Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 11, No. 5 (2022), hal 705-714.

OPTIMALISASI PRODUKSI BINGKAI FOTO DENGAN MASALAH *INTEGER LINEAR PROGRAMMING* MENGGUNAKAN METODE REDUKSI VARIABEL (Studi Kasus: CV. Meili Photo)

Wahyuni Ardila, Yundari, Meliana Pasaribu

INTISARI

Salah satu perusahaan yang bergerak dalam bidang pembuatan bingkai foto adalah CV. Meili Photo. Keterbatasan bahan baku yang tersedia menjadi masalah produksi bingkai foto di CV tersebut. Akibatnya keuntungan yang diperoleh CV tersebut belum optimal. Oleh karena itu, perlu ditentukan banyaknya bingkai foto yang diproduksi berdasarkan bahan baku yang tersedia. Permasalahan yang ada dimodelkan ke dalam model integer linear programming. Model integer linear programming merupakan model matematika yang hasil penyelesaiannya berupa bilangan bulat. Model tersebut selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan metode Reduksi Variabel. Hal ini dilakukan dengan mensubstitusikan nilai minimum dari bilangan bulat terbesar yang diperoleh kedalam fungsi tujuan. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh solusi optimal yaitu bingkai foto yang diproduksi berukuran 24R sebanyak 6 buah dengan keuntungan sebesar Rp. 600.000,00.

Kata Kunci: *bilangan bulat, nilai minimum, bahan baku.*

PENDAHULUAN

CV. Meili Photo merupakan badan usaha yang bergerak dalam bidang pembuatan bingkai foto. Bingkai foto yang diproduksi berukuran 8R, 10R, 12R, 20R, dan 24R. Keterbatasan bahan baku yang tersedia menjadi masalah produksi bingkai foto. Oleh karena itu, perlu ditentukan banyaknya bingkai foto yang diproduksi berdasarkan bahan baku yang tersedia. Hal ini tentunya mempertimbangkan banyaknya permintaan dari konsumen. Permasalahan ini merupakan salah satu masalah dalam pemrograman linear. Pemrograman linear merupakan metode matematika dalam mengalokasikan sumber daya yang tersedia untuk mencapai tujuan utama seperti memaksimalkan keuntungan atau meminimalkan biaya [1]. Dikarenakan jumlah produksi merupakan bilangan bulat, maka masalah tersebut merupakan masalah *integer linear programming*.

Masalah *integer linear programming* dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Reduksi Variabel. Metode ini dilakukan dengan mensubstitusikan nilai minimum dari bilangan bulat terbesar yang diperoleh. Metode Reduksi Variabel memiliki keuntungan yaitu tidak perlu menambahkan kendala baru atau variabel baru [2]. Berdasarkan penelitian Elfira Safitri, dkk [3] menyimpulkan bahwa dengan menggunakan metode reduksi variabel mendapatkan solusi optimal dengan semua variabel keputusan bernilai bilangan bulat dengan perhitungan yang lebih sederhana tanpa harus menambah kendala ataupun membuat percabangan. Selain itu menurut Pesti Novtaria, dkk [4] metode Reduksi Variabel memiliki keuntungan yaitu tidak perlu menggunakan metode Simpleks atau Dual Simpleks, banyak sub masalah dapat diprediksi dan perhitungannya sederhana.

Masalah produksi bingkai foto pada CV. Meili Photo dimodelkan ke dalam *integer linear programming*. Model tersebut kemudian diselesaikan dengan metode Reduksi Variabel.

INTEGER LINEAR PROGRAMMING

Masalah pemrograman linear dengan bilangan bulat merupakan permasalahan pemrograman linear dengan tambahan syarat variabel keputusan merupakan bilangan bulat. Bentuk umum dari model *integer linear programming* sebagai berikut: [5]

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

dengan kendala: (1)

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \ \{\geq \text{atau } \leq \text{atau } =\} b_j, \text{untuk } j = 1,2,\cdots,m$$

Untuk $x_i \geq 0$, dan $x_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

Fungsi Z merupakan fungsi tujuan, c_i merupakan koefisen fungsi tujuan pada variabel ke i, x_i merupakan variabel keputusan ke i, a_{ij} merupakan koefisien fungsi kendala pada variabel ke i kendala ke j, dan b_j merupakan jumlah sumber daya yang tersedia pada kendala ke j. Masalah integer linear programming dapat diselesaikan dengan beberapa metode seperti metode simpleks, branch and bound, dan cutting plane. Pada penelitian ini metode yang digunakan adalah metode reduksi variabel.

METODE REDUKSI VARIABEL

Metode reduksi variabel merupakan suatu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah *integer linear programming.* Adapun langkah-langkah penyelesaian untuk memperoleh solusi yang optimal pada kasus maksimum dari masalah *integer linear programming* untuk n variabel dengan metode Reduksi Variabel adalah sebagai berikut [2]:

1. Misalkan masalah *integer linear programming* pada Persamaan (1) sebagai (P). Penentuan nilai minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar x_i dimana $i = 1, 2, \ \ldots, n$ yang dinotasikan dengan nilai kemungkinan x_i yaitu x_i^*, menggunakan Persamaan:
$$x_i^* = \min\left\{\left\lfloor\frac{b_j}{a_{ij}}\right\rfloor, j = 1,2,,\cdots,m\right\};\ i = 1,2,\cdots,n \tag{2}$$
Apabila hasil nilai minimum dari x_i^* sama maka dipilih salah satu nilai positif. Apabila hasil minimum dari x_i^* berbeda maka pilih nilai positif terkecil. Nilai $\bar{x}_r \in \{0,1,2,\cdots,U_r\}$, U_r berhubungan dengan $\bar{x}_r$, dan U_r merupakan nilai bilangan bulat terbesar dari $\bar{x}_r$.
2. Misalkan masalah *integer linear programming* sebagai $P(\bar{x}_r)$ untuk setiap $\bar{x}_r \in \{0,1,2,\ldots,U_r\}$ yang melibatkan $n-1$ variabel x_i dimana $i \neq r$. Sehingga fungsi tujuan memaksimumkan dalam permasalahan integer linear programming dibentuk menjadi:
$$Maks\ Z = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{n} c_i x_i$$
dengan kendala : (3)
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i \leq b_j - a_r \bar{x}_r \text{, untuk } j = 1, 2, \cdots, m$$
Untuk $x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, i \neq r, i = 1,2,\cdots,n$
3. Menentukan nilai minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_i yang dinotasikan dengan x_i^*, $i \neq r$ dalam permasalahan $P(\bar{x}_r)$ untuk setiap $\bar{x}_r \in \{0,1,2,\cdots,U_r\}$.
Kemudian substitusi nilai $\bar{x}_r \in \{0,1,2,\cdots,U_r\}$ ke persamaan berikut:
$$x_i^* = \min\left\{\left\lfloor\frac{b_j - a_r\bar{x}_r}{a_{ij}}\right\rfloor, j = 1,2,\cdots,m\right\}, i = 1,2,\cdots,n \tag{4}$$
Apabila hasil nilai minimum dari x_i^* sama maka pilih salah atu nilai positif. Apabila hasil nilai minimum dari x_i^* berbeda maka pilih nilai positif terkecil. Nilai $\bar{x}_t \in \{0,1,2,\cdots,U_t\}$, U_t berhubungan dengan x_i^*, dimana U_t adalah nilai bilangan bulat terbesar dari $\bar{x}_t$ yaitu x_i^*.

4. Misalkan masalah *integer linear programming* sebagai $P(\bar{x}_r, \bar{x}_t\,)$ untuk setiap $\bar{x}_r \in \{0,1,2,\cdots, U_r\}$ dan $\bar{x}_t \in \{0,1,2,\cdots, U_t\}$ yang melibatkan $n-2$ variabel x_i dimana $i \neq r, t$. Sehingga fungsi tujuan memaksimumkan dalam permasalahan integer linear programming dibentuk menjadi:
$$Maks\ Z = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,t}}^{n} c_i x_i$$
dengan kendala : (5)
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i \leq\ b_j - a_r\bar{x}_r - a_t\bar{x}_t\ \text{, untuk } j = 1, 2, \cdots, m$$
untuk $x_i \geq 0,\ \ x_i \in \mathbb{Z}, i \neq r, t,\ i = 1, 2, \cdots, n.$
5. Setelah langkah 3 dan 4dilakukan sehingga terbentuk sebuah himpunan dari permasalahan *integer linear programming* yaitu $P(\bar{x}_r, \bar{x}_t, \cdots, \bar{x}_k)$ untuk setiap $\bar{x}_k \in \{0, 1, 2, \cdots, U_k\}$ yang melibatkan beberapa variabel keputusan yang telah diperoleh.
6. Menyelesaikan sebuah himpunan dari permasalahan integer linear programming pada langkah 5 dengan cara:
$$Maks\ Z = \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,t,\cdots,k}}^{n} c_i\, x_i\ ; (\bar{x}_r, \bar{x}_t, \cdots, \bar{x}_k) \in W \right\}$$
dengan (6)
$$W = \left\{ (\bar{x}_r, \bar{x}_t, \cdots, \bar{x}_k)\ |\bar{x}_k \in \{0, 1, 2, \cdots, U_k\}\ dan\ x_i^* = \min\left\{ \left\lfloor \frac{b_j - a_k\bar{x}_k}{a_{ij}} \right\rfloor \right\} \right\}$$
Substitusi $\bar{x}_k \in \{0, 1, 2, \cdots, U_k\}$ ke dalam Persamaan (7):
$$x_i^* = \min\left\{ \left\lfloor \frac{b_j - a_k\bar{x}_k}{a_{ij}} \right\rfloor \right\} \text{dengan } j = 1, 2, \cdots, m\ ; i = 1, 2, \cdots, n \qquad (7)$$
7. Kemudian mencari calon solusi optimum Z. solusi optimum untuk kasus maksimum diperoleh dengan cara memilih Z yang bernilai positif terbesar.

GAMBARAN KASUS DI CV. MEILI PHOTO

CV. Meili Photo memproduksi bingkai foto dengan ukuran 4R, 5R, 6R, 8R, 10R, 11R, 12R, 20R, 24R, dan 40R. Pada penelitan ini diteliti jenis ukuran bingkai foto yang paling banyak diminati dipasaran yaitu ukuran 8R, 10R, 12R, 20R, 24R. Keuntungan masing-masing ukuran bingkai foto dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Keuntungan Produksi Bingkai Foto Berdasarkan Ukuran

i	Ukuran (x_i)	Keuntungan (c_i)
1	8 R	Rp. 5.000
2	10R	Rp. 15.000
3	12R	Rp. 35.000
4	20R	Rp. 75.000
5	24R	Rp. 100.000

(*Sumber: CV.Meili Photo)*

Berdasarkan Tabel 1 masing-masing ukuran bingkai foto mempunyai keuntungan yang berbeda-beda. Untuk memproduksi bingkai foto dengan berbagai ukuran diperlukan bahan baku kayu, mdf, kaca, paku flexi, paku siku yang dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Bahan Baku Produksi Bingkai Foto

No	Bahan baku	Ukuran					Kapasitas
		8R	10R	12R	20R	24R	
1	Kayu	100cm	150cm	150cm	200cm	250cm	1500cm
2	Mdf	300cm^2	600cm^2	1000cm^2	2400cm^2	3000cm^2	60500cm^2
3	Kaca	300cm^2	600cm^2	1000cm^2	2400cm^2	3000cm^2	30000cm^2
4	Paku Flexi	6 unit	8 unit	10 unit	16 unit	20 unit	150 unit
5	Paku Siku	4 unit	6 unit	8 unit	10 unit	12 unit	150 unit

(Sumber: CV.Meili Photo)

Berdasarkan Tabel 2 banyaknya bahan baku yang digunakan untuk memproduksi bingkai foto yaitu kayu sepanjang, 1500 cm, mdf sepanjang 60500 cm^2, kaca sepanjang 30000 cm^2, paku flexi sebanyak 150 unit, dan paku siku sebanyak 150 unit.

PENGKONSTRUKSIAN MASALAH KE DALAM MODEL MATEMATIKA

Permasalahan integer linear programming diformulasikan ke dalam bentuk program linear. Masalah program linear tersebut terdiri dari variabel keputusan, fungsi tujuan dan fungsi kendala. Variabel keputusan dalam masalah ini adalah banyaknya bingkai foto yang diproduksi (buah).

Berdasarkan Tabel 1, didapat 5 variabel keputusan yaitu x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Fungsi tujuan:

$$Z_{maks} = 5000x_1 + 15000x_2 + 35000x_3 + 75000x_4 + 100000x_5 \tag{8}$$

Selanjutnya fungsi kendala bahan baku yang tersedia yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 100x_1 + 150x_2 + 150x_3 + 200x_4 + 250x_5 &\leq 1500 \\ 300x_1 + 600x_2 + 1000x_3 + 2400x_4 + 3000x_5 &\leq 60500 \\ 300x_1 + 600x_2 + 1000x_3 + 2400x_4 + 3000x_5 &\leq 30000 \\ 6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 16x_4 + 20x_5 &\leq 150 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 12x_5 &\leq 150 \\ x_i &\geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \cdots, 5 \end{aligned} \tag{9}$$

PENYELESAIAN MASALAH DI CV. MEILI PHOTO DENGAN METODE REDUKSI VARIABEL

Langkah 1: Penentuan nilai minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar x_i yang dinotasikan dengan x_i^*. Beberapa nilai bilangan bulat terbesar x_i^* yang mungkin untuk permasalahan tersebut yaitu $x_1, x_2, \cdots, x_5$. Nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_1 berdasarkan Persamaan (2) diperoleh $x_1^* = 15$. Perhitungan dilanjutkan, sehingga diperoleh nilai $x_2^* = 10, x_3^* = 10$, $x_4^* = 7, x_5^* = 6$. Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh banyaknya produksi bingkai foto dengan nilai minimum bilangan bulat terbesar yaitu $x_5^* = 6$. Nilai $\bar{x}_r = x_5 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,dimana 6 merupakan nilai bilangan bulat dari $\bar{x}_r$ yaitu x_5^*.

Langkah 2: Penyusunan masalah *Integer Linear Programming* dalam x_5 $P(x_5)$. Dimana x_5 merupakan nilai bilangan bulat terbesar berdasarkan perhitungan pada langkah 1, sehingga fungsi tujuan (Persamaan 8) memiliki kendala:

$$\begin{aligned} 100x_1 + 150x_2 + 150x_3 + 200x_4 &\leq 1500 - 250x_5 \\ 300x_1 + 600x_2 + 1000x_3 + 2400x_4 &\leq 60500 - 3000x_5 \\ 300x_1 + 600x_2 + 1000x_3 + 2400x_4 &\leq 30000 - 3000x_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 16x_4 &\leq 150 - 20x_5 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 &\leq 150 - 12x_5 \\ x_i &\geq 0, x_i \in \mathbb{Z},, i = 1,2,\cdots,5 \end{aligned}$$

Langkah 3: Penentuan nilai minimum dari bilangan bulat terbesar pada permasalahan $P(x_5)$. Dan mencari nilai bilangan bulat terbesar dari x_1, x_2, x_3, x_4. Karena $x_5 = 6$ adalah jumlah maksimum bingkai foto ukuran 24R yang mungkin diproduksi berdasarkan batasan sumber daya yang ada. Dengan demikian berarti terdapat nilai kemungkinan yang ada pada x_5 yaitu $0, 1, 2, \cdots, 6$.

a. Nilai bilangan bulat terbesar dari x_1 berdasarkan Persamaan (4) untuk $x_5 = 0$ diperoleh $x_1^* = 15$.
Perhitungan dilanjutkan, sehingga diperoleh:

Jika $x_5 = 1$ maka $x_1^* = \min\{12, 192,90,21,34\} = 12$
Jika $x_5 = 2$ maka $x_1^* = \min\{10, 181,80,17,31\} = 10$
Jika $x_5 = 3$ maka $x_1^* = \min\{7, 171, 70, 15, 28\} = 7$
Jika $x_5 = 4$ maka $x_1^* = \min\{5, 161, 60, 11, 25\} = 5$
Jika $x_5 = 5$ maka $x_1^* = \min\{2, 151, 50, 8, 23\} = 2$
Jika $x_5 = 6$ maka $x_1^* = \min\{0, 141, 40, 5, 19\} = 0$

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh nilai minimum terbesar dari x_1^* adalah 2, ketika $x_5 = 5$.

b. Nilai bilangan bulat terbesar dari x_2 berdasarkan Persamaan (4) untuk $x_5 = 0$ diperoleh $x_2^* = 10$.
Perhitungan dilanjutkan, sehingga diperoleh:

Jika $x_5 = 1$ maka $x_2^* = \min\{8, 95, 45, 16, 22\} = 8$
Jika $x_5 = 2$ maka $x_2^* = \min\{6, 90, 40, 13, 21\} = 6$
Jika $x_5 = 3$ maka $x_2^* = \min\{5 ,85, 35, 10, 18 \} = 5$
Jika $x_5 = 4$ maka $x_2^* = \min\{5 ,85, 35, 10, 18 \} = 5$
Jika $x_5 = 5$ maka $x_2^* = \min\{1, 75, 25, 6, 14 \} = 1$
Jika $x_5 = 6$ maka $x_2^* = \min\{0, 70, 20, 3, 13\} = 0$

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh nilai minimum terbesar dari x_2^* adalah 1, ketika $\mathrm{x}_5 = 5$.

c. Nilai bilangan bulat terbesar dari x_3 berdasarkan Persamaan (4) untuk $\mathrm{x}_5 = 0$ diperoleh $\mathrm{x}_3^* = 10$.
Perhitungan dilanjutkan, sehingga diperoleh:

Jika $x_5 = 1$ maka $x_3^* = \min\{8, 57, 27,13,17\} = 8$
Jika $x_5 = 2$ maka $x_3^* = \min\{6, 54, 24, 11,15\} = 6$
Jika $x_5 = 3$ maka $x_3^* = \min\{5,51,218,9,14\} = 5$
Jika $x_5 = 4$ maka $x_3^* = \min\{3, 48, 18, 7, 12\} = 3$
Jika $x_5 = 5$ maka $x_3^* = \min\{1, 45, 15, 5, 11\} = 1$
Jika $x_5 = 6$ maka $x_3^* = \min\{0, 43, 12, 3, 10\} = 0$

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh nilai minimum terbesar dari x_3^* adalah 1, ketika $x_5 = 5$.

d. Nilai bulangan bulat terbesar dari x_4 berdasarkan Persamaan (4) untuk $x_5 = 0$ diperoleh $x_4^* = 7$.
Perhitungan dilanjutkan, sehingga diperoleh:

Jika $x_5 = 1$ maka $\mathrm{x}_4^* = \min\{6, 23, 10, 7, 13\} = 6$
Jika $x_5 = 2$ maka $\mathrm{x}_4^* = \min\{5, 22, 10, 6, 12\} = 5$
Jika $x_5 = 3$ maka $\mathrm{x}_4^* = \min\{3, 20, 8, 7, 10\} = 3$
Jika $x_5 = 4$ maka $\mathrm{x}_4^* = \min\{2, 19, 7, 4, 10\} = 2$
Jika $x_5 = 5$ maka $\mathrm{x}_4^* = \min\{1, 18, 6, 3, 9\} = 1$
Jika $x_5 = 6$ maka $\mathrm{x}_4^* = \min\{0, 17, 4, 1, 7\} = 0$

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh nilai minimum terbesar dari x_4^* adalah 1. Ketika $x_5 = 5$. Nilai minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar yang diperoleh $x_1^* = 2, x_2^* = 1, x_3^* = 1, x_4^* = 1$. Dengan demikian dipilih salah satu variabel keputusan yaitu $x_4^* = 1$. Nilai $\bar{x}_t = x_4 \in \{0, 1\}$, dimana 1 merupakan nilai bilangan bulat terbesar dari $\bar{x}_t$ yaitu x_4^*.

Langkah 4: Misalkan masalah *integer linear programming* $P(\bar{x}_r, \bar{x}_t)$ untuk setiap $\bar{x}_r = x_5 \in \{0,1,2,\cdots,6\}$ dan $\bar{x}_t = x_4 \in \{0,1\}$ yang melibatkan $5-2$ variabel x_i dimana $i \neq r, t$.
Berdasarkan Persamaan (5) permasalahan *integer linear programming* dengan fungsi tujuan (Persamaan 8) memiliki
kendala:

$$
\begin{aligned}
100x_1 + 150x_2 + 150x_3 &\leq 1500 - 250x_5 - 200x_4 \\
300x_1 + 600x_2 + 1000x_3 &\leq 60500 - 3000x_5 - 2400x_4 \\
300x_1 + 600x_2 + 1000x_3 &\leq 30000 - 3000x_5 - 2400x_4 \\
6x_1 + 8x_2 + 10x_3 &\leq 150 - 20x_5 - 16x_4 \\
4x_1 + 6x_2 + 8x_3 &\leq 150 - 12x_5 - 10x_4 \\
x_i &\geq 0, x_i \in \mathbb{Z},, i = 1,2,\cdots,5
\end{aligned}
$$

Langkah 5: Menentukan nilai minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_i yang dinotasikan dengan $x_i^*, i \neq r, t$ dalam permasalahan $P(\bar{x}_r, \bar{x}_t)$ untuk setiap $\bar{x}_r = x_5 \in \{0,1,2,\cdots,6\}$ dan $\bar{x}_t = x_4 \in \{0,1\}$. Kemudian subsitusi $x_5 \in \{0,1,2,\cdots,6\}$ dan $x_4 \in \{0,1\}$ ke dalam Persamaan (5):

a. Nilai bilangan bulat terbesar dari x_1^* berdasarkan Persamaan (7) untuk $x_5 = x_4 = 0$ diperoleh $x_1^* = 15$. Perhitungan dilanjutkan, sehingga diperoleh:

Jika $x_5 = 0, x_4 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{13, 193, 92,22, 35\} = 13$
Jika $x_5 = 1, x_4 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{12, 191, 90,21, 34\} = 1$
Jika $x_5 = 1, x_4 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{10, 183, 82,19, 32\} = 10$
Jika $x_5 = 2, x_4 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{10, 183, 82,19, 32\} = 10$
Jika $x_5 = 2, x_4 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{8, 173, 72,15, 29\} = 8$
Jika $x_5 = 3, x_4 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{7, 171, 70,15, 28\} = 7$
Jika $x_5 = 3, x_4 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{5, 163, 62,12, 26\} = 5$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{5, 161, 60,11, 25\} = 5$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{3, 154, 52,9, 23\} = 3$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{2, 151, 50,8, 22\} = 3$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{0, 143,42,5, 20\} = 0$
Jika $x_5 = 6, x_4 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{0,141,40,5,19\} = 0$
Jika $x_5 = 6, x_4 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{0,133,32,2,17\} = 0$

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh nilai minimum terbesar dari x_1^* adalah 2. Ketika $x_5 = 5$ dan $x_4 = 0$.

b. Nilai bilangan bulat terbesar dari x_2^* berdasarkan Persamaan (7) untuk $x_5 = x_4 = 0$ diperoleh $x_2^* = 10$. Perhtingan dilanjutkan, sehingga diperoleh:

Jika $x_5 = 0, x_4 = 1,$ maka $x_2^* = \min\{8,96,46,16,23\} = 8$
Jika $x_5 = 1, x_4 = 0,$ maka $x_2^* = \min\{8,95,45,16,23\} = 8$
Jika $x_5 = 1, x_4 = 1,$ maka $x_2^* = \min\{7,91,41,14,21\} = 7$
Jika $x_5 = 2, x_4 = 0,$ maka $x_2^* = \min\{6,90,40,13,21\} = 6$
Jika $x_5 = 2, x_4 = 1,$ maka $x_2^* = \min\{5,86,36,11,19\} = 5$
Jika $x_5 = 3, x_4 = 0,$ maka $x_2^* = \min\{5,85,35,11,19\} = 5$
Jika $x_5 = 3, x_4 = 1,$ maka $x_2^* = \min\{3,81,31,9,16\} = 3$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 0,$ maka $x_2^* = \min\{3,80,30,8,17\} = 3$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 1,$ maka $x_2^* = \min\{2,76,26,6,15\} = 2$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 0,$ maka $x_2^* = \min\{1,75,25,6,15\} = 1$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 1,$ maka $x_2^* = \min\{0,71,21,4,13\} = 0$
Jika $x_5 = 6, x_4 = 0,$ maka $x_2^* = \min\{0,71,21,4,13\} = 0$
Jika $x_5 = 6, x_4 = 1,$ maka $x_2^* = \min\{0,66,32,1,11\} = 0$

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh nilai minimum terbesar dari x_2^* adalah 1. Ketika $x_5 = 5$ dan $x_4 = 0$.

c. Nilai bilangan bulat terbesar dari x_3^* berdasarkan Persamaan (7) untuk $x_5 = x_4 = 0$ diperoleh $x_3^* = 10$. Perhitungan dilanjutkan, sehingga diperoleh:

Jika $x_5 = 0, x_4 = 1,$ maka $x_3^* = \min\{8,58,27,13,17\} = 8$
Jika $x_5 = 1, x_4 = 0,$ maka $x_3^* = \min\{8,57,27,13,17\} = 8$
Jika $x_5 = 1, x_4 = 1,$ maka $x_3^* = \min\{7,55,24,11,16\} = 7$
Jika $x_5 = 2, x_4 = 0,$ maka $x_3^* = \{6,54,24,11,15\} = 6$
Jika $x_5 = 2, x_4 = 1,$ maka $x_3^* = \{5,52,21,9,14\} = 5$
Jika $x_5 = 3, x_4 = 0,$ maka $x_3^* = \{5,51,21,9,14\} = 5$
Jika $x_5 = 3, x_4 = 1,$ maka $x_3^* = \{3,49,18,7,13\} = 3$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 0,$ maka $x_3^* = \{3,48,18,7,12\} = 3$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 1,$ maka $x_3^* = \{2,46,15,7,11\} = 2$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 0,$ maka $x_3^* = \{1,45,15,5,11\} = 1$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 1,$ maka $x_3^* = \{0,43,12,3,10\} = 0$
Jika $x_5 = 6, x_4 = 0,$ maka $x_3^* = \{0,42,12,3,9\} = 0$
Jika $x_5 = 6, x_4 = 1,$ maka $x_3^* = \{0,40,9,1,8\} = 0$

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh nilai minimum terbesar dari x_3^* adalah 1. Ketika $x_5 = 5$ dan $x_4 = 0$. Nilai minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar yang diperoleh yaitu $x_1^* = 2,\ x_2^* = 1, x_3^* = 1$. Dengan demikian dipilih salah satu variabel keputusan yaitu $x_2^* = 1$. $\bar{x}_s = x_2 \in \{0, 1\}$. Dimana 1 adalah nilai bilangan bulat terbesar dari $\bar{x}_s$ yaitu x_2^*.

Langkah 6: Misalkan masalah *integer linear programming* sebagai $P\ (\bar{x}_r, \bar{x}_t, \bar{x}_s)$ untuk setiap $\bar{x}_r = x_5 \in \{0, 1, 2, \cdots, 6\}$, $\bar{x}_t = x_4 \in \{0, 1\}$ dan $\bar{x}_s \in \{0, 1\}$ yang melibatkan $5 - 3$ variabel x_i dimana $i \neq r, t, s$. Berdasarkan Persamaan (6) permasalahan *integer linear programming* dengan fungsi tujuan (Persamaan 8) memiliki kendala:

$$\begin{aligned}
100x_1 + 150x_3 &\leq 1500 - 250x_5 - 200x_4 - 150x_2 \\
300x_1 + 1000x_3 &\leq 60500 - 3000x_5 - 2400x_4 - 600x_2 \\
300x_1 + 1000x_3 &\leq 30000 - 3000x_5 - 2400x_4 - 600x_2 \\
6x_1 + 10x_3 &\leq 150 - 20x_5 - 16x_4 - 8x_2 \\
4x_1 + 8x_3 &\leq 150 - 12x_5 - 10x_4 - 6x_2 \\
x_i &\geq 0, x_i \in \mathbb{Z},, i = 1,2, \cdots, 5
\end{aligned}$$

Langkah 7: Menentukan nilai minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_i^*, $i \neq r, t, s$ dalam permasalahan $P\ (\bar{x}_r, \bar{x}_t, \bar{x}_s)$ untuk setiap $\bar{x}_r = x_5 \in \{0, 1, 2, \cdots, 6\}$, $\bar{x}_t = x_4 \in \{0, 1\}$ dan $\bar{x}_s = x_2 \in \{0, 1\}$. Kemudian subsitusi $x_5 \in \{0, 1, 2, \cdots, 6\}$, $x_4 \in \{0, 1\}$, dan $x_2 \in \{0, 1\}$ ke dalam Persamaan (4):

a. Nilai bilangan bulat terbesar dari x_1^* berdasarkan Persamaan (7) untuk $x_5 = x_4 = x_2 = 0$ diperoleh $x_1^* = 15$.

Perhitungan dilanjutkan, sehingga diperoleh:

Jika $x_5 = 0, x_4 = 1, x_2 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{13,193,92,22,35\} = 13$
Jika $x_5 = 0, x_4 = 0, x_2 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{13,199,98,23,36\} = 13$
Jika $x_5 = 0, x_4 = 1, x_2 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{11,191,90,21,33\} = 11$
Jika $x_5 = 1, x_4 = 0, x_2 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{12,191,90,21,34\} = 12$
Jika $x_5 = 1, x_4 = 1, x_2 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{10,183,82,19,32\} = 10$
Jika $x_5 = 1, x_4 = 0, x_2 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{11,189,88,20,33\} = 11$
Jika $x_5 = 1, x_4 = 1, x_2 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{9,181,80,17,30\} = 9$
Jika $x_5 = 2, x_4 = 0, x_2 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{10,181,80,18,31\} = 10$
Jika $x_5 = 2, x_4 = 1, x_2 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{8,173,72,15,29\} = 8$
Jika $x_5 = 2, x_4 = 0, x_2 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{8,179,78,17,30\} = 8$
Jika $x_5 = 2, x_4 = 1, x_2 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{6,171,70,14,27\} = 6$
Jika $x_5 = 3, x_4 = 0, x_2 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{7,171,70,15,28\} = 7$
Jika $x_5 = 3, x_4 = 1, x_2 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{5,163,62,12,26\} = 5$

Jika $x_5 = 3, x_4 = 0, x_2 = 1$, maka $x_1^* = \min\{6,169,68,13,27\} = 6$
Jika $x_5 = 3, x_4 = 1, x_2 = 1$, maka $x_1^* = \min\{4,161,60,11,24\} = 4$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 0, x_2 = 0$, maka $x_1^* = \min\{5,161,60,11,25\} = 5$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 1, x_2 = 0$, maka $x_1^* = \min\{3,153,52,9,23\} = 3$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 0, x_2 = 1$, maka $x_1^* = \min\{3,159,58,10,24\} = 3$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 1, x_2 = 1$, maka $x_1^* = \min\{1,151,50,7,21\} = 1$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 0, x_2 = 0$, maka $x_1^* = \min\{2,151,50,8,22\} = 2$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 1, x_2 = 0$, maka $x_1^* = \min\{0,143,42,5,20\} = 0$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 0, x_2 = 1$, maka $x_1^* = \min\{1,149,48,7,21\} = 1$
Jika $x_5 = 6, x_4 = 0, x_2 = 0$, maka $x_1^* = \min\{0,141,40,5,19\} = 0$
Jika $x_5 = 6, x_4 = 1, x_2 = 1$, maka $x_1^* = \min\{0,131,30,1,15\} = 0$

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh nilai minimum terbesar dari x_1^* adalah 1. Ketika $x_5 = 5$, $x_4 = 0$ dan $x_2 = 1$.

b. Nilai bilangan bulat terbesar dari x_3^* berdasrkan Persamaan (7) untuk $x_5 = 0, x_4 = 0, x_2 = 0$ diperoleh $x_3^* = 10$. Perhitungan dilanjutkan, sehingga diperoleh:

Jika $x_5 = 0, x_4 = 1, x_2 = 0$, maka $x_3^* = \min\{8,58,27,13,17\} = 8$
Jika $x_5 = 0, x_4 = 0, x_2 = 1$, maka $x_3^* = \min\{9,59,29,14,29\} = 9$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 1, x_2 = 1$, maka $x_3^* = \min\{1,45,15,4,10\} = 1$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 0, x_2 = 0$, maka $x_3^* = \min\{1,45,15,5,11\} = 1$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 1, x_2 = 0$, maka $x_3^* = \min\{0,43,12,3,10\} = 0$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 0, x_2 = 1$, maka $x_3^* = \min\{0,44,14,4,10\} = 0$
Jika $x_5 = 6, x_4 = 0, x_2 = 0$, maka $x_3^* = \min\{0,42,12,3,9\} = 0$

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh nilai minimum terbesar dari x_3^* adalah 1. Ketika $x_5 = 4$, $x_4 = 1$ dan $x_2 = 1$. Nilai minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar yang diperoleh x_1^* dan x_3^* yaitu sama-sama menghasilkan nilai 1. Oleh karena itu dipilih salah satu variabel keputusan yaitu $x_3^* = 1$. $\bar{x}_y = x_3 \in \{0,1\}$. Dimana 1 adalah nilai bilangan bulat terbesar dari $\bar{x}_y$ yaitu x_3^*.

Langkah 8: Misalkan masalah *integer linear programming* sebagai $P\left(\bar{x}_r, \bar{x}_t, \bar{x}_s, \bar{x}_y\right)$ untuk setiap $\bar{x}_r = x_5 \in \{0, 1, 2, \cdots, 6\}$, $\bar{x}_t = x_4 \in \{0,1\}, \bar{x}_s = x_2 \in \{0, 1\}$, dan $\bar{x}_y = x_3 \in \{0,1\}$ yang melibatkan $5 - 4$ variabel x_i dimana $i \neq r, t, s, y$. Berdasarkan Persamaan (5) permasalahan *integer linear programming* dengan fungsi tujuan (Persamaan 8) memiliki kendala:

$$\begin{aligned}
100x_1 &\leq 1500 - 250x_5 - 200x_4 - 150x_2 - 150x_3 \\
300x_1 &\leq 60500 - 3000x_5 - 2400x_4 - 600x_2 - 1000x_3 \\
300x_1 &\leq 30000 - 3000x_5 - 2400x_4 - 600x_2 - 1000x_3 \\
6x_1 &\leq 150 - 20x_5 - 16x_4 - 8x_2 - 10x_3 \\
4x_1 &\leq 150 - 12x_5 - 10x_4 - 6x_2 - 8x_3 \\
x_i &\geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, , i = 1,2, \cdots, 5
\end{aligned}$$

Langkah 9: Menyelesaikan sebuah himpunan dari permasalahan *integer linear programming* yang ada pada langkah 8 dengan menggunakan Persamaan (6) dan (7) diperoleh untuk $x_5 = x_4 = x_2 = x_3 = 0$ diperoleh $x_1^* = 15$. Perhitungan dilanjutkan, sehingga diperoleh:

Jika $x_5 = 0, x_4 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$, maka $x_1^* = \min\{13,193,92,22,35\} = 13$
Jika $x_5 = 0, x_4 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$, maka $x_1^* = \min\{13,199,98,23,36\} = 13$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, maka $x_1^* = \min\{5,161,60,11,25\} = 5$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$, maka $x_1^* = \min\{3,153,52,9,23\} = 3$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$, maka $x_1^* = \min\{3,159,58,10,24\} = 3$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$, maka $x_1^* = \min\{3,158,56,10,23\} = 3$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$, maka $x_1^* = \min\{1,151,50,7,21\} = 1$

Jika $x_5 = 4, x_4 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{2,156,54,8,22\} = 2$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{1,150,48,7,21\} = 1$
Jika $x_5 = 4, x_4 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{0,148,46,6,19\} = 0$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{2,151,50,8,22\} = 2$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{0,143,42,5,20\} = 0$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{1,149,48,7,21\} = 1$
Jika $x_5 = 5, x_4 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1,$ maka $x_1^* = \min\{1,148,46,6,20\} = 1$
Jika $x_5 = 6, x_4 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0,$ maka $x_1^* = \min\{0,141,40,5,19\} = 0$

Langkah 10: Menentukan solusi optimal

Berdasarkan hasil perhitungan langkah 9 diperoleh solusi optimal sebagai berikut:

Jika $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 4,$ maka
$$Z = 5000(0) + 15000(1) + 35000(1) + 75000(1) + 100000(4) = 525000$$
Jika $\mathrm{x}_1 = 1, \mathrm{x}_2 = 1, \mathrm{x}_3 = 0, \mathrm{x}_4 = 1, \mathrm{x}_5 = 4,$ maka
$$Z = 5000(1) + 15000(1) + 35000(0) + 75000(1) + 100000(4) = 495000$$
Jika $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 4,$ maka
$$Z = 5000(1) + 15000(0) + 35000(1) + 75000(1) + 100000(4) = 515000$$
Jika $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 5,$ maka
$$Z = 5000(0) + 15000(0) + 35000(0) + 75000(1) + 100000(5) = 575000$$
Jika $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 5,$ maka
$$Z = 5000(1) + 15000(1) + 35000(0) + 75000(0) + 100000(5) = 520000$$
Jika $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 5,$ maka
$$Z = 5000(1) + 15000(0) + 35000(1) + 75000(0) + 100000(5) = 540000$$
Jika $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 6,$ maka
$$Z = 5000(0) + 15000(0) + 35000(0) + 75000(0) + 100000(6) = 600000$$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa masalah produksi bingkai foto diformulasikan ke dalam bentuk pemrograman linear. Model pemrograman linear yaitu sebagai berikut:

Fungsi tujuan:
$$Z_{maks} = 5000x_1 + 15000x_2 + 35000x_3 + 75000x_4 + 100000x_5$$
Selanjutnya fungsi kendala bahan baku yang tersedia yaitu sebagai berikut:
$$\begin{aligned}
100x_1 + 150x_2 + 150x_3 + 200x_4 + 250x_5 &\leq 1500 \\
300x_1 + 600x_2 + 1000x_3 + 2400x_4 + 3000x_5 &\leq 60500 \\
300x_1 + 600x_2 + 1000x_3 + 2400x_4 + 3000x_5 &\leq 30000 \\
6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 16x_4 + 20x_5 &\leq 150 \\
4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 12x_5 &\leq 150 \\
x_i &\geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \cdots, 5
\end{aligned}$$

Penerapan metode reduksi variabel dalam menentukan produksi bingkai foto diperoleh solusi optimal adalah $\mathrm{x}_5 = 6$. Dengan demikian bingkai foto yang diproduksi oleh CV. Meili Photo yaitu bingkai foto berukuran 24R sebanyak 6 buah dengan keuntungan sebesar Rp. 600.000,00.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Rosiyanti, H. Penggunaan software lindo dengan metode pembelajaran penemuan terbimbing untuk meningkatkan motivasi belajar mahasiswa matematika angkatan 2013 pada matakuliah program linier. *FIBONACCI: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, 2016; 2(2), 19-27.

[2] Pandian, P., & Jayalakshmi, M. A New Approach for solving a Class of Pure Integer Linear Programming Problems. *Journal of Advanced Engineering Technology*, 2012; *3*, 248-251.
[3] Safitri, E., Basriati, S., & Ramadhania, C. Penyelesaian Integer Linear Programming menggunakan Metode Reduksi Variabel (Studi Kasus: Zee Studio Photography). *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, 2020; *6*(2), 1-11.
[4] Novtaria, P., & Bahri, S. Penyelesaian Masalah Pemrograman Linear Bilangan Bulat Murni dengan Metode Reduksi Variabel. *Jurnal Matematika UNAND*, 2016; 3(3), 17-25.
[5] Siswanto, Operations Research Jilid 1, Erlangga, Jakarta. 2007.

WAHYUNI ARDILA : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak,
wahyuni.ardila@student.untan.ac.id
YUNDARI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak,
yundari@math.untan.ac.id
MELIANA PASARIBU : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak,
meliana.pasaribu@math.untan.ac.id