

DINAMIKA AKAR KUADRAT PADA PEMODELAN MATEMATIKA POPULASI PEROKOK

Riyo Riadi, Evi Noviani, Meliana Pasaribu

INTISARI

Angka kematian akibat rokok semakin meningkat setiap tahunnya. Peningkatan jumlah populasi perokok mengakibatkan masalah kesehatan juga semakin meningkat. Oleh sebab itu dalam penelitian ini, dikonstruksikan pemodelan matematika jumlah perokok dan dianalisis kestabilannya. Data yang digunakan adalah data populasi perokok berumur lebih dari atau sama dengan 10 tahun di Provinsi Kalimantan Barat pada tahun 2018. Penduduk terbagi menjadi empat subpopulasi, yaitu subpopulasi perokok potensial (P), perokok kadang-kadang (L), perokok berat (S), dan subpopulasi mantan perokok (Q). Model matematika yang digunakan adalah model persamaan diferensial yang terdiri dari empat persamaan diferensial biasa. Dari model tersebut dicari titik ekuilibrium dan kestabilannya. Berdasarkan analisis, model tersebut memiliki satu titik ekuilibrium endemik perokok. Hal ini berarti dalam suatu keadaan selalu ada populasi yang merokok sebagai akibat dari interaksi antara subpopulasi perokok potensial dengan subpopulasi perokok kadang-kadang. Titik ekuilibrium endemik perokok ini merupakan titik ekuilibrium yang stabil asimtotik lokal. Berdasarkan simulasi numerik dengan nilai awal $P(0) = 15.175$, $L(0) = 933$, $S(0) = 5.328$ dan $Q(0) = 726$, diperoleh adanya peningkatan pada jumlah subpopulasi perokok Kadang-kadang dan mantan perokok, sedangkan jumlah perokok potensial dan berat mengalami penurunan.

Kata Kunci: Endemik perokok, titik ekuilibrium, stabil asimtotik lokal

PENDAHULUAN

Rokok merupakan salah satu produk olahan tanaman tembakau. Orang yang mengonsumsi rokok atau yang disebut perokok terdiri dari dua jenis, yaitu perokok aktif dan pasif. Perokok aktif merupakan individu yang merokok dan menghirup asap rokok secara langsung. Sedangkan perokok pasif adalah orang yang bukan perokok namun terpaksa atau menghirup asap rokok yang dikeluarkan oleh seorang perokok [1].

Menurut WHO (*World Health Organization*), tercatat setiap tahunnya rokok merenggut nyawa lebih dari 5 juta orang. Selain itu, WHO memperkirakan bahwa merokok akan membunuh sepuluh juta orang pada tahun 2020. Kemungkinan korban dari negara berkembang adalah 700 juta, dengan 70% korban adalah laki-laki, terutama di Asia. Dalam hal konsumsi rokok, Indonesia menempati urutan kelima di dunia setelah China, Amerika Serikat, Jepang, dan Rusia [2]. Menurut WHO, sepertiga dari 1,1 miliar perokok di dunia berusia 15 tahun atau lebih [3].

Rokok mengandung salah satu zat adiktif yang dimana terdapat kandungan kurang lebih 4000 elemen, dimana didalamnya terdapat 200 elemen dapat membahayakan kesehatan tubuh. Untuk individu yang menggunakan rokok, berdampak buruk bagi kesehatannya dan masyarakat. Dikarenakan kandungan zat adiktif yang terkandung pada rokok, dapat membuat penggunaannya sangat sulit untuk berhenti dan akibatnya menjadi kebiasaan. Sehingga semakin sering seorang merokok maka semakin tinggi kandungan zat adiktif dalam tubuh. Hal ini menimbulkan berbagai macam penyakit antara lain, penyakit pembuluh darah seperti, penyakit jantung, *stroke*, kanker, kandungan kemih, gangguan pada kehamilan, dan penyakit lainnya [4].

Dalam penelitian ini, peneliti mempelajari pemodelan perokok menggunakan dinamika akar kuadrat. Model matematika yang digunakan adalah model persamaan diferensial. Untuk memastikan

sifat-sifat model matematis yang diperoleh, dicari titik ekuilibrium dan kestabilannya. Populasi terdiri dari empat subpopulasi. Dalam model ini, terdapat subpopulasi perokok potensial (P), perokok kadang-kadang (L), perokok berat (S), dan mantan perokok (Q). Populasi perokok potensial berisi individu yang tertarik untuk merokok sebagai akibat dari interaksinya dengan perokok lain. Perokok kadang-kadang adalah individu yang tidak merokok setiap hari. Perokok berat adalah individu yang merokok setiap hari. Mantan perokok adalah individu yang tidak lagi merokok tetapi pernah merokok sebelumnya.

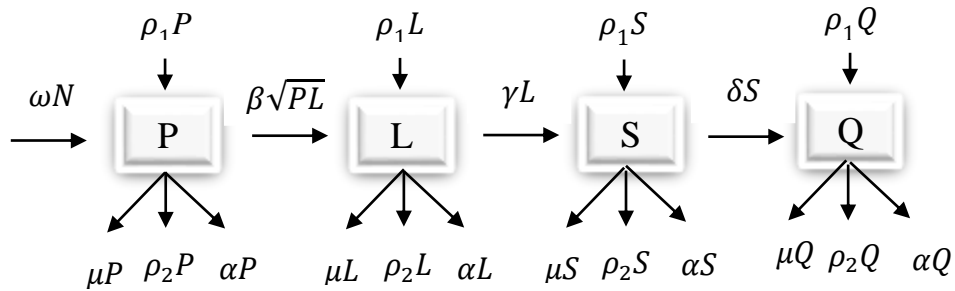
Beberapa peneliti telah mengembangkan model matematika tentang dinamika akar kuadrat [5]. Dalam penelitiannya dijelaskan pengkonstruksian model jumlah perokok menjadi empat subpopulasi. Hasil yang diperoleh adalah memaksimalkan orang yang berhenti merokok. Penelitian selanjutnya membahas dua model matematika dinamika perokok dengan interaksi berbentuk akar kuadrat dari interaksi antar subpopulasi [6]. Hasil yang diperoleh berupa interaksi antar perokok potensial dan perokok berat lebih mempengaruhi untuk merokok dibandingkan dengan perokok kadang-kadang. Kemudian dari beberapa peneliti yang telah mengembangkan model tersebut peneliti ingin menambahkan adanya faktor migrasi ke dalam masing-masing subpopulasi perokok. Model tersebut selanjutnya dicari titik ekuilibrium dan kestabilannya untuk melihat perilaku solusi sistem di sekitar titik ekuilibrium. Perilaku tersebut dapat diketahui dengan menyelidiki sifat kestabilan dari titik ekuilibrium tersebut.

PENGGONTRUKSIAN MODEL MATEMATIKA

Untuk membentuk model matematika jumlah perokok diperlukan asumsi-asumsi yang bersesuaian. Asumsi yang digunakan adalah sebagai berikut.

- a. Pada populasi terdapat proses imigrasi dan emigrasi.
- b. Individu dalam populasi diasumsikan merupakan individu dengan usia lebih dari atau sama dengan 10 tahun. Untuk selanjutnya individu tersebut dimasukkan ke dalam subpopulasi potensial perokok.
- c. Karena adanya interaksi antara individu yang potensial perokok dan perokok kadang-kadang, mengakibatkan individu yang potensial perokok menjadi seorang perokok. Kemudian individu perokok kadang-kadang menjadi seorang perokok berat dikarenakan adanya interaksi antara subpopulasi perokok berat dan kadang-kadang.
- d. Jika adanya kesadaran diri dari seorang perokok berat untuk berhenti dari merokok maka individu tersebut akan menjadi mantan perokok. Sehingga individu mantan perokok tidak akan merokok kembali dikarenakan tahu akan bahayanya rokok.
- e. Individu yang merokok (1-10 batang/hari) dikategorikan perokok kadang-kadang sedangkan individu yang merokok (> 10 batang/hari) dikategorikan perokok berat.
- f. Selalu terdapat interaksi antara individu perokok potensial dan perokok kadang-kadang. Dengan demikian $\sqrt{PL} \neq 0$ akibatnya $P \neq 0$ dan $L \neq 0$ [7].
- g. Kematian pada individu di dalam populasi dapat terjadi perokok aktif maupun perokok pasif.

Berdasarkan asumsi tersebut, dapat dinyatakan bahwa setiap subpopulasi jumlah perokok masing-masing mengalami faktor migrasi, masing-masing mengalami laju imigrasi dan laju emigrasi besarnya konstan dengan $\rho_1 > 0$ dan $\rho_2 > 0$. Laju kematian alami diasumsikan konstan dengan $\mu > 0$, laju kematian karena rokok sebesar $\alpha > 0$, sehingga dibentuklah model penyebaran jumlah perokok sebagai berikut.



Gambar 1 Diagram Pemodelan Jumlah Perokok

Dengan demikian diperoleh model matematika jumlah perokok sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = \omega N + \rho_1 P - \beta\sqrt{PL} - (\rho_2 + \mu + \alpha)P \quad (1)$$

$$\frac{dL}{dt} = \rho_1 L + \beta\sqrt{PL} - \gamma L - (\rho_2 + \mu + \alpha)L \quad (2)$$

$$\frac{dS}{dt} = \rho_1 S + \gamma L - \delta S - (\rho_2 + \mu + \alpha)S \quad (3)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \rho_1 Q + \delta S - (\rho_2 + \mu + \alpha)Q \quad (4)$$

Dengan,

- N : $P + L + S + Q$ adalah jumlah keseluruhan populasi.
 P : Jumlah individu perokok potensial bergantung pada waktu (Orang).
 L : Jumlah individu perokok kadang-kadang bergantung pada waktu (Orang).
 S : Jumlah individu perokok berat bergantung pada waktu (Orang).
 Q : Jumlah individu mantan perokok bergantung pada waktu (Orang).
 μ : Laju kematian alami ($\frac{\text{Orang}}{\text{Hari}}$).
 α : Laju kematian disebabkan oleh rokok ($\frac{\text{Orang}}{\text{Hari}}$).
 ω : Laju masuknya individu yang berumur ≥ 10 tahun ke dalam subpopulasi perokok potensial ($\frac{\text{Orang}}{\text{hari}}$).
 ρ_1 : Laju imigrasi populasi perokok ($\frac{\text{Orang}}{\text{Hari}}$).
 ρ_2 : laju emigrasi populasi perokok ($\frac{\text{Orang}}{\text{Hari}}$).
 $\beta_1\sqrt{PL}$: Laju kontak dinamika akar kuadrat antara potensial perokok dengan perokok kadang-kadang ($\frac{\text{Orang}}{\text{Hari}}$).
 γ : Laju perubahan perokok kadang-kadang menjadi perokok berat ($\frac{\text{Orang}}{\text{Hari}}$).
 δ : Laju perubahan individu dari perokok menjadi mantan perokok ($\frac{\text{Orang}}{\text{Hari}}$).

TITIK EKUILIBRIUM DARI MODEL MATEMATIKA

Berdasarkan model matematika jumlah perokok yang diperoleh, titik ekuilibrium yang dimiliki adalah endemik perokok. Artinya pada keadaan dalam populasi selalu adanya perokok, dikarenakan ada interaksi perokok potensial dan kadang-kadang. Akibatnya titik ekuilibrium endemik perokok pada perokok kadang-kadang dan perokok berat, dimana $L \neq 0$ dan $S \neq 0$ yang artinya selalu adanya perokok pada setiap populasi tersebut, maka untuk titik ekuilibrium endemik perokok (P, L, S, Q) dinotasikan dengan (P^*, L^*, S^*, Q^*) dimana $L^* \neq 0$ dan $S^* \neq 0$. Untuk mendapatkan titik ekuilibrium endemik perokok, maka dicari titik ekuilibrium dari Persamaan (1), (2), (3) dan (4). Langkah pertama dihitung Persamaan (2) sebagai berikut:

$$\rho_1 L^* + \beta\sqrt{P^*L^*} - \gamma L^* - (\rho_2 + \mu + \alpha)L^* = 0$$

$$\begin{aligned} \beta\sqrt{P^*L^*} + \rho_1L^* - \gamma L^* - (\rho_2 + \mu + \alpha)L^* &= 0 \\ (\beta\sqrt{P^*L^*})^2 &= ((\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)L^*)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Apabila ruas kiri dan kanan dikuadratkan pada Persamaan (5) didapat

$$P^* = \left(\frac{(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)^2}{\beta^2}\right)L^*. \quad (6)$$

Selanjutnya, substitusikan nilai P^* pada Persamaan (6) ke Persamaan (1):

$$\omega N + \rho_1P^* - \beta\sqrt{P^*L^*} - (\rho_2 + \mu + \alpha)P^* = 0 \quad (7)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \omega N + (\rho_1 - \rho_2 - \mu - \alpha)P^* - \beta\sqrt{P^*L^*} &= 0 \\ \omega N + (\rho_1 - \rho_2 - \mu - \alpha)\left(\frac{(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)^2}{\beta^2}\right)L^* - \beta\sqrt{\left(\frac{(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)^2}{\beta^2}\right)L^*L^*} &= 0 \\ L^* &= \frac{\omega N\beta^2}{(-\rho_1 + \rho_2 + \mu + \alpha)(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)^2 + \beta^2(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Selanjutnya substitusikan nilai L^* pada Persamaan (8) ke dalam Persamaan (6) sehingga diperoleh nilai

P^* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P^* &= \left(\frac{(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)^2}{\beta^2}\right)\left(\frac{\omega N\beta^2}{(-\rho_1 + \rho_2 + \mu + \alpha)(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)^2 + \beta^2(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)}\right) \\ P^* &= \frac{\omega N(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)^2}{(-\rho_1 + \rho_2 + \mu + \alpha)(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)^2 + \beta^2(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Kemudian nilai L^* pada Persamaan (8) disubstitusikan ke Persamaan (3) untuk mendapatkan nilai S^* sebagai berikut:

$$\rho_1S^* + \gamma L^* - \delta S^* - (\rho_2 + \mu + \alpha)S^* = 0, \quad (10)$$

sehingga

$$\begin{aligned} S^*(\rho_1 - \rho_2 - \mu - \alpha - \delta) + \gamma \frac{\omega N\beta^2}{(-\rho_1 + \rho_2 + \mu + \alpha)(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)^2 + \beta^2(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)} &= 0 \\ S^* &= \frac{\gamma\omega N\beta^2}{[(-\rho_1 + \rho_2 + \mu + \alpha)(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)^2 + \beta^2(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)](\rho_1 - \rho_2 - \mu - \alpha - \delta)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Nilai Q^* , diperoleh dengan substitusikan nilai S^* pada Persamaan (4) sebagai berikut:

$$(\rho_1 - \rho_2 - \mu - \alpha)Q^* + \delta S^* = 0, \quad (12)$$

sehingga untuk nilai

$$\begin{aligned} Q^* &= \frac{-\delta S^*}{(\rho_1 - \rho_2 - \mu - \alpha)} \\ Q^* &= \frac{\delta\gamma\omega N\beta^2}{[(-\rho_1 + \rho_2 + \mu + \alpha)(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)^2 + \beta^2(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)](\rho_1 - \rho_2 - \mu - \alpha - \delta)(\rho_1 - \rho_2 - \mu - \alpha)}. \end{aligned} \quad (13)$$

LINEARISASI SISTEM

Proses yang membantu sistem nonlinear menjadi sistem linear merupakan proses dari linearisasi. Digunakan untuk memperoleh kestabilan titik ekuilibrium dengan cara melakukan linearisasi sistem Persamaan (1), (2), (3) dan (4) menggunakan matriks Jacobian. Sehingga diperoleh matriks Jacobian J untuk model matematika jumlah perokok sebagai berikut dengan nilai.

$$\frac{\partial f_1}{\partial P} = -\frac{\beta\sqrt{PL}}{2P} + \rho_1 - (\rho_2 + \mu + \alpha), \quad \frac{\partial f_1}{\partial L} = -\frac{\beta\sqrt{PL}}{2L}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial Q} = 0.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial P} = \frac{\beta\sqrt{PL}}{2P}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial L} = \frac{\beta\sqrt{PL}}{2L} + \rho_1 - \gamma - (\rho_2 + \mu + \alpha), \quad \frac{\partial f_2}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial Q} = 0.$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial L} = \gamma, \quad \frac{\partial f_3}{\partial S} = \rho_1 - \delta - (\rho_2 + \mu + \alpha), \quad \frac{\partial f_3}{\partial Q} = 0.$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial L} = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial S} = \delta, \quad \frac{\partial f_4}{\partial Q} = \rho_1 - (\rho_2 + \mu + \alpha).$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial P} & \frac{\partial f_1}{\partial L} & \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial P} & \frac{\partial f_2}{\partial L} & \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_3}{\partial P} & \frac{\partial f_3}{\partial L} & \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_4}{\partial P} & \frac{\partial f_4}{\partial L} & \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial Q} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

KESTABILAN TITIK EKUILIBRIUM ENDEMIK PEROKOK

Analisis kesetabilannya diperoleh dengan mencari persamaan karakteristiknya pada $\det(J - \lambda I) = 0$ untuk menentukan nilai eigen (λ) dan sesuai dengan kriteria Routh Hurwitz. Dengan cara mensubstitusikan titik ekuilibrium (P^*, L^*, S^*, Q^*) kedalam Persamaan (14), sehingga diperoleh hasil matriks Jacobian yang sudah disubstitusikan sebagai berikut dengan nilai.

$$\frac{\partial f_1}{\partial P} = \frac{-\beta^2}{2(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)} - (\rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1), \quad \frac{\partial f_1}{\partial L} = -\frac{(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)}{2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial Q} = 0.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial P} = \frac{\beta^2}{2(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial L} = \frac{(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)}{2} - (\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1), \quad \frac{\partial f_2}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial Q} = 0.$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial L} = \gamma, \quad \frac{\partial f_3}{\partial S} = -(\delta + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1), \quad \frac{\partial f_3}{\partial Q} = 0.$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial L} = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial S} = \delta, \quad \frac{\partial f_4}{\partial Q} = -(\rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1).$$

Kemudian dicari nilai eigen dari matriks Jacobian $\det(J - \lambda I) = 0$.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial P} - \lambda & \frac{\partial f_1}{\partial L} & \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial P} & \frac{\partial f_2}{\partial L} - \lambda & \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_3}{\partial P} & \frac{\partial f_3}{\partial L} & -\frac{\partial f_3}{\partial S} - \lambda & \frac{\partial f_3}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_4}{\partial P} & \frac{\partial f_4}{\partial L} & \frac{\partial f_4}{\partial S} & -\frac{\partial f_4}{\partial Q} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (15)$$

Berdasarkan Persamaan (15), diperoleh persamaan karakteristiknya sebagai berikut:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c|ccc} & \frac{\partial f_2}{\partial L} - \lambda & \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial Q} & & \frac{\partial f_2}{\partial P} & \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_1}{\partial P} - \lambda & \frac{\partial f_3}{\partial L} & \frac{\partial f_3}{\partial S} - \lambda & \frac{\partial f_3}{\partial Q} & -\left(-\frac{\partial f_1}{\partial L}\right) & \frac{\partial f_3}{\partial P} & \frac{\partial f_3}{\partial S} - \lambda & \frac{\partial f_3}{\partial Q} \\ & \frac{\partial f_4}{\partial L} & \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial Q} - \lambda & & \frac{\partial f_4}{\partial P} & \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial Q} - \lambda \end{array} \right) = 0 \quad (16)$$

$$\Leftrightarrow (-(\delta + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1) - \lambda) (-(\rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1) -$$

$$\lambda) \left[\lambda^2 + \lambda \left(\frac{\beta^2}{2(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)} + \frac{(\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)}{2} + (\rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1) \right) + \right. \quad (17)$$

$$\left(\frac{\beta^2(\gamma+\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)}{2(\gamma+\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)} - \frac{(\gamma+\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)(\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)}{2} + (\gamma+\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)(\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-(\delta+\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)-\lambda)(-(\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)-\lambda)[\lambda^2+a_1\lambda+a_2]=0$$

$$\Leftrightarrow (-(\delta+\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)-\lambda)(-(\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)-\lambda)r(\lambda)=0$$

$$(-(\delta+\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)-\lambda)(-(\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)-\lambda)r(\lambda)=0 \quad (18)$$

Berdasarkan Persamaan (18) diperoleh nilai untuk λ_1 dan λ_2 , yaitu $\lambda_1 = -(\delta + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1) < 0$ dan $\lambda_2 = -(\rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1) < 0$. Keduanya memiliki nilai eigen bernilai negatif. Untuk melihat nilai-nilai eigen yang lainnya, perhatikan polinomial $r(\lambda)$. Nilai untuk $r(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ dengan $a_1 = \left(\frac{\beta^2}{2(\gamma+\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)} + \frac{(\gamma+\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)}{2} \right) + (\rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)$ dan $a_2 = \left(\frac{\beta^2(\gamma+\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)}{2(\gamma+\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)} - \frac{(\gamma+\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)(\rho_2+\mu+\alpha-\rho_1)}{2} \right) + (\gamma + \rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)(\rho_2 + \mu + \alpha - \rho_1)$. Nilai eigen pada polinomial $r(\lambda)$ bernilai negatif apabila $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$ sesuai dengan kriteria Routh Hurwitz.

SIMULASI

Simulasi digunakan untuk melihat kestabilan titik ekuilibrium. Adapun nilai parameter yang digunakan untuk simulasi titik ekuilibrium adalah sebagai berikut.

Tabel 1 Nilai parameter simulasi

Parameter	Nilai
ω	2
β	0,006
μ	0,0021
α	0,001
γ	0,06
δ	0,001
ρ_1	0,001
ρ_2	0,002

Nilai-nilai parameter pada Tabel 1 untuk nilai ω dan μ bersumber dari [6], selanjutnya untuk nilai β, α dan γ bersumber dari [7], kemudian untuk nilai parameter δ, ρ_1 dan ρ_2 dan bersumber dari [8]. Dari nilai parameter pada Tabel 1, disubsitusikan ke Persamaan (14), sehingga diperoleh titik ekuilibrium sebagai berikut:

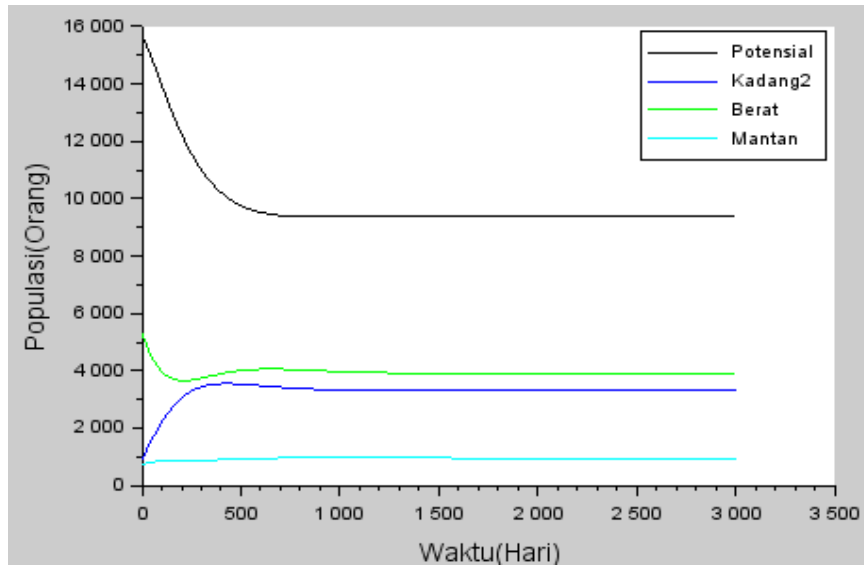
$$P^* = 9394$$

$$L^* = 3315$$

$$S^* = 3900$$

$$Q^* = 951$$

Kemudian masukan nilai parameter pada Tabel 1 dan nilai (P^*, L^*, S^*, Q^*) ke dalam Persamaan (1), (2), (3) dan (4) untuk mendapatkan hasil simulasi titik ekuilibrium endemik perokok. Sehingga didapat titik ekuilibrium endemik perokok $(P^*, L^*, S^*, Q^*) = (9394; 3315; 3900; 951)$, dengan nilai awal $P(0) = 15.715$ orang, $L(0) = 933$ orang, $S(0) = 5.328$ orang dan $Q(0) = 726$ orang, dengan N adalah jumlah dari Populasi keseluruhan. Berdasarkan data Riskesdas pada tahun 2018 pada populasi perokok penduduk umur diatas atau sama dengan 10 tahun menurut kabupaten/kota di provinsi Kalimantan Barat diperoleh simulasi model matematika endemik perokok dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2 Simulasi Titik Ekuilibrium Endemik Perokok

Dari Gambar 2 dapat disimpulkan bahwa pada subpopulasi yang ada mengalami peningkatan dan penurunan. Perokok potensial mengalami penurunan dikarenakan adanya faktor emigrasi, kematian disebabkan rokok ataupun kematian secara alami dan adanya keinginan dari individu tersebut untuk menjadi seorang perokok kadang-kadang. Kestabilan asimtotik didapati pada perokok pada waktu tertentu dengan jumlah populasi 9.394 orang. Kemudian, perokok kadang-kadang terjadi peningkatan yang disebabkan adanya perubahan individu potensial perokok menjadi perokok kadang-kadang dan adanya faktor migrasi pada populasi tersebut. Perokok kadang-kadang mengalami kestabilan dengan stabil asimtotik pada selang waktu tertentu dengan jumlah populasi 3.315 orang.

Pada perokok berat terjadi penurunan akibat kurangnya kesadaran individu perokok berat yang memutuskan untuk berhenti dari merokok, dan adanya faktor emigrasi, kematian akibat rokok ataupun secara alami. Perokok berat akan mengalami kestabilan dengan stabil asimtotik pada waktu tertentu dengan populasi sebanyak 3.900 orang. Sedangkan untuk subpopulasi mantan perokok terjadi peningkatan sebagai akibat dari individu perokok berat yang masih ada keinginan untuk berhenti dari merokok. Sehingga menunjukkan dalam populasi individu perokok akan selalu ada. Mantan perokok akan mengalami kestabilan dengan stabil asimtotik pada waktu tertentu dengan populasi sebanyak 951 orang.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa model matematika jumlah perokok, yaitu:

$$\frac{dP}{dt} = \omega N + \rho_1 P - \beta \sqrt{PL} - (\rho_2 + \mu + d)P$$

$$\frac{dL}{dt} = \rho_1 L + \beta \sqrt{PL} - \gamma L - (\rho_2 + \mu + d)L$$

$$\frac{dS}{dt} = \rho_1 S + \gamma L - \delta S - (\rho_2 + \mu + d)S$$

$$\frac{dQ}{dt} = \rho_1 Q + \delta S - (\rho_2 + \mu + d)Q.$$

Dengan $N = P + L + S + Q$ yang merupakan jumlah populasi keseluruhan. Dimana individu yang sudah berhenti merokok tidak akan merokok lagi dan adanya migrasi pada masing-masing subpopulasi. Populasi terdiri dari perokok potensial (P), perokok kadang-kadang (L), perokok berat (S) dan mantan perokok (Q). Kemudian diperoleh hasil dari titik ekuilibrium endemik perokok adalah

$$\begin{pmatrix} P^* \\ L^* \\ S^* \\ Q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega N(\gamma + \rho_2 + \mu + d - \rho_1)^2}{(-\rho_1 + \rho_2 + \mu + d)(\gamma + \rho_2 + \mu + d - \rho_1)^2 + \beta^2(\lambda + \rho_2 + \mu + d - \rho_1)} \\ \frac{\omega N \beta^2}{(-\rho_1 + \rho_2 + \mu + d)(\gamma + \rho_2 + \mu + d - \rho_1)^2 + \beta^2(\lambda + \rho_2 + \mu + d - \rho_1)} \\ \frac{\gamma \omega N \beta^2}{[(-\rho_1 + \rho_2 + \mu + d)(\gamma + \rho_2 + \mu + d - \rho_1)^2 + \beta^2(\lambda + \rho_2 + \mu + d - \rho_1)](\rho_1 - \rho_2 - \mu - d - \delta)} \\ \frac{\delta \gamma \omega N \beta^2}{[(-\rho_1 + \rho_2 + \mu + d)(\gamma + \rho_2 + \mu + d - \rho_1)^2 + \beta^2(\lambda + \rho_2 + \mu + d - \rho_1)](\rho_1 - \rho_2 - \mu - d - \delta)(\rho_1 - \rho_2 - \mu - d)} \end{pmatrix}.$$

Model matematis merokok memiliki stabilitas keseimbangan, yaitu titik keseimbangan epidemi yang diperoleh memiliki stabilitas asimtotik lokal, yaitu populasi akan selalu memiliki penyebaran perokok dalam jangka panjang. Simulasi menunjukkan bahwa jumlah perokok potensial menurun, yang berarti sedikit orang yang berpotensi merokok, dan jumlah perokok kadang-kadang meningkat sebagai akibat interaksi dengan sesama perokok. Namun, sangat sedikit orang yang berhasil berhenti merokok, sebagai akibat dari kurangnya kesadaran akan bahaya merokok.

REFERENSI

- [1] Jaya, M. *Pembunuh Berbahaya Itu Bernama Rokok*. Riz'ma, Yogyakarta. 2009.
- [2] Tarwoto. *Kesehatan Remaja Problem dan Solusinya*. Salemba Medika. Jakarta. 2010.
- [3] WHO. *Tobacco epidemic*. Report on the global. World Health Organization. 2010.
- [4] Aditama, T. *Merokok dan kesehatan, Edisi Ketiga*. Jakarta :UI Pers. 2001
- [5] Zeb, A., Zaman, Bibi F., dan Momani, S. *Optimal Control Startegies In Square-Root Dynamics of Smoking Model*. Departement of Matematics, COMSATS Institute of Information Technology Abbottabad. Pakistan. 2015.
- [6] Anggrain, M.V.Miswanto, dan Fatmawati. *Analisis Model Matematika Jumlah Perokok dengan Dinamika Akar Kuadrat*. Universitas Airlangga. Vol.2,No.2, halaman 10-20. 2013.
- [7] Zai, F.N. *Analisis Kestabilan Model Matematika Jumlah Perokok Pengaruh Kenaikan Harga Rokok Dengan Dinamika Akar Kuadrat*. Jurnal Matematika. 2020.
- [8] Soleh, Mohammad & Sazmita, Delli. *Model Matematika Jumlah Perokok dengan Dinamika Akar Kuadrat dan Faktor Migrasi*. Pekanbaru. 2017

Riyo Riadi : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
riyoriadi@student.untan.ac.id

Evi Noviani : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
evi_noviani@math.untan.ac.id

Meliana Pasaribu : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
meliana.pasaribu@math.untan.ac.id