

KONTROL OPTIMAL MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN PERTAHANAN PADA MANGSA

Yuni Wulandari, Mariatul Kiftiah, Yudhi

INTISARI

Satu diantara model matematika interaksi antara makhluk hidup adalah model mangsa pemangsa. Model mangsa pemangsa menggambarkan interaksi dua spesies antara spesies pemangsa dengan mangsanya. Pada penelitian ini, model yang digunakan yaitu model pertahanan pada mangsa dan dikendalikan dengan pemberian makanan alternatif pada pemangsa (C). Pemberian makanan alternatif bertujuan untuk memenuhi kebutuhan makanan pemangsa agar berkurangnya pemangsa memakan mangsa. Penyelesaian dalam penelitian ini menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin dengan diperoleh suatu kontrol optimal C^ . Laju perubahan mangsa dan pemangsa dalam model diilustrasikan dengan simulasi numerik. Hasil simulasi numerik yang telah dilakukan menunjukkan mangsa menurun menuju kepunahan dan pemangsa meningkat. Pemberian makanan alternatif pada pemangsa yang terbatas dan pemangsa meningkat sehingga seiring bertambahnya waktu menyebabkan mangsa menjadi punah. Hal ini menunjukkan bahwa pemberian makanan alternatif pada pemangsa tidak efektif dalam jangka waktu yang panjang.*

Kata Kunci : model mangsa pemangsa, pertahanan, makanan alternatif, kontrol optimal, Prinsip Maksimum Pontryagin

PENDAHULUAN

Ekologi merupakan ilmu yang mempelajari tentang hubungan antara makhluk hidup dengan lingkungannya. Pada dasarnya makhluk hidup bergantung pada makhluk hidup lainnya ataupun lingkungannya. Hubungan antara makhluk hidup dengan lingkungannya inilah dinamakan interaksi [1].

Satu diantara model matematika interaksi antara makhluk hidup adalah model mangsa pemangsa. Model mangsa pemangsa merupakan interaksi pemangsa sebagai yang memangsa dan mangsa sebagai yang dimangsa [2]. Dalam suatu interaksi, mangsa memiliki perilaku atau kemampuan untuk mempertahankan diri ketika merasa terancam. Perilaku pertahanan yang dilakukan pada mangsa dapat mempengaruhi tingkat predasi. Hal ini dikarenakan adanya perilaku pertahanan, menyebabkan mangsa sulit dimangsa oleh pemangsa sehingga dapat mengurangi tingkat penyerangan. Saat mangsa mempertahankan dirinya maka semakin kecil keberhasilan pemangsa memakan mangsa. Pada model mangsa pemangsa jumlah mangsa lebih sedikit dari jumlah pemangsa, sehingga pemangsa diberikan makanan alternatif berdasarkan dari jenis pemangsanya. Dalam rantai makanan, pemangsa dapat memakan lebih dari satu jenis mangsa sehingga pemberian makanan alternatif ini memungkinkan untuk diberikan kepada pemangsa [3].

Hubungan antara mangsa dan pemangsa dapat dibuat dalam model matematika dengan menerjemahkan permasalahan tersebut ke dalam bahasa matematika sehingga dapat dicari solusi berupa banyaknya jumlah mangsa dan pemangsa. Pemodelan matematika adalah proses membangun suatu model matematika sehingga diperoleh pemahaman dari permasalahan tersebut menjadi lebih tepat. Suatu model matematika mangsa pemangsa menggambarkan laju pertumbuhan spesies dan dapat dikendalikan dengan pemberian suatu kontrol.

Penyelesaian kontrol optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin untuk memperoleh kontrol terbaik dari *state* awal hingga *state* akhir, yaitu dengan mengoptimalkan fungsi tujuan J dengan menggunakan kontrol [4]. Kontrol yang diberikan adalah pemberian makanan alternatif pada pemangsa sehingga mengurangi tingkat predasi dan memaksimalkan mangsa dan pemangsa serta model yang digunakan adalah model mangsa pemangsa dengan pertahanan pada mangsa. Penelitian ini bertujuan

untuk mendapatkan kontrol optimal dari model mangsa pemangsa dengan pertahanan pada mangsa menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

KONTROL OPTIMAL

Tujuan utama permasalahan kontrol optimal adalah menentukan nilai variabel kontrol $u(t)$ yang membawa sistem membawa sistem dari *state* awal $x(t_0)$ pada waktu t_0 ke *state* akhir $x(t_f)$ pada waktu akhir t_f . Kemudian pada waktu yang sama dapat ditentukan nilai yang optimal (maksimum atau minimum) berdasarkan dengan fungsi tujuan [4].

Pada umumnya, masalah kontrol optimal dapat diformulasikan sebagai berikut:

1. Mencari kontrol u yang mengoptimalkan fungsi tujuan

$$J(x) = S(x, t) + \int_{t_0}^{t_f} V(x, u, t) dt \quad (1)$$

Bentuk fungsi tujuan pada Persamaan (1) dinyatakan sebagai bentuk Bolza. Jika fungsi tujuan memuat S maka disebut bentuk Meyer, sedangkan jika fungsi tujuan memuat V maka disebut bentuk Lagrange.

2. Model dari sistem yang dikontrol pada umumnya dalam bentuk variabel keadaan (*state*) yaitu

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2)$$

3. Kondisi batas pada keadaan atau pengontrolnya

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f \quad (3)$$

dengan $x(t_0) = x_0$ adalah keadaan awal dan $x(t_f) = x_f$ adalah keadaan akhir [5].

PRINSIP MAKSIMUM PONTRYAGIN

Prinsip Maksimum Pontryagin digunakan untuk mendapatkan kontrol terbaik pada sistem dari keadaan awal hingga keadaan akhir dengan memaksimalkan fungsi tujuan. Langkah-langkah penyelesaian masalah kontrol optimal yang diformulasikan oleh Persamaan (2) dan (3) adalah sebagai berikut [4]:

1. Membentuk fungsi Hamiltonian (H)

$$H(x, u, t, \lambda) = V(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) f_i(x, u, t)$$

dengan V adalah fungsi tujuan yang dioptimalkan dan f merupakan persamaan *state* [6].

2. Memaksimalkan fungsi Hamiltonian terhadap variabel kontrol u dengan cara:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

sehingga diperoleh kontrol u yang optimal (u^*), $u^* = h(x^*, \lambda^*, t)$

3. Dengan menggunakan u^* yang telah dihasilkan pada langkah 2, diperoleh fungsi Hamiltonian baru yang optimal H^* , yaitu:

$$H^*(x^*, h(x^*, \lambda^*, t), t, \lambda^*) = H^*(x^*, \lambda^*, t).$$

4. Menyelesaikan persamaan *state* dan *costate*

- a. Persamaan *state* merupakan persamaan yang menjadi kontrol dalam menyelesaikan kontrol optimal [7].

Persamaan *state* ditulis,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (4)$$

- b. Persamaan *costate* merupakan nilai negatif dari fungsi Hamiltonian yang diturunkan terhadap variabel-variabel *state* [7].

Persamaan *costate* ditulis,

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (5)$$

dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir yang disebut kondisi *transversality*, yaitu:

$$\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda^* \right]_{t_f} \delta x_f = 0,$$

dengan S adalah bentuk Meyer dari fungsi tujuan J , H merupakan fungsi Hamiltonian, δ menunjukkan variasi dan tanda * menunjukkan keadaan saat variabel dalam keadaan optimal.

5. Substitusikan Persamaan (4) dan Persamaan (5) yang diperoleh dari langkah 4 ke persamaan u^* pada langkah 2 untuk mendapatkan kontrol yang optimal.

METODE RUNGE KUTTA ORDE 4

Metode Runge Kutta merupakan penyelesaian persamaan diferensial biasa dan sistem persamaan diferensial secara numerik. Metode ini memiliki tingkat ketelitian yang tinggi dan tidak memerlukan turunan dari fungsi [8].

Metode Runge Kutta orde 4 yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial $y' = f(x, y)$ dengan bentuk sebagai berikut [9]:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (6)$$

dengan,

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

MODEL MATEMATIKA MANGSA PEMANGSA DENGAN PERTAHANAN PADA MANGSA

Model matematika yang dibahas dalam penelitian ini adalah model mangsa pemangsa dengan pertahanan pada mangsa yang telah dibahas sebelumnya [10]. Pada model tersebut, diasumsikan bahwa laju perilaku pertahanan pada mangsa tidak secara langsung menguntungkan mangsa tetapi hanya mengurangi pertumbuhan pemangsa.

Berikut ini model matematika mangsa dan pemangsa dengan pertahanan pada mangsa:

$$\frac{dX}{dT} = \alpha X \left(1 - \frac{X}{N}\right) - \frac{pX}{1 + pT_h X} Y \quad (7)$$

$$\frac{dY}{dT} = \frac{\gamma p X}{1 + pT_h X} Y - \eta XY - cY \quad (8)$$

dengan

X : Jumlah individu pada spesies mangsa

Y : Jumlah individu pada spesies pemangsa

- α : Laju pertumbuhan mangsa
 N : Daya dukung lingkungan (*carrying capacity*)
 p : Efisiensi pencarian mangsa oleh pemangsa
 T_h : Rata-rata waktu penanganan mangsa oleh pemangsa
 c : Laju kematian alami pemangsa
 γ : Laju konversi biomassa dari mangsa menjadi pemangsa
 η : Laju perilaku pertahanan pada mangsa

Berikut ini diberikan satuan dan dimensi yang digunakan pada Persamaan (7) dan Persamaan (8) pada Tabel 1 sebagai berikut.

Tabel 1 Satuan dan dimensi yang digunakan

Variabel dan parameter	Satuan	Dimensi	Sumber
X	Ekor	[N]	[11]
Y	Ekor	[N]	[11]
α	Per satuan waktu	[T] ⁻¹	[11]
N	Ekor	[N]	[11]
p	Per ekor satuan waktu	[NT] ⁻¹	Asumsi
T_h	Waktu	[T]	Asumsi
c	Per satuan waktu	[T] ⁻¹	[11]
γ	Per satuan waktu	[T] ⁻¹	[11]
η	Per ekor satuan waktu	[NT] ⁻¹	Asumsi

Pada Persamaan (7) dan Persamaan (8) dilakukan penskalaan persamaan agar menjadi persamaan yang sederhana dengan dipilih pemisalan sebagai berikut:

$x = \frac{X}{N}$, $y = \frac{pY}{\alpha}$, $t = \alpha T$, sehingga Persamaan (7) dan Persamaan (8) menjadi

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{xy}{1+rx} \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{axy}{1+rx} - bxy - my \quad (10)$$

dengan

$$r = pT_h N$$

$$a = \gamma \frac{p}{\alpha} N$$

$$b = \frac{\eta N}{\alpha}$$

$$m = \frac{c}{\alpha}$$

PEMBERIAN KONTROL MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN PERTAHANAN PADA MANGSA

Permasalahan kontrol model mangsa pemangsa dengan pertahanan pada mangsa yaitu untuk memaksimalkan mangsa dan pemangsa dengan cara melakukan pemberian makanan alternatif pada pemangsa. Pada Persamaan (9) dan Persamaan (10) yaitu model mangsa pemangsa dengan pertahanan pada mangsa diberikan variabel kontrol C berupa pemberian makanan alternatif pada pemangsa. Kontrol C memaksimalkan mangsa dan pemangsa.

Berikut ini model mangsa pemangsa dengan pertahanan pada mangsa dengan variabel kontrol C :

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - (1-C)\frac{xy}{1+rx} \quad (11)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a(1-C)xy}{1+rx} - bxy + Cy - my \quad (12)$$

dengan C menyatakan pemberian makanan alternatif pada pemangsa.

Oleh karena jumlah populasi selalu bernilai positif, maka diasumsikan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ dengan parameter $r, a, b, m > 0$.

Persamaan (11) menyatakan perubahan ukuran mangsa terhadap waktu, dipengaruhi oleh mangsa yang dapat hidup dengan baik karena dilakukan kontrol pemberian makanan alternatif pada pemangsa sebesar C , sehingga mengurangi interaksi antara mangsa dan pemangsa.

Persamaan (12) menyatakan perubahan ukuran pemangsa terhadap waktu, dipengaruhi adanya kontrol pemberian makanan alternatif pada pemangsa sebesar C , sehingga mengurangi laju predasi dari pemangsa. Pemangsa berkurang karena adanya perilaku pertahanan pada mangsa sehingga mengurangi interaksi dan pemangsa bertambah karena adanya kontrol pemberian makanan alternatif pada pemangsa serta pemangsa berkurang karena kematian secara alami dari pemangsa.

PENYELESAIAN KONTROL OPTIMAL MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN PERTAHANAN PADA MANGSA

Berikut dibentuk fungsi tujuan yang menyatakan jumlah mangsa dan pemangsa dengan melakukan pemberian makanan alternatif pada pemangsa. Pemberian makanan alternatif pada pemangsa menjadi kontrol yang dioptimalkan. Secara matematika fungsi tujuan dapat dituliskan sebagai berikut [3].

$$J(C) = \omega_1 x + \omega_2 y - \omega_3 \int_0^T C^2 dt$$

dengan ω_1, ω_2 dan ω_3 masing-masing adalah bobot massa mangsa, bobot massa pemangsa dan bobot pemberian makanan alternatif. Kondisi batas T adalah waktu akhir periode dan C adalah kontrol pemberian makanan alternatif pada pemangsa.

Kemudian diselesaikan masalah kontrol optimal model mangsa pemangsa dengan pertahanan pada mangsa menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Adapun langkah-langkah penyelesaian kontrol optimal model mangsa pemangsa dengan pertahanan pada mangsa menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin sebagai berikut:

1. Membentuk fungsi Hamiltonian (H)

$$\begin{aligned} H(x, y, C, t, \lambda) &= V(x, y, C, t) + \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) f_i(x, y, C, t) \\ &= -\omega_3 C^2 + \lambda_1 \left(x(1-x) - (1-C)\frac{xy}{1+rx} \right) \\ &\quad + \lambda_2 \left(\frac{a(1-C)xy}{1+rx} - bxy + Cy - my \right) \end{aligned}$$

2. Memaksimumkan fungsi Hamiltonian terhadap C

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial C} &= 0 \\ -2\omega_3 C + \lambda_1 \left(\frac{xy}{1+rx} \right) - \lambda_2 \left(\frac{axy}{1+rx} \right) + \lambda_2 y &= 0 \end{aligned}$$

$$-2\omega_3 C = -\lambda_1 \left(\frac{xy}{1+rx} \right) + \lambda_2 \left(\frac{axy}{1+rx} \right) - \lambda_2 y$$

$$C = \frac{\lambda_1 \left(\frac{xy}{1+rx} \right) - \lambda_2 \left(\frac{axy}{1+rx} \right) + \lambda_2 y}{2\omega_3}$$

Karena $C_{min} \leq C \leq C_{maks}$, maka:

$$C^* = \begin{cases} C_{min}, & C < C_{min} \\ \frac{\lambda_1 \left(\frac{xy}{1+rx} \right) - \lambda_2 \left(\frac{axy}{1+rx} \right) + \lambda_2 y}{2\omega_3}, & C_{min} \leq C \leq C_{maks} \\ C_{maks}, & C > C_{maks} \end{cases}$$

3. Mengoptimalkan fungsi Hamiltonian (H^*)

Dengan menggunakan C^* yang telah dihasilkan pada langkah 2, diperoleh fungsi Hamiltonian baru yang optimal, yaitu:

$$H^*(x, y, C^*, \lambda, t) = -\omega_3 C^{*2} + \lambda_1 \left(x(1-x) - (1-C^*) \frac{xy}{1+rx} \right) + \lambda_2 \left(\frac{a(1-C^*)xy}{1+rx} - bxy + C^*y - my \right)$$

4. Menyelesaikan persamaan *state* dan *costate*

a. Persamaan *state*

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = x(1-x) - (1-C) \frac{xy}{1+rx}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \frac{a(1-C)xy}{1+rx} - bxy + Cy - my$$

dengan kondisi awal $x(0) = x_0$ dan $y(0) = y_0$

b. Persamaan *costate*

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left(\lambda_1(1-2x) - \lambda_1(1-C) \frac{y}{(1+rx)^2} + \lambda_2 \frac{a(1-C)y}{(1+rx)^2} - \lambda_2 by \right)$$

$$= -\lambda_1(1-2x) + \lambda_1(1-C) \frac{y}{(1+rx)^2} - \lambda_2 \frac{a(1-C)y}{(1+rx)^2} + \lambda_2 by$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\left(-\lambda_1(1-C) \frac{x}{1+rx} + \lambda_2 \frac{a(1-C)x}{1+rx} - \lambda_2 bx + \lambda_2 C - \lambda_2 m \right)$$

$$= \lambda_1(1-C) \frac{x}{1+rx} - \lambda_2 \frac{a(1-C)x}{1+rx} + \lambda_2 bx - \lambda_2 C + \lambda_2 m$$

dengan kondisi transversalnya yaitu $\lambda_1(T) = \omega_1$ dan $\lambda_2(T) = \omega_2$

5. Mendapatkan kontrol optimal yang dicari

Substitusikan Persamaan *state* dan Persamaan *costate* yang diperoleh dari langkah 4 ke persamaan C^* pada langkah 2

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - (1-C^*)\frac{xy}{1+rx} \quad (13)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a(1-C^*)xy}{1+rx} - bxy + C^*y - my \quad (14)$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\lambda_1(1-2x) + \lambda_1(1-C^*)\frac{y}{(1+rx)^2} - \lambda_2\frac{a(1-C^*)y}{(1+rx)^2} + \lambda_2by \quad (15)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \lambda_1(1-C^*)\frac{x}{1+rx} - \lambda_2\frac{a(1-C^*)x}{1+rx} + \lambda_2bx - \lambda_2C^* + \lambda_2m \quad (16)$$

dengan kondisi batas yaitu $x(0) = x_0, y(0) = y_0, \lambda_1(T) = \omega_1, \lambda_2(T) = \omega_2$

SIMULASI NUMERIK

Model mangsa pemangsa dengan pertahanan pada mangsa dapat diselesaikan dengan menggunakan simulasi numerik. Persamaan *state* dan *costate* yang digunakan adalah Persamaan (13) sampai dengan Persamaan (16). Persamaan *state* menggunakan metode Runge Kutta maju karena diketahui nilai awal sedangkan persamaan *costate* menggunakan metode Runge Kutta mundur karena nilai akhir *costate* diketahui berdasarkan kondisi *transversality*, sehingga metode yang digunakan adalah skema maju-mundur dengan simulasi numerik yang digunakan adalah Runge Kutta orde 4.

Pada model mangsa pemangsa dengan pertahanan pada mangsa ini menggunakan nilai parameter pada Tabel 2 dan nilai awal atau populasi awal $(x_0; y_0) = (1; 0,2)$, $(C_{min} \leq C(t) \leq C_{maks})$ adalah $(0,0 \leq C(t) \leq 0,4)$ dan $\omega_1 = 1, \omega_2 = 1, \omega_3 = 0,5$. Simulasi yang dilakukan yaitu simulasi mangsa, pemangsa, kontrol C dan fungsi tujuan J .

Berikut ini diberikan nilai parameter pada Tabel 2 sebagai berikut:

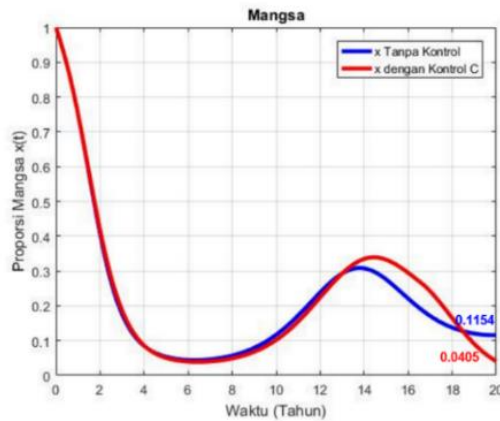
Tabel 2 Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi

Parameter	Nilai	Sumber
r	0,016	[10]
a	2,56	[10]
b	0,8	[10]
m	0,3	[10]

Nilai parameter pada Tabel 2 selanjutnya disubstitusikan pada Persamaan (13) sampai dengan Persamaan (16) kemudian dilakukan simulasi secara numerik. Berdasarkan hasil simulasi numerik yang dilakukan, diperoleh grafik sebagai berikut.

a. Mangsa dan interpretasinya

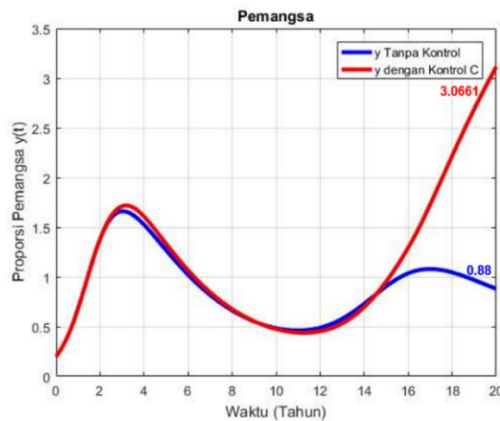
Pada Gambar 1 menunjukkan proporsi mangsa menurun pada tahun ke-0 hingga tahun ke-4, kemudian di tahun berikutnya meningkat tanpa dan dengan kontrol pemberian makanan alternatif pada pemangsa. Selanjutnya, proporsi mangsa menurun tanpa dan dengan kontrol hingga tahun ke-20. Proporsi mangsa menurun hingga tahun ke-20 sebesar 0,0405 karena pemberian makanan alternatif pada pemangsa terbatas menyebabkan kebutuhan makanan bagi pemangsa kurang terpenuhi sehingga terjadi interaksi antara mangsa dan pemangsa. Pada akhir waktu, proporsi mangsa dengan kontrol yaitu 0,0405 yang artinya jika terdapat 10.000 jumlah individu mangsa maka terdapat individu mangsa sebesar 405.



Gambar 1 Perbandingan mangsa tanpa dan dengan kontrol

b. Pemangsa dan interpretasinya

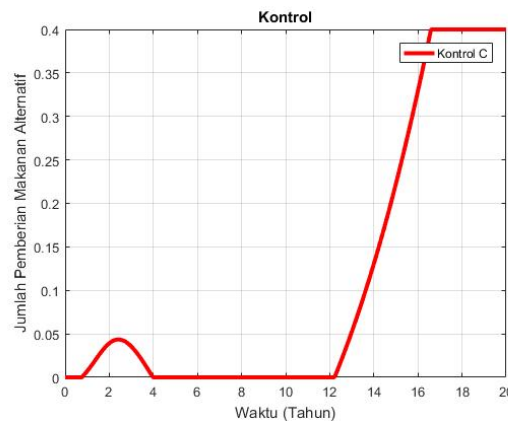
. Pada Gambar 2 menunjukkan proporsi pemangsa meningkat pada tahun ke-0 hingga tahun ke-3, kemudian di tahun berikutnya menurun tanpa dan dengan kontrol pemberian makanan alternatif pada pemangsa. Selanjutnya, proporsi pemangsa meningkat tanpa dan dengan kontrol hingga tahun ke-20. Proporsi pemangsa meningkat hingga tahun ke-20 sebesar 3,0661 karena pemberian makanan alternatif pada pemangsa terbatas sehingga kebutuhan makanan bagi pemangsa kurang terpenuhi. Hal inilah yang menyebabkan pemangsa mencari makanan lain yaitu dengan memakan mangsa. Pada akhir waktu, proporsi pemangsa dengan kontrol yaitu 3,0661 yang artinya jika terdapat 10.000 jumlah individu pemangsa maka terdapat individu pemangsa sebesar 30.661.



Gambar 2 Perbandingan pemangsa tanpa dan dengan kontrol

c. Kontrol C dan interpretasinya

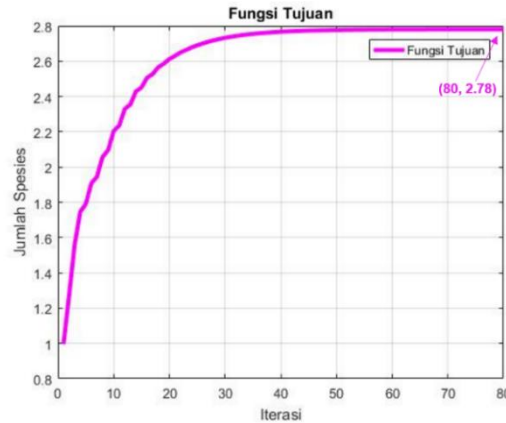
Berdasarkan Gambar 3 menunjukkan bahwa pemberian kontrol berupa makanan alternatif pada pemangsa pada awal waktu naik hingga 0,4 pada akhir waktu.



Gambar 3 Pemberian kontrol C

d. Fungsi tujuan J dan interpretasinya

Berdasarkan Gambar 4 menunjukkan dengan adanya kontrol berupa pemberian makanan alternatif pada pemangsa memaksimumkan fungsi tujuan. Pada iterasi awal nilainya 1, kemudian terus meningkat pada iterasi ke-80 nilainya sebesar 2,78.



. Gambar 4 Nilai fungsi tujuan J

PENUTUP

Dari hasil pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa model mangsa pemangsa dengan pertahanan pada mangsa sebagai berikut:

1. Model mangsa pemangsa dengan pertahanan pada mangsa adalah:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x) - (1 - C) \frac{xy}{1 + rx}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a(1 - C)xy}{1 + rx} - bxy + Cy - my$$

2. Penyelesaian kontrol optimal dari model mangsa pemangsa dengan pertahanan pada mangsa menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin diperoleh kontrol berupa pemberian makanan alternatif pada pemangsa yaitu:

$$C^* = \begin{cases} C_{min} , & C < C_{min} \\ \frac{\lambda_1 \left(\frac{xy}{1 + rx} \right) - \lambda_2 \left(\frac{axy}{1 + rx} \right) + \lambda_2 y}{2\omega_3} , & C_{min} \leq C \leq C_{maks} \\ C_{maks} , & C > C_{maks} \end{cases}$$

3. Berdasarkan hasil simulasi numerik, mangsa menurun menuju kepunahan dan pemangsa meningkat. Pemberian makanan alternatif pada pemangsa yang terbatas dan pemangsa meningkat sehingga seiring bertambahnya waktu menyebabkan mangsa menjadi punah. Hal ini menunjukkan bahwa pemberian makanan alternatif pada pemangsa tidak efektif dalam jangka waktu yang panjang.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Sumarto S, Koneri R. *Biologi Hewan*. Bandung: CV Patra Media Grafindo; 2016.
- [2]. Soleh M, Kholipah S. Model Matematika Mangsa-Pemangsa dengan Sebagian Mangsa Sakit. *Jurnal Sains Teknologi dan Industri*. 2013; 10(2).
- [3]. Resmi F, Subchan. Kendali Optimal pada Sistem Mangsa Pemangsa dengan Pemberian Makanan Alternatif pada Pemangsa. *Jurnal Mathematics Paedagogic*. 2019; 4(1): 33-43.
- [4]. Naidu DS. *Optimal Control Systems*. New York: CRC Press; 2002.
- [5]. Subiono. *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*. Surabaya. Institut Teknologi Sepuluh Nopember; 2013.

- [6]. Chiang AC, Wainwright K. *Fundamental Method of Mathematical Economics*, Ed ke-4. New York: The McGraw-Hill; 2005.
- [7]. Zulaikha, Trisilowati, Fadhilah I. Kontrol Optimal pada Model Epidemi SEIQR dengan Tingkat Kejadian Standar. In: *Prosiding SI MaNIs, Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami*; 31 Jul 2017. *Jurusan Matematika, Universitas Brawijaya Malang*. 2017. p. 41-51.
- [8]. Munif A, Hidayatullah AP. *Cara Praktis Penguasaan dan Penggunaan Metode Numerik, Edisi kedua*. Surabaya: Guna Widya; 1995.
- [9]. Munir R. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika; 2012.
- [10]. Ningrum RE, Abadi, Astuti YP. Analisis Kestabilan Model Matematika Mangsa Pemangsa Dua Spesies dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Perilaku Anti-Pemangsa. In: *Prosiding Seminar Nasional Matematika. Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang*. 2020. p. 114-121.
- [11]. Siddik AMA. Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa dengan Fungsi Respon Holling Tipe III dan Penyakit pada Pemangsa Super [Tesis]. Makassar: Universitas Hasanuddin; 2017.

YUNI WULANDARI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
yuniwulandari@student.untan.ac.id

MARIATUL KIFTIAH : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

YUDHI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
yudhi@math.untan.ac.id
