimana $|D| = \gamma_{nt}(G)$. Jika $D \in \gamma - set$ maka $|D| = \gamma(G)$, sehingga $\gamma(G) = \gamma_{nt}(G)$. Jika $D \notin \gamma - set$ maka $\gamma(G) < |D| = \gamma_{nt}(G)$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $\gamma(G) \leq \gamma_{nt}(G)$ ■.

Bilangan Dominasi Persekitaran Transversal pada *Triangular Snake Graph*

Sebelum membahas bilangan dominasi persekitaran transversal pada *triangular snake graph*, terlebih dahulu dibahas definisi dari *triangular snake graph* yang dijelaskan pada Definisi 6 sebagai berikut.

Definisi 6 [5] *Triangular snake graph T_n adalah graf yang didapatkan dari graf P_n dengan mengganti setiap sisi dari graf P_n dengan graf cycle C_3.*

Ilustrasi *triangular snake graph* dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4 Graf T_3

Triangular snake graph dengan jumlah titik berbeda memiliki bilangan dominasi persekitaran transversal yang berbeda, sehingga diperoleh Teorema berikut.

Teorema 7 *Jika T_n adalah triangular snake graph dengan $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, maka :*

$$\gamma_{nt}(T_n) = \begin{cases} 3, & n = 2 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti : Diberikan graf T_n dengan $V(T_n) = \{v_i, u_i, u_n\ ; 1 \le i \le n-1\}$ dan $E(T_n) = \{(u_i, u_{i+1}), (u_i, v_i)$ $(v_i, u_{i+1}); 1 \le i \le n-1\}$ dimana $n \ge 2$ dan $n \in \mathbb{N}$. Subgraf-subgraf induksi untuk setiap titik pada graf T_n sebagai berikut.

1. $\langle N(u_1)\rangle$ memiliki $V(\langle N(u_1)\rangle) = \{u_1, v_1, u_2\}$ dan $E(\langle N(u_1)\rangle) = \{(u_1, u_2), (u_1, v_1), (v_1, u_2\}$.
2. $\langle N(v_i)\rangle$ untuk $1 \le i \le n-1$ memiliki $V(\langle N(v_i)\rangle) = \{v_i, u_i, u_{i+1}\}$ dan $E(\langle N(v_i)\rangle = \{(v_i, u_i), (v_i, u_{i+1}), (u_i, u_{i+1})\}$
3. $\langle N(u_i)\rangle$ untuk $2 \le i \le n-1$ memiliki $V(\langle N(u_i)\rangle) = \{u_i, u_{i-1}, u_{i+1}, v_i, v_{i-1}\}$ dan $E(\langle N(u_{i+1})\rangle) = \{(u_i, u_{i-1}), (u_i, u_{i+1}), (u_i, v_i), (u_i, v_{i-1}), (u_{i-1}, v_{i-1}), (u_{i+1}, v_i)\}$.
4. $\langle N(u_n)\rangle$ memiliki $V(\langle N(u_n)\rangle) = \{v_{n-1}, u_n, u_{n-1}\}$ dan $E(\langle N(u_n)\rangle) = \{(u_{n-1}, v_{n-1}), (u_n, v_{n-1}), (u_n, u_{n-1})\}$.

Selanjutnya akan dicari bilangan dominasi persekitaran transversal dari graf T_2.

Untuk $n = 2$, didapatkan setiap titik pada graf T_2 merupakan himpunan persekitaran minimum. Sehingga himpunan persekitaran transversal dari graf T_2 adalah 3.

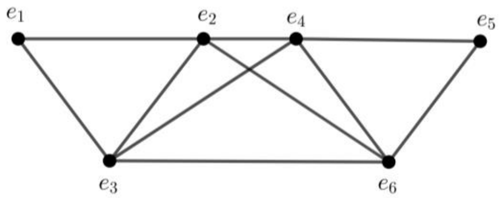
Untuk $n \ge 3$, berdasarkan subgraf induksi dari setiap titik graf T_n didapatkan titik yang mempunyai himpunan sisi terbanyak adalah setiap titik u_i untuk $2 \le i \le n-1$. Maka $\bigcup_{u_i \in S} \langle N(u_i)\rangle = T_n$ untuk $S = \{u_2, u_3, u_4, \dots, u_{n-1}\}$ dengan $|S| = n-2$ merupakan himpunan persekitaran. Perhatikan bahwa $\langle N(u_i)\rangle$ memuat dua subgraf $\langle N(v_i)\rangle$ dan $\langle N(v_{i-1})\rangle$ untuk $2 \le i \le n-1$. Sehingga $\langle N(u_3)\rangle \subseteq \langle N(u_2)\rangle \cup \langle N(u_4)\rangle$, demikian pula $\langle N(u_5)\rangle \subseteq \langle N(u_4)\rangle \cup \langle N(u_6)\rangle$. Oleh karena itu, untuk $\bigcup_{u_i \in S_1} \langle N(u_i)\rangle = T_n$ sedikitnya memuat $S_1 = \{u_2, u_4, u_6, \dots, u_{n-1}\}$. Akibatnya untuk setiap S dengan $|S| = \left\lfloor \frac{n-2}{2} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ adalah himpunan persekitaran dengan kardinalitas minimum.Dengan menggunakan cara yang sama dicari himpunan persekitaran lainnya dengan $|S| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Diperoleh setiap himpunan persekitaran dengan $|S| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ terdapat sedikitnya salah satu $u_2, u_{n-1} \in S$. Dari subgraf induksi tersebut juga didapatkan himpunan titik dengan kardinalitas terbanyak adalah setiap titik u_i untuk $2 \le i \le n-1$. Didapatkan $D = \{u_2, u_3, u_4, \dots, u_{n-1}\}$ dengan dengan $|D| = n-2$ merupakan himpunan dominasi. Perhatikan bahwa untuk setiap u_i mendominasi u_{i-1}, u_{i+1}, v_i, dan v_{i-1}, maka kardinalitas dari D sedikitnya $D_1 = \{u_2, u_4, u_6, \dots, u_{n-1}\}$. Akibatnya $|D| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ adalah himpunan dominasi dengan kardinalitas minimum. Lebih lanjut, akan ditunjukkan D merupakan himpunan dominasi persekitaran transversal. Karena S dengan $|S| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dimana terdapat sedikitnya salah satu $u_2, u_{n-1} \in S$, maka haruslah untuk setiap D yang terdapat $\{u_2, u_{n-1}\} \subseteq D$ beririsan dengan setiap S. Diambil $D = \{u_2, u_4, u_6, \dots, u_{n-1}\}$ adalah himpunan dominasi dengan $|D| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Karena terdapat D dengan $|D| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ yang memuat u_2 dan u_{n-1} maka $\gamma(T_n) = \gamma_{nt}(T_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ■.

Bilangan Dominasi Persekitaran Transversal pada *Line Graph Triangular Snake Graph*

Sebelum membahas bilangan dominasi persekitaran transversal pada *line graph* dari graf T_n terlebih dahulu dibahas definisi dari *line graph* yang dijelaskan pada Definisi 8 sebagai berikut.

Definisi 8 [6] *Diberikan $G = ((V(G), E(G))$. Line graph dari G atau graf $L(G)$ adalah graf dengan $V(L(G)) = E(G)$ dan sisi pada $E(G)$ yang bersisian membentuk sisi di graf $L(G)$.*

Ilustrasi *line graph* dari graf T_n dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5 Graf $L(T_3)$

Line graph triangular snake graph dengan jumlah titik berbeda memiliki bilangan dominasi persekitaran transversal pada *line graph triangular snake graph*, sehingga diperoleh Teorema berikut.
Teorema 9 *Jika* $L(T_n)$ *adalah line graph* T_n *dengan* $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, *maka*

$$\gamma_{nt}(L(T_n)\,) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$$

Bukti : Diberikan *line graph* T_n dengan $3n-3$ titik untuk $n \geq 2$ dengan $V\big(L(T_n)\big) = \{e_i\,; 1 \leq i \leq 3n-3\}$ dan $E\big(L(T_n)\big) = \{(e_i, e_{i+1})\,;\ 1 \leq i \leq 3n-4\} \cup \{(e_i, e_{i+2})\,; 1 \leq i \leq 3n-5, i \neq 3k,\ 1 \leq k \leq n-2\} \cup \{(e_i, e_{i+3})\,;\ i = 3k, 1 \leq k \leq n-2\} \cup \{(e_i, e_{i+4})\,;\ i = 3k-1, 1 \leq k \leq n-2\}$.
Didapatkan subgraf-subgraf induksi untuk setiap titik pada graf $L(T_n)$ adalah sebagai berikut.

1. $\langle N(e_1)\rangle$ memiliki $V(\langle N(e_1)\rangle) = \{e_1, e_2, e_3\}$ dan $E(\langle N(e_1)\rangle) = \{(e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_2, e_3)\}$.
2. $\langle N(e_3)\rangle$ memiliki $V(\langle N(e_3)\rangle) = \{e_3, e_1, e_2, e_4, e_6\}$ dan $E(\langle N(e_3)\rangle) = \{(e_3, e_1), (e_3, e_2), (e_3, e_4), (e_3, e_6), (e_1, e_3), (e_2, e_4), (e_2, e_6), (e_4, e_6)\}$.
3. $\langle N(e_i)\rangle$ untuk $i = 3n-3$ memiliki $V(\langle N(e_i)\rangle) = \{e_i, e_{i-4}, e_{i-3}, e_{i-2}, e_{i-1}\}$ dan $E(\langle N(e_i)\rangle) = \{(e_i, e_{i-4}), (e_i, e_{i-3}), (e_i, e_{i-2}), (e_i, e_{i-1}), (e_{i-1}, e_{i-2}), (e_{i-2} e_{i-4}), (e_{i-3}, e_{i-4}), (e_{i-2}, e_{i-3})\}$.
4. $\langle N(e_i)\rangle$ untuk $i = 3n-4$ memiliki $V(\langle N(e_i)\rangle) = \{e_i, e_{i-1}, e_{i+1}\}$ dan $(\langle N(e_i)\rangle) = \{(e_i, e_{i-1}), (e_i, e_{i+1}), (e_{i-1}, e_{i+1})\}$.
5. $\langle N(e_i)\rangle$ untuk $i = 3k+3, 1 \leq k \leq n-3$ memiliki $V(\langle N(e_i)\rangle) = \{e_i, e_{i-3}, e_{i-4}, e_{i-2}, e_{i-1}, e_{i+1}, e_{i+3}\}$ dan $E(\langle N(e_i)\rangle) = \{(e_i, e_{i-3}), (e_i, e_{i-4}), (e_i, e_{i-2}), (e_i, e_{i-1}), (e_i, e_{i+1}), (e_i, e_{i+3}), (e_{i-3}, e_{i-4}), (e_{i-3}, e_{i-2}), (e_{i-2}, e_{i-4}), (e_{i-2}, e_{i-4}), (e_{i-2}, e_{i-1}), (e_{i-1}, e_{i+1}), (e_{i-1}, e_{i+3}), (e_{i+3}, e_{i+1})\}$.
6. $\langle N(e_i)\rangle$ untuk $i = 3k-1, 1 \leq k \leq n-2$ memiliki $V(\langle N(e_i)\rangle) = \{e_i, e_{i-1},\ e_{i+1}, e_{i+2}, e_{i+4}\}$ dan $E(\langle N(e_i)\rangle) = \{(e_i, e_{i-1}), (e_i, e_{i+1}), (e_i, e_{i+2}),\ (e_{i+1}, e_{i+2}), (e_{i-1}, e_{i+1}), (e_{i+1}, e_{i+4}),\ (e_{i+2}, e_{i+4}), (e_i, e_{i+4})\}$.
7. $\langle N(e_i)\rangle$ untuk $i = 3k+1, 1 \leq k \leq n-2$ memiliki $V(\langle N(e_i)\rangle) = \{e_i, e_{i-2}, e_{i-1}, e_{i+1}, e_{i+2}\}$ dan $E(\langle N(e_i)\rangle) = \{(e_i, e_{i-2}), (e_i, e_{i-1}), (e_i, e_{i+1}), (e_{i-1}, e_{i+2}), (e_{i-2}, e_{i-1}), (e_{i-2}, e_{i+2}),\ (e_{i+1}, e_{i+2}), (e_i, e_{i+2})\}$.

Selanjutnya akan dicari bilangan dominasi persekitaran transversal pada graf $L(T_2)$.

Untuk $n = 2$, didapatkan setiap titik pada graf $L(T_2)$ merupakan himpunan persekitaran minimum. Sehingga himpunan persekitaran transversal dari graf $L(T_2)$ adalah 3.

Untuk $n \geq 3$, berdasarkan subgraf induksi dari setiap titik graf $L(T_n)$ didapatkan titik yang mempunyai himpunan sisi terbanyak adalah setiap titik e_i untuk $i = 3k+3, 1 \leq k \leq n-3$. Maka $\bigcup_{e_i \in S}\langle N(e_i)\rangle \neq L(T_n)$ untuk $S = \{e_i, i = 3k+3\,;\ 1 \leq k \leq n-3\}$ dengan $|S| = n-3$ bukan merupakan himpunan persekitaran. Perhatikan bahwa $\{e_1, e_{3n-4}\} \nsubseteq S$. Himpunan S agar membentuk himpunan persekitaran haruslah ditambah subgraf induksi e_1 dan e_{3n-4}. Sehingga didapatkan $S_1 = \{e_1, e_{3n-4}, e_i\,;\ i = 3k+3, 1 \leq k \leq n-3\}$ dengan $|S_1| = n-1$ adalah himpunan persekitaran dengan kardinalitas minimum. Dengan menggunakan cara yang sama dicari himpunan persekitaran lainnya dengan $|S| = n-1$. Diperoleh untuk setiap $S \subseteq V(T_n)$ terdapat salah satu diantara $e_i, e_{i+1}, e_{i+2} \in S$ dari setiap $i = 3k-2, 1 \leq k \leq n-1$.

Dari subgraf induksi tersebut juga didapatkan himpunan titik terbanyak adalah setiap titik e_i untuk $i = 3k + 3, 1 \leq k \leq n - 3$. Diperoleh $D = \{e_i\}$ untuk $i = 3k + 3, 1 \leq k \leq n - 3$ bukan merupakan himpunan dominasi karena terdapat titik e_1 dan e_{3n-4} yang tidak terdominasi D. Selanjutnya diambil $D_1 = \{e_i, i = 3k - 1\ ;\ 1 \leq k \leq n - 2\}$ dengan $|D_1| = n - 2$. Maka didapatkan D_1 bukan merupakan himpunan dominasi karena terdapat e_{3n-4} yang belum terdominasi D_1. Perhatikan bahwa titik e_{3n-3} mendominasi titik $e_{3n-4}, e_{3n-5}, e_{3n-6}$ dan e_{3n-7}. Sehingga didapatkan $D_2 = \{e_{3n-4}, e_i\ ; i = 3k - 1, 1 \leq k \leq n - 1\}$ dengan $|D_2| = n - 2$ adalah himpunan dominasi. Karena himpunan dominasi D_2 untuk setiap i mempunyai satu titik yang terdominasi oleh dua elemen pada D_2, maka kardinalitas dari D sedikitnya $\left\lceil \frac{n-2}{2} + 1 \right\rceil$. Oleh karena itu, untuk setiap D dengan $|D| = \left\lceil \frac{n-2}{2} + 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ himpunan dominasi dengan kardinalitas minimum.

Lebih lanjut, akan ditunjukkan D merupakan himpunan dominasi persekitaran transversal. Karena S dengan $|S| = n - 1$ dimana terdapat sedikitnya salah satu e_i, e_{i+1}, e_{i+2} dari setiap dari setiap $i = 3k - 2, 1 \leq k \leq n - 1$ adalah himpunan persekitaran minimum, maka haruslah untuk setiap D yang terdapat salah satu $\{e_i, e_{i+1}, e_{i+2}\} \subseteq D$ dari setiap dari setiap $i = 3k - 2, 1 \leq k \leq n - 1$ beririsan dengan setiap S. Diambil D dengan kardinalitas minimum. Karena setiap D dengan kardinalitas minimum memuat salah satu e_i, e_{i+1}, e_{i+2} maka D yang beririsan dengan setiap S paling sedikit mempunyai kardinalitas $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$. Sehingga $|D| = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$ merupakan bilangan persekitaran transversal dari graf $L(T_n)$ untuk $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ ■.

KESIMPULAN

Diberikan $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf sederhana dan $D \subseteq V(G)$. Himpunan D adalah himpunan dominasi persekitaran transversal dalam G jika himpunan D termasuk himpunan dominasi dengan syarat D harus beririsan dengan himpunan persekitaran yang mempunyai kardinalitas terkecil. Bilangan dominasi persekitaran transversal pada graf T_n dan graf $L(T_n)$ dapat diperoleh dengan cara mencari himpunan dominasi persekitaran transversal satu persatu dari kedua graf tersebut sehingga diperoleh pola bilangan dominasi persekitaran transversal pada masing-masing graf, sehingga diperoleh:

1. $\gamma_{nt}(T_n) = \begin{cases} 3, & n = 2 \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & n \geq 3, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$

2. $\gamma_{nt}(L(T_n)) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$, untuk $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan hasil tersebut diperoleh bilangan dominasi persekitaran transversal pada graf T_n sama dengan bilangan dominasinya, sedangkan bilangan dominasi persekitaran transversal pada graf $L(T_n)$ lebih besar dari bilangan dominasinya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] F. Harary, *Graph Theory*, Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[2] M. P. Sumathi, "On Neighbourhood Transversal Domination in Graphs," *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, vol. 9, no. 5, pp. 243-252, 2014.

[3] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, Fundamentals of Domination in Graphs, New York: Marcel Dekker, Inc, 1998.

[4] L. Ratnasari, B. Surarso, Harjito and U. Maunah, "Bilangan Dominasi Persekitaran Transversal pada Graf Lengkap dan Graf Bipartiti Lengkap," *Jurnal Matematika*, vol. 20, no. 1, pp. 20-26, 2017.

[5] A. J. Lissie and S. Jaya, "Triple Connected Domination Number For Some Special Graphs," *International Journal of Current Research and Modern Education*, pp. 10-12, 2017.

[6] I. Roza, Narwen and Zulakmal, "Graf Garis (Line Graph) dari Graf Siklus, Graf Lengkap, dan Graf Bintang," *Jurnal Matematika UNANd*, vol. 3, no. 2, pp. 1-4, 2014.

[7] J. M. Harris, J. L. Hirst and M. J. Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, New York: Sringer Sciences Media, 2000.

YUNI ELISA : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak,
yuni.elisa@student.untan.ac.id

NILAMSARI KUSUMASTUTI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak,
nilamsari@math.untan.ac.id

FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak,
fransiskusfran@math.untan.ac.id