Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 11, No. 2 (2022), hal 229-238

DEKOMPOSISI QR DENGAN MATRIKS TRANSFORMASI HOUSEHOLDER

Widiya Nawaty, Evi Noviani, Fransiskus Fran

INTISARI

Dekomposisi QR merupakan bentuk pemfaktoran dari suatu matriks **A** *yang berukuran $m \times n$ yang selanjutnya diperoleh matriks* **Q** *berupa matriks ortogonal dan* **R** *matriks segitiga atas. Dalam penelitian ini, untuk memperoleh dekomposisi QR dari suatu matriks digunakan transformasi Householder. Transformasi Householder mengubah suatu vektor tak nol menjadi vektor yang semua elemennya bernilai nol kecuali untuk elemen pertama dari vektor tersebut. Hasil dekomposisi QR dengan transformasi Householder dalam penelitian ini digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear (SPL) dengan persamaan dalam bentuk matriks* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, *dengan* **A** *sebagai matriks koefisien, matriks* **x** *adalah matriks variabel dan matriks kolom* **b** *sebagai matriks konstanta.*

Kata Kunci: *matriks refleksi, matriks ortogonal, matriks segitiga atas, SPL.*

PENDAHULUAN

Transformasi linear didefinisikan sebagai suatu pemetaan dari suatu ruang vektor ke ruang vektor lain yang mengawetkan operasi penjumlahan dan perkalian skalar [1]. Transformasi linear juga dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks. Misalkan terdapat suatu matriks $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ dan didefinisikan suatu fungsi $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sedemikian sehingga $T(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Kemudian T disebut transformasi matriks. Satu di antara pemetaan yang memenuhi definisi transformasi matriks yaitu refleksi.

Refleksi merupakan pemetaan dari titik asal ke titik bayangan yang jaraknya sama terhadap garis atau bidang tertentu [2]. Pada $\mathbb{R}^2$, refleksi dilakukan diantaranya terhadap sumbu-x, sumbu-y, dan garis $y = x$. Pada $\mathbb{R}^3$, refleksi dilakukan terhadap bidang-xy, bidang-xz, dan bidang-yz. Refleksi di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ dapat di ilustrasikan dalam bentuk gambar. Untuk refleksi yang diperluas $\mathbb{R}^n$, dapat dipelajari dan dianalisis secara aljabar.

Perluasan refleksi di $\mathbb{R}^n$ ditemukan oleh Alston Scott Householder pada tahun 1958-an. Matriks perluasan refleksi di $\mathbb{R}^n$ tersebut dinamai refleksi Householder. Refleksi Householder memenuhi transformasi linear sehingga dapat disebut sebagai transformasi Householder. Transformasi Householder mengubah suatu vektor tak nol menjadi vektor yang semua elemennya bernilai nol kecuali untuk elemen pertama dari vektor tersebut. Transformasi Householder dapat digunakan untuk menentukan dekomposisi QR dari suatu matriks **A** berukuran $m \times n$, yaitu $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, dengan **Q** adalah matriks ortogonal dan **R** adalah matriks segitiga atas.

Misal diberikan sistem persamaan linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dengan matriks **A** sebagai matriks koefisien, matriks **x** adalah matriks variabel dan matriks kolom **b** sebagai matriks konstanta. Jika dilakukan dekomposisi QR terhadap **A**, maka hasil dekomposisi dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu SPL.

TRANSFORMASI LINEAR

Definisi 1 [1] *Jika $T: V \to W$ adalah sebuah fungsi yang memetakan sebuah ruang vektor V ke sebuah ruang vektor W, maka T disebut sebagai transformasi linear dari V ke W jika dua sifat berikut berlaku untuk semua vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ pada V dan semua skalar k:*

1. $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$
2. $T(k\boldsymbol{u}) = kT(\boldsymbol{u})$

Suatu transformasi linear juga dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks. Misalkan terdapat suatu matriks $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ dan didefinisikan suatu fungsi $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sedemikian sehingga $T(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Dengan menggunakan sifat perkalian matriks, misalkan terdapat matriks $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, maka untuk setiap $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2} \in \mathbb{R}^2$ dan x_1, x_2 sebarang skalar,

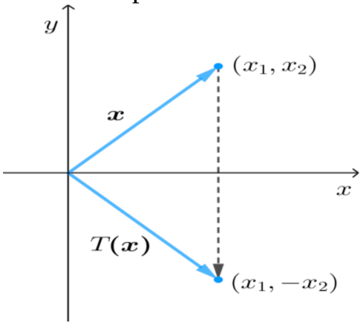
$$\begin{aligned} T(x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2}) &= \mathbf{A}(x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2}) \\ &= \mathbf{A}(x_1\boldsymbol{e_1}) + \mathbf{A}(x_2\boldsymbol{e_2}) \\ &= x_1\mathbf{A}(\boldsymbol{e_1}) + x_2\mathbf{A}(\boldsymbol{e_2}) \\ &= x_1T(\boldsymbol{e_1}) + x_2T(\boldsymbol{e_2}) \end{aligned}$$

Oleh karena itu, T adalah transformasi linear dan dinamakan transformasi matriks.

TRANSFORMASI HOUSEHOLDER

Perluasan refleksi di $\mathbb{R}^n$ disebut sebagai transformasi Householder. Refleksi di $\mathbb{R}^n$ yang dilakukan berdasarkan refleksi di $\mathbb{R}^2$. Untuk membentuk matriks transformasi Householder, terlebih dahulu di pahami refleksi di $\mathbb{R}^2$ dan refleksi di $\mathbb{R}^3$ sebagai berikut.

a). Refleksi terhadap sumbu-x, diilustrasikan pada Gambar 1.



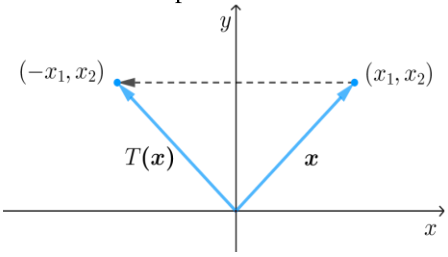
Gambar 1. Ilustrasi refleksi terhadap sumbu-x

Terdapat titik (x_1, x_2) yang direfleksikan terhadap sumbu-x menghasilkan titik bayangan $(x_1, -x_2)$, jadi diperoleh $T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Dengan menggunakan transformasi matriks yaitu $T(\boldsymbol{x}) = x_1T(\boldsymbol{e_1}) + x_2T(\boldsymbol{e_2})$ dengan $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ disubstitusikan ke $\boldsymbol{x}$ diperoleh,

$$T(\boldsymbol{e_1}) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \text{ dan } T(\boldsymbol{e_2}) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

Maka matriks standar untuk T adalah $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ sehingga $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

b). Refleksi terhadap sumbu-y, diilustrasikan pada Gambar 2.



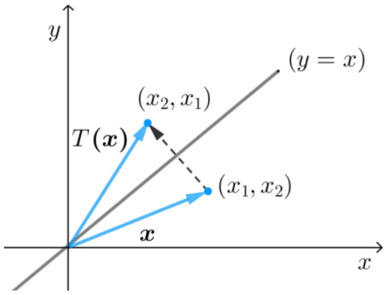
Gambar 2. Ilustrasi refleksi terhadap sumbu-y

Terdapat titik (x_1, x_2) yang direfleksikan terhadap sumbu-y menghasilkan titik bayangan $(-x_1, x_2)$, jadi diperoleh $T(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$. Dengan menggunakan transformasi matriks yaitu $T(\boldsymbol{x}) = x_1T(\boldsymbol{e_1}) + x_2T(\boldsymbol{e_2})$ dengan $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ disubstitusikan ke $\boldsymbol{x}$ diperoleh,

$$T(\boldsymbol{e_1}) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \text{ dan } T(\boldsymbol{e_2}) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Maka matriks standar untuk T adalah $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ sehingga $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

c). Refleksi terhadap garis $y = x$, diilustrasikan pada Gambar 3.



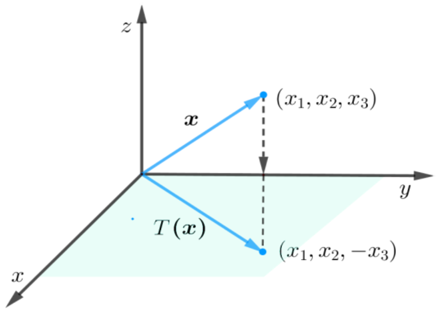
Gambar 3. Ilustrasi refleksi terhadap garis $y = x$

Terdapat titik (x_1, x_2) yang direfleksikan terhadap garis $y = x$ menghasilkan titik bayangan (x_2, x_1), jadi diperoleh $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Dengan menggunakan transformasi matriks yaitu $T(\boldsymbol{x}) = x_1 T(\boldsymbol{e_1}) + x_2 T(\boldsymbol{e_2})$ dengan $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ disubstitusikan ke $\boldsymbol{x}$ diperoleh,

$$T(\boldsymbol{e_1}) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \text{ dan } T(\boldsymbol{e_2}) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

Maka matriks standar untuk T adalah $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ sehingga $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

d). Refleksi terhadap bidang-xy, diilustrasikan pada Gambar 4.



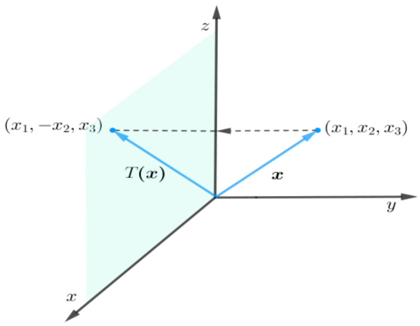
Gambar 4. Ilustrasi refleksi terhadap bidang-xy

Terdapat titik (x_1, x_2, x_3) yang direfleksikan terhadap bidang-xy menghasilkan titik bayangan $(x_1, x_2, -x_3)$, jadi diperoleh $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3)$. Dengan menggunakan transformasi matriks yaitu $T(\boldsymbol{x}) = x_1 T(\boldsymbol{e_1}) + x_2 T(\boldsymbol{e_2}) + x_3 T(\boldsymbol{e_3})$ dengan $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ disubstitusikan ke $\boldsymbol{x}$ diperoleh,

$$T(\boldsymbol{e_1}) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ T(\boldsymbol{e_2}) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \text{ dan } T(\boldsymbol{e_3}) = T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

Maka matriks standar untuk T adalah $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ sehingga $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$.

e). Refleksi terhadap bidang-xz, diilustrasikan pada Gambar 5.



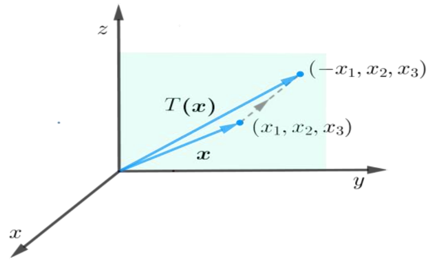
Gambar 5. Ilustrasi refleksi terhadap bidang-xz

Terdapat titik (x_1, x_2, x_3) yang direfleksikan terhadap bidang-xz menghasilkan titik bayangan $(x_1, -x_2, x_3)$, jadi diperoleh $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, x_3)$. Dengan menggunakan transformasi matriks yaitu $T(\boldsymbol{x}) = x_1 T(\boldsymbol{e_1}) + x_2 T(\boldsymbol{e_2}) + x_3 T(\boldsymbol{e_3})$ dengan $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ disubstitusikan ke $\boldsymbol{x}$ diperoleh,

$$T(\boldsymbol{e_1}) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ T(\boldsymbol{e_2}) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}, \text{dan } T(\boldsymbol{e_3}) = T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Maka matriks standar untuk T adalah $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ sehingga $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$.

f). Refleksi terhadap bidang-yz, diilustrasikan pada Gambar 6.



Gambar 6. Ilustrasi refleksi terhadap bidang-yz

Terdapat titik (x_1, x_2, x_3) yang direfleksikan terhadap bidang-yz menghasilkan titik bayangan $(-x_1, x_2, x_3)$, jadi diperoleh $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, x_3)$. Dengan menggunakan transformasi matriks yaitu $T(\boldsymbol{x}) = x_1 T(\boldsymbol{e_1}) + x_2 T(\boldsymbol{e_2}) + x_3 T(\boldsymbol{e_3})$ dengan $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ disubstitusikan ke $\boldsymbol{x}$ diperoleh,

$$T(\boldsymbol{e_1}) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},\ T(\boldsymbol{e_2}) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \text{dan } T(\boldsymbol{e_3}) = T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Maka matriks standar untuk T adalah $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ sehingga $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$.

Refleksi di $\mathbb{R}^n$ dapat digeneralisasi berdasarkan refleksi di $\mathbb{R}^2$. Misalkan matriks di $\mathbb{R}^3$ diperoleh dari mengkonstruksi matriks refleksi di $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \mathbf{H}_1$$

ke dalam bentuk $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & & \\0 & \mathbf{H}_1 & \end{bmatrix}$, sehingga menjadi matriks

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Analisis tersebut kemudian dapat diaplikasikan untuk refleksi di $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{bmatrix}I_{k-1} & 0\\0 & \mathbf{H}_k\end{bmatrix} = \mathbf{H}$$

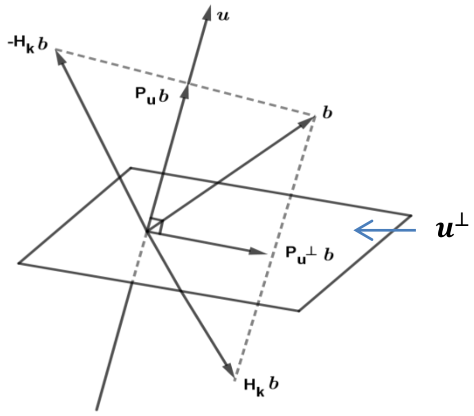
Dimisalkan terdapat vektor $\boldsymbol{b}$, dan dikalikan dengan matriks $\mathbf{H}_k$ pada matriks $\mathbf{H}$,

$$\left[\begin{array}{c|c}I_{k-1} & 0\\ \hline 0 & \mathbf{H}_k\end{array}\right]\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ \hline & & & \underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}}_{\leftarrow\ \boldsymbol{b}}\end{bmatrix}^{\text{kolom } k} = \begin{bmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & \underbrace{\begin{bmatrix}\|\boldsymbol{b}\|\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}_{\leftarrow\ \mathbf{H}_k\boldsymbol{b}}\end{bmatrix}^{\text{kolom } k}$$

Matriks $\mathbf{H}_k$ adalah submatriks refleksi berdimensi $(n-k+1)\times(n-k+1)$ dan $\boldsymbol{b}$ adalah vektor berdimensi $(n-k+1)$. Matriks refleksi $\mathbf{H}_k$ ketika dioperasikan pada vektor $\boldsymbol{b}$, maka semua elemennya bernilai nol kecuali elemen pertama,

$$\mathbf{H}_k\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{b}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diberikan ilustrasi matriks proyeksi dan refleksi $\mathbf{H}_k\boldsymbol{b}$ pada Gambar 7.



Gambar 7. Penentuan matriks proyeksi dan refleksi di $\mathbb{R}^3$

Sebelum membahas bentuk matriks refleksi, terlebih dahulu harus di bahas bentuk matriks proyeksi. Didefinisikan vektor satuan arah sepanjang vektor $\boldsymbol{u}$ [3],

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u})^{1/2}}\boldsymbol{u}$$

Selanjutnya, ditentukan proyeksi vektor $\boldsymbol{b}$ ke vektor $\boldsymbol{u}$ sebagai vektor $\boldsymbol{a}$ sehingga $\boldsymbol{a} = \mathbf{P}_u\boldsymbol{b}$, dengan $\mathbf{P}_u$ disebut matriks proyeksi. Vektor $\boldsymbol{a}$ diproyeksikan ke vektor satuan disepanjang vektor $\boldsymbol{u}$,

$$\boldsymbol{a} = \bar{\boldsymbol{u}}(\bar{\boldsymbol{u}}^T\boldsymbol{b}) = \frac{1}{(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u})^{1/2}}\boldsymbol{u}\left(\frac{1}{(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u})^{1/2}}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b}\right) = \frac{1}{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b}$$

sehingga didapat matriks proyeksi $\mathbf{P}_u$,

$$\mathbf{P}_u = \bar{\boldsymbol{u}}\bar{\boldsymbol{u}}^T = \frac{1}{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$$

Selanjutnya, ditentukan proyeksi vektor $\boldsymbol{b}$ ke bidang $\boldsymbol{u}^\perp$ sebagai vektor $\boldsymbol{c}$,

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} - \mathbf{P}_u\boldsymbol{b} = (I - \mathbf{P}_u)\boldsymbol{b} = \left(I - \frac{1}{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T\right)\boldsymbol{b} = \mathbf{P}_{u^\perp}\boldsymbol{b}$$

sehingga didapat matriks proyeksi $\mathbf{P}_{u^\perp}$,

$$\mathbf{P}_{u^\perp} = I - \frac{1}{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$$

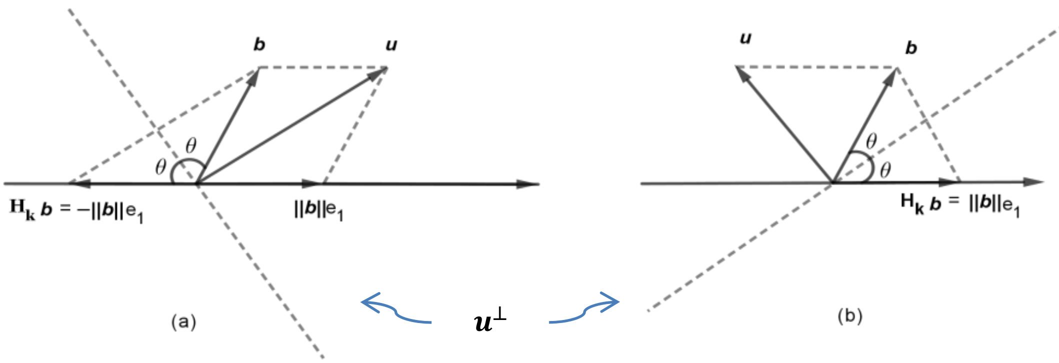
Kemudian, ditentukan matriks refleksi vektor $\boldsymbol{b}$ ke bidang $\boldsymbol{u}^\perp$ sebagai vektor $\boldsymbol{d}$,

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} - 2\mathbf{P}_u\boldsymbol{b} = (I - 2\mathbf{P}_u) = \left(I - \frac{2}{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T\right)\boldsymbol{b} = \mathbf{H}_k\boldsymbol{b}$$

sehingga diperoleh matriks refleksi $\mathbf{H}_k$,

$$\mathbf{H}_k = I - \frac{2}{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$$

Selanjutnya, ditentukan vektor $\boldsymbol{u}$ sedemikian sehingga $\mathbf{H}_k$ dapat dihitung. Matriks refleksi menghasilkan cermin dari vektor ke bidang $\boldsymbol{u}^\perp$ atau bidang pemantulnya yang tegak lurus terhadap vektor $\boldsymbol{u}$. Karena bidang pemantulnya tegak lurus terhadap vektor $\boldsymbol{u}$, akibatnya terdapat dua kemungkinan yang dapat terbentuk, seperti diilustrasikan pada Gambar 8.



Gambar 8. Penentuan vektor u dalam matriks transformasi Householder:
(a) kasus I, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + \|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{e_1}$ dan (b) kasus II, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} - \|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{e_1}$

Berdasarkan Gambar 8, diperoleh vektor $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + \|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{e_1} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} - \|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{e_1} \tag{2}$$

Dimisalkan vektor $\boldsymbol{b}$,

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

dengan $b_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_{n-1}$ adalah angka yang sangat kecil dan mendekati nol, sehingga $\|\boldsymbol{b}\| = b_1$. Substitusi persamaan (3) ke persamaan (1) dan (2),

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + \|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{b}\| \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{b}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\|\boldsymbol{b}\| \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} - \|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{b}\| \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{b}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Maka persamaan (4) dan (5) dapat digeneralisasi menjadi sebuah persamaan [3],

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + sign(b_1)\|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{e_1}, \text{ dengan } sign(b_1) = \begin{cases} 1, jika\ b_1 \geq 0 \\ -1, jika\ b_1 < 0 \end{cases}.$$

PENERAPAN TRANSFORMASI HOUSEHOLDER PADA DEKOMPOSISI QR

Dekomposisi QR atau dapat disebut dengan faktorisasi QR merupakan bentuk pemfaktoran dari suatu matriks yang berukuran $m \times n$. Berikut diberikan definisi dari dekomposisi QR.

Definisi 2 [4] *Dekomposisi QR dari sebuah matriks* $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *adalah faktorisasi dari* $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ *dengan* $\mathbf{Q} \in \mathbf{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ *adalah matriks ortogonal* $(\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T)$ *dan* $\mathbf{R} \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *adalah matriks segitiga atas* ($\mathbf{R} = [r_{ij}]$ *dengan* $r_{ij} = 0$ *untuk* $i > j$*).*

Terdapat beberapa cara yang dapat digunakan untuk membentuk dekomposisi QR ini. Satu di antara cara yang dapat digunakan yaitu dengan menggunakan transformasi Householder [3]. Misalkan terdapat matriks $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Langkah-langkah yang dilakukan untuk menentukan dekomposisi QR dari matriks $\mathbf{A}$.

1. Tentukan vektor kolom dari matriks $\mathbf{A}$ yang dinamai sebagai vektor $\boldsymbol{b}$.
2. Tentukan vektor $\boldsymbol{u}$ sehingga $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + sign(b_1)\|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{e_1}$, dengan $\boldsymbol{e_1}$ adalah basis standar.
3. Bentuk matriks transformasi Householder $\mathbf{H_1}$ dengan mensubstitusikan vektor $\boldsymbol{u}$ pada langkah kedua, dituliskan

$$\mathbf{H}_1 = I - \frac{2}{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}$$

dengan I adalah matriks identitas.

4. Matriks transformasi Householder $\mathbf{H}_1$ dikalikan dengan matriks $\mathbf{A}$ maka hasil perkalian tersebut pada kolom pertama di bawah diagonal utama a'_{11} bernilai nol, dituliskan

$$\mathbf{H}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

dengan $a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{1n}$ dan $\mathbf{A}'$ merupakan hasil pertama pada matriks $\mathbf{H}_1\mathbf{A}$.

5. Ulangi langkah pertama sampai langkah ketiga dengan menggunakan matriks $\mathbf{A}'$ pada langkah keempat yang dinamai sebagai $\mathbf{H}'_2$ untuk menentukan matriks transformasi Householder $\mathbf{H}_2$, dituliskan

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{H}'_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

dengan $\mathbf{H}'_2$ adalah matriks $\mathbf{A}'$.

6. Matriks transformasi Householder $\mathbf{H}_2$ dikalikan dengan matriks $\mathbf{H}_1\mathbf{A}$ maka hasil perkalian tersebut pada kolom kedua entri di bawah diagonal utama a''_{22} bernilai nol, dituliskan

$$\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \cdots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{A}'' & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

dengan $a''_{22},\ a''_{23}, \dots, a''_{2n}$ dan $\mathbf{A}''$ merupakan hasil kedua pada matriks $\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{A}$.

7. Tentukan matriks transformasi Householder $\mathbf{H}_3$ dan seterusnya sampai $\mathbf{H}_k$, sehingga seluruh entri di bawah diagonal utama bernilai nol. secara umum, dapat dituliskan

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}'_k \end{bmatrix}$$

Dengan $\mathbf{H}'_k$ adalah matriks transformasi Householder yang dibangun berdasarkan kolom pertama dari submatriks $\mathbf{A}^{(k-1)}$ dari dimensi yang sama sedemikian sehingga matriks $\mathbf{A}$ menjadi matriks segitiga atas, dapat dituliskan

$$\mathbf{H}_k \dots \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{A} = \mathbf{R}$$

8. Untuk menentukan matriks $\mathbf{Q}$, diperoleh dengan mengalikan transpose dari setiap matriks transformasi Householder (matriks $\mathbf{H}_k^T$) dari setiap iterasi yang dilakukan, dapat dituliskan

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_2^T \dots \mathbf{H}_k^T$$

9. Diperoleh matriks $\mathbf{Q}$ dan matriks $\mathbf{R}$ yang jika dikalikan akan menghasilkan matriks $\mathbf{A}$.

Contoh 3 Misalkan terdapat matriks $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Digunakan matriks transformasi Householder untuk menentukan dekomposisi QR dari matriks $\mathbf{A}$ tersebut. Langkah pertama menentukan vektor kolom pertama dari matriks $\mathbf{A}$, yaitu $\boldsymbol{b} = (1 \quad 1 \quad 2)^T$. Selanjutnya, dilakukan perhitungan untuk menentukan vektor $\boldsymbol{u}$,

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + sign(b_1)\|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2{,}4495\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}4495 \\ 1{,}0000 \\ 2{,}0000 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, diperoleh matriks transformasi Householder,

$$\mathbf{H}_1 = I - \frac{2}{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{\begin{bmatrix} 3,4495 \\ 1,0000 \\ 2,0000 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3,4495 \\ 1,0000 \\ 2,0000 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3,4495 \\ 1,0000 \\ 2,0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,4495 \\ 1,0000 \\ 2,0000 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -0,4082 & -0,4082 & -0,8165 \\ -0,4082 & 0,8816 & -0,2367 \\ -0,8165 & -0,2367 & 0,5266 \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks transformasi Householder tersebut dikalikan dengan matriks $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{H}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,4082 & -0,4082 & -0,8165 \\ -0,4082 & 0,8816 & -0,2367 \\ -0,8165 & -0,2367 & 0,5266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,4495 & -2,0412 & -4,0825 \\ 0 & -0,1715 & -1,0532 \\ 0 & -1,3431 & -1,1064 \end{bmatrix}$$

karena matriks $\mathbf{H}_1\mathbf{A}$ belum membentuk matriks segitiga atas, maka bentuk matriks transformasi Householder dengan menggunakan matriks $\mathbf{A}'$ pada matriks $\mathbf{H}_1\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -0,1715 & -1,0532 \\ -1,3431 & -1,1064 \end{bmatrix}$$

Kemudian dilanjutkan dengan langkah yang sama yaitu menentukan vektor kolom pertama dari matriks $\mathbf{A}'$, yaitu $\boldsymbol{b} = (-0,1715 \quad -1,3431)^T$. Selanjutnya, dilakukan perhitungan untuk menentukan vektor $\boldsymbol{u}$,

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + sign(b_1)\|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} -0,1715 \\ -1,3431 \end{bmatrix} - 1,3540 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,5255 \\ -1,3431 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks $\mathbf{H'}_2$,

$$\mathbf{H'}_2 = I - \frac{2}{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{\begin{bmatrix} -1,5255 \\ -1,3431 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1,5255 \\ -1,3431 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1,5255 \\ -1,3431 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,5255 \\ -1,3431 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -0,1267 & -0,9919 \\ -0,9919 & 0,1267 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh matriks transformasi Householder $\mathbf{H}_2$,

$$\mathbf{H_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1267 & -0,9919 \\ 0 & -0,9919 & 0,1267 \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks transformasi Householder tersebut dikalikan dengan matriks $\mathbf{H}_1\mathbf{A}$,

$$\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1267 & -0,9919 \\ 0 & -0,9919 & 0,1267 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,4495 & -2,0412 & -4,0825 \\ 0 & -0,1715 & -1,0532 \\ 0 & -1,3431 & -1,1064 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2,4495 & -2,0412 & -4,0825 \\ 0 & 1,3540 & 1,2309 \\ 0 & 0 & 0,9045 \end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

Setelah diperoleh nilai $\mathbf{R}$, kemudian menentukan matriks $\mathbf{Q}$ dengan cara mengalikan matriks $\mathbf{H}_1$ dan $\mathbf{H}_2$ yang telah ditransposkan,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_2^T = \begin{bmatrix} -0,4082 & 0,8616 & 0,3015 \\ -0,4082 & 0,1231 & -0,9045 \\ -0,8165 & -0,4923 & 0,3015 \end{bmatrix}$$

Kemudian dilakukan perkalian matriks $\mathbf{Q}$ dan matriks $\mathbf{R}$ tersebut akan menghasilkan matriks $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{QR} = \begin{bmatrix} -0,4082 & 0,8616 & 0,3015 \\ -0,4082 & 0,1231 & -0,9045 \\ -0,8165 & -0,4923 & 0,3015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,4495 & -2,0412 & -4,0825 \\ 0 & 1,3540 & 1,2309 \\ 0 & 0 & 0,9045 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

PENERAPAN DEKOMPOSISI QR PADA SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Misal diberikan sistem persamaan linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dengan matriks $\mathbf{A}$ sebagai matriks koefisien, $\mathbf{x}$ adalah matriks variabel dan matriks kolom $\mathbf{b}$ sebagai matriks konstanta. Kemudian dekomposisi QR dari suatu matriks **A** berukuran $m \times n$, yaitu $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ disubstitusikan pada SPL sehingga menjadi $\mathbf{QRx} = \mathbf{b}$. Solusi dari SPL adalah nilai $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang memenuhi SPL tersebut. Untuk menyelesaikan solusi dari SPL tersebut maka dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut [5].

1. Selesaikan $\mathbf{Qy} = \mathbf{b}$, dengan **y** adalah matriks kolom yang berbentuk $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ sehingga diperoleh nilai $y_1, y_2, \dots, y_n$.
2. Selesaikan $\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$, dengan **x** adalah matriks kolom yang berbentuk $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ sehingga diperoleh nilai $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang merupakan solusi dari SPL.

Contoh 4 Diberikan SPL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dengan matriks **A** dan **b**,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan dekomposisi QR yang diambil dari contoh 3 maka diperoleh matriks **Q** dan matriks **R**,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0{,}4082 & 0{,}8616 & 0{,}3015 \\ -0{,}4082 & 0{,}1231 & -0{,}9045 \\ -0{,}8165 & -0{,}4923 & 0{,}3015 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -2{,}4495 & -2{,}0412 & -4{,}0825 \\ 0 & 1{,}3540 & 1{,}2309 \\ 0 & 0 & 0{,}9045 \end{bmatrix}$$

sehingga matriks **A** telah didekomposisi menjadi perkalian matriks **Q** dan matriks **R**.
Selanjutnya untuk menyelesaikan solusi dari SPL maka langkah pertama,

$$\begin{aligned} \mathbf{Qy} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{Q}^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}4082 & 0{,}8616 & 0{,}3015 \\ -0{,}4082 & 0{,}1231 & -0{,}9045 \\ -0{,}8165 & -0{,}4923 & 0{,}3015 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6{,}9402 \\ -1{,}6001 \\ -1{,}5075 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -6{,}9402 \\ -1{,}6001 \\ -1{,}5075 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya, langkah kedua

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} -2{,}4495 & -2{,}0412 & -4{,}0825 \\ 0 & 1{,}3540 & 1{,}2309 \\ 0 & 0 & 0{,}9045 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6{,}9402 \\ -1{,}6001 \\ -1{,}5075 \end{bmatrix}$$

diperoleh sistem persamaan yang bersesuaian,

$$-2{,}4495x_1 - 2{,}0412x_2 - 4{,}0825x_3 = -6{,}9402 \quad (1)$$

$$1{,}3540x_2 + 1{,}2309x_3 = -1{,}6001 \quad (2)$$

$$0{,}9045x_3 = -1{,}5075 \quad (3)$$

Berdasarkan persamaan (3) maka diperoleh x_3,

$$0{,}9045x_3 = -1{,}5075$$

$$x_3 = \frac{-1{,}5075}{0{,}9045} = -1{,}6667$$

dengan mensubstitusikan $x_3 = -1{,}6667$ ke persamaan (2) maka

$$1{,}3540x_2 + 1{,}2309x_3 = -1{,}6001$$

$$1{,}3540x_2 + (-2{,}0515) = -1{,}6001$$

$$1{,}3540x_2 = -1{,}6001 + 2{,}0515$$
$$x_2 = \frac{0{,}4514}{1{,}3540} = 0{,}3334$$

dengan mensubstitusikan $x_2 = 0{,}3334$ dan $x_3 = -1{,}6667$ ke persamaan (1) maka

$$-2{,}4495x_1 - 2{,}0412x_2 - 4{,}0825x_3 = -6{,}9402$$
$$-2{,}4495x_1 - 0{,}6805 + 6{,}8043 = -6{,}9402$$
$$-2{,}4495x_1 = 13{,}064$$
$$x_1 = \frac{13{,}064}{-2{,}4495} = 5{,}3333$$

Jadi, solusi yang diperoleh adalah $x_1 = 5{,}3333$, $x_2 = 0{,}3334$, dan $x_3 = -1{,}6667$.
Berdasarkan hasil perhitungan yang telah diperoleh, ditunjukkan bahwa solusi tersebut memenuhi $\mathbf{QRx} = \mathbf{b}$,

$$\mathbf{QRx} = \begin{bmatrix} -0{,}4082 & 0{,}8616 & 0{,}3015 \\ -0{,}4082 & 0{,}1231 & -0{,}9045 \\ -0{,}8165 & -0{,}4923 & 0{,}3015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2{,}4495 & -2{,}0412 & -4{,}0825 \\ 0 & 1{,}3540 & 1{,}2309 \\ 0 & 0 & 0{,}9045 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5{,}3333 \\ 0{,}3334 \\ -1{,}6667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut.

1. Dekomposisi QR dari suatu matriks $\mathbf{A}$, yaitu $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ dapat ditentukan dengan menggunakan transformasi Householder. Matriks $\mathbf{R}$ diperoleh dengan $\mathbf{R} = \mathbf{H}_k \dots \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{A}$ dan $\mathbf{Q}$ diperoleh dengan $\mathbf{Q} = \mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_2^T \dots \mathbf{H}_k^T$.
2. Sistem persamaan linear yang berbentuk $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kemudian dekomposisi QR dari suatu matriks $\mathbf{A}$ disubstitusikan pada SPL sehingga $\mathbf{QRx} = \mathbf{b}$, dimisalkan $\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$ dan selesaikan $\mathbf{Qy} = \mathbf{b}$ yaitu $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$, kemudian selesaikan $\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$, maka dengan mensubstitusikan $\mathbf{R}$ dan $\mathbf{y}$ diperoleh nilai $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang merupakan solusi dari SPL yang diselesaikan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Howard A. dan Chris R. *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. Edisi kesebelas. Wiley Global Education; 2013.
[2] Andy B. *Group and Symmetry*, University of Glasgow, Glasgow; 2005.
[3] Jamshid G. Dan Wu XS. *Numerical Methods in Computational Mechanics*. Taylor & Francis Group; 2016.
[4] Rosen KH. *Handbook of Linear Algebra Discrete Mathematics and Its Applications*. Taylor & Francis Group; 2014.
[5] Shelvia M. *Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan Dekomposisi QR*. Jurnal matematika UNP; 2014.

WIDIYA NAWATY : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
widiyanawaty@gmail.com

EVI NOVIANI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
evi_noviani@math.untan.ac.id

FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
fransiskusfran@math.untan.ac.id