Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 11, No. 1 (2022), hal 149-158.

METODE GENERALISASI UNTUK MENCARI AKAR KUADRAT MATRIKS BERORDO 2×2

Fereccella Zunetta, Nilamsari Kusumastuti, Fransiskus Fran

INTISARI

Suatu matriks A dikatakan akar kuadrat dari matriks B, dinotasikan sebagai $\sqrt{B}$, jika A memenuhi $A^2 = B$. Akar kuadrat suatu matriks tidak dapat ditentukan secara langsung dengan mengakarkan entri-entrinya, oleh karena itu diperlukan suatu metode khusus untuk mencarinya. Salah satu metode yang digunakan adalah metode Cayley-Hamilton, tetapi metode ini hanya dapat diterapkan pada matriks definit positif, yaitu matriks yang semua nilai eigennya bernilai positif. Sedangkan untuk matriks definit negatif dan indefinit, metode Cayley-Hamilton ini tidak dapat digunakan. Untuk itu, pada artikel ini dibahas mengenai metode lain yang merupakan generalisasi dari metode Cayley-Hamilton, yaitu metode generalisasi untuk mencari akar kuadrat dari sebarang matriks persegi berordo 2×2. Berdasarkan Teorema Cayley-Hamilton persamaan karakteristik dari matriks A adalah $\lambda^2 - (\mathrm{tr}\,(A))\lambda + \det(A) = 0$. Dimisalkan matriks B memenuhi $B = A^2$, maka berlaku $\det(A) = \pm\sqrt{\det(B)}$ dan $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \pm\sqrt{\mathrm{tr}\,(B) \pm 2\sqrt{\det(B)}}$. Jika $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ maka matriks A ditentukan melalui persamaan $A = \frac{1}{\mathrm{tr}(A)}(A + \det(A)\,I)$. Jika $\mathrm{tr}(A) = 0$, maka $A^2 \in \mathbf{I}$ dengan $\mathbf{I} = \{\alpha I | \alpha \in \mathbb{C}\}$, sehingga matriks A ditentukan melalui persamaan $A = \sqrt{\alpha}\sqrt{I}$, dengan $\sqrt{I}$ adalah akar kuadrat dari matriks identitas I.

Kata Kunci: *determinan matriks, Metode Cayley-Hamilton, trace matriks.*

PENDAHULUAN

Matriks merupakan jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan yang disebut entri-entri matriks [1]. Penggunaan matriks dalam matematika misalnya untuk menyederhanakan representasi dari sistem persamaan linear. Berdasarkan konsep perpangkatan matriks (pangkat dua) dijumpai teori akar kuadrat matriks, teori tersebut sering kali muncul dalam masalah matriks lain, seperti polinomial Matriks Laurent, *polar decomposition*, diagonalisasi matriks dan persamaan kuadrat matriks. Beberapa metode yang digunakan untuk mencari suatu akar kuadrat matriks yang dinotasikan dengan $\sqrt{A}$, antara lain metode diagonalisasi, metode Schur, metode Newton's dan metode Cayley Hamilton [2]. Metode-metode tersebut hanya diterapkan pada matriks-matriks definit positif, yaitu suatu matriks yang semua nilai eigennya bernilai positif. Dari permasalahan tersebut, penulis tertarik untuk membahas metode yang merupakan generalisasi dari metode Cayley-Hamilton, untuk mencari $\sqrt{A}$ dengan A tidak terbatas pada matriks definit positif. Metode generalisasi ini dapat digunakan untuk mencari $\sqrt{A}$ jika diberikan sebarang matriks A. Berdasarkan metode generalisasi diperoleh bahwa $\sqrt{A}$ tidak tunggal, sehingga dapat didefinisikan himpunan dari semua akar kuadrat dari matriks A yang dinotasikan dengan $\sqrt{\mathbf{A}}$. Pada artikel ini dibahas mengenai cara menentukan akar kuadrat matriks yang berordo 2×2 dengan mengkaji metode generalisasi melalui persamaan karakteristik matriksnya. Selain itu juga dikaji terlebih dahulu mengenai metode Cayley-Hamilton.

Pada artikel ini penulis menggunakan beberapa teori berupa definisi, teorema, lema dan contoh-contoh soal agar memahami metode dalam menentukan akar kuadrat suatu matriks persegi berordo 2×2. Misal diberikan sebarang matriks A yang memenuhi $A^2 = B$ untuk suatu $A, B \in M_2(\mathbb{C})$. Langkah pertama untuk menentukan A yang merupakan akar kuadrat dari matriks B adalah menentukan determinan dan *trace* dari matriks A. Selanjutnya menentukan persamaan karakteristik dari matriks A dengan mensubstitusikan determinan dan *trace* dari matriks A pada persamaan karakteristik dari matriks A. Kemudian berdasarkan Teorema Cayley-Hamilton yaitu mengganti λ dengan A. Langkah selanjutnya, yaitu substitusikan $A^2 = B$ maka diperoleh A. Jika $\mathrm{tr}(A) = 0$ maka $A^2 \in \mathbf{I}$ dengan $\mathbf{I} = \{\alpha I | \alpha \in \mathbb{C}\}$. Selanjutnya, misalkan $A^2 = I$ maka diperoleh $\sqrt{I}$ sehingga $A = \sqrt{\alpha}\sqrt{I}$.

DASAR-DASAR MATRIKS

Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan–bilangan yang disebut entri-entri dari matriks. Suatu matriks A dapat dituliskan dengan $A_{m\times n}$ yaitu matriks A berordo $m \times n$. Matriks berordo $m \times n$ yang memiliki entri berupa bilangan real dinotasikan sebagai $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, sedangkan matriks berordo $m \times n$ yang memiliki entri berupa bilangan kompleks dinotasikan sebagai $M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Jika entri-entri pada diagonal-diagonal utama dari matriks A dijumlahkan maka diperoleh trace dari A yang dinyatakan sebagai $\mathrm{tr}(A)$. Trace A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks persegi. Selanjutnya diberikan definisi determinan matriks A.

Definisi 1 [3] ***Determinan*** *suatu matriks A berordo $n \times n$ yaitu A=(a_{ij}), dinyatakan sebagai $|A|$ atau* det*(A) didefinisikan sebagai*

$$|A| = \det(A)\begin{cases} a_{11}, & \textit{jika } n = 1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}|M_{1j}|, & \textit{jika } n > 1 \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 1 M_{ij} menyatakan matriks $(\mathrm{n}-1)\times(\mathrm{n}-1)$ yang didapat dari A dengan menghapus baris dan kolom a_{ij}. Determinan dari M_{ij} disebut ***minor*** dari a_{ij}. Bilangan $(-1)^{\mathrm{i+j}}\det(M_{ij})$ yang dinotasikan dengan C_{ij} disebut ***kofaktor*** A_{ij} dari entri a_{ij}. Transpos dari matriks (C_{ij}) disebut ***adjoint*** dari A dan dinotasikan dengan $adj\ (A)$ [1].

Pada aljabar biasa, bila terdapat hubungan antara dua besaran a dengan x sedemikian sehingga $ax = 1$, maka dikatakan x adalah kebalikan dari a dan nilainya $x = \frac{1}{a}$. Dalam aljabar matriks, matriks satuan (*identity*) I beroperasi sebagai 1 dalam aljabar biasa [1]. Selanjutnya pada Definisi 2 dijelaskan mengenai invers matriks.

Definisi 2 [1] *Jika A adalah matriks persegi dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut* ***memiliki invers (nonsingular)*** *dan B disebut sebagai invers dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan maka A disebut sebagai* ***matriks singular****.*

Jika diberikan suatu matriks A dan A memiliki invers maka secara umum invers matriks A dapat dinyatakan ke dalam bentuk $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$. Selanjutnya dibahas tentang pengertian nilai eigen dan beberapa sifatnya.

Definisi 3 [1] *Jika A adalah suatu matriks $n \times n$ maka vektor tak nol* **x** *pada $\mathbb{R}^n$ disebut* ***vektor eigen*** *dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah suatu penggandaan skalar dari* **x***; yaitu $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut* ***nilai eigen*** *dari A dan* **x** *disebut suatu* ***vektor eigen*** *dari A yang berpadanan dengan λ.*

Untuk memperoleh nilai eigen dari matriks A yang berordo $n \times n$ persamaan $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$ harus terdapat satu solusi tak nol dari persamaan ini. Oleh karena itu dicarilah nilai $\det(\lambda I - A) = 0$. Persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$ disebut persamaan karakteristik matriks A. Skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini disebut nilai-nilai eigen A. Persamaan $\det(\lambda I - A) = p(\lambda)$ yang berupa polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik matriks A. Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka polinomial karakteristik A memiliki derajat n dan koefisien variabel λ^n adalah 1. Bentuk umumnya dapat ditulis sebagai

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

Adapun terkait dengan nilai eigen terdapat beberapa sifat yang dipaparkan pada Teorema 4.

Teorema 4 *Jika A adalah sebuah matriks persegi $n \times n$, maka penjumlahan dari nilai-nilai eigen matriks A sama dengan trace dari matriks A dan hasil perkalian dari nilai-nilai eigen A sama dengan determinan dari matriks A.*

Bukti:

Misal diberikan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ dan nilai eigen dari A adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, maka terbentuk persamaan karakteristik polinomial dari A, yaitu

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= (-1)^n(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n) \end{aligned} \tag{1}$$

ketika $\lambda = 0$ maka diperoleh

$$p(0) = \det(A - 0I) = \det(A) \tag{2}$$

$$p(0) = (-1)^n(0^n + c_1 0^{n-1} + \cdots + c_{n-1}0 + c_n) = (-1)^n c_n \tag{3}$$

dari persamaan (2) dan (3) diperoleh $\det(A) = (-1)^n c_n$, maka

$$c_n = (-1)^n \det(A) \tag{4}$$

Dengan mengekspansi kofaktor-kofaktor dari $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ diperoleh bentuk

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$\Leftrightarrow p(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda) + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1}\det(M_{i1})$$

Karena $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1}\det(M_{i1})$ memiliki λ pangkat tertinggi $n-2$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1}\det(M_{i1})$ tidak memiliki bentuk λ^n maupun λ^{n-1}. Oleh karena itu bentuk λ^n maupun λ^{n-1} pastilah terdapat pada $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda)$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda) &= (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + \cdots \\ &= (-1)^n\left(\lambda^n - \lambda^{n-1}\left(tr(A)\right) + \cdots\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Dari persamaan (1) dan (5) diperoleh $c_1\lambda^{n-1} = -\lambda^{n-1}\mathrm{tr}(A) \Leftrightarrow c_1 = -\mathrm{tr}(A)$. Perlu diingat bahwa $p(\lambda) = 0$ yang berarti berlaku bahwa $p(\lambda)$ dapat difaktorisasikan menjadi

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda_1 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda) \\ &= \lambda^n - \lambda^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) + \cdots + (-1)^n\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n \end{aligned} \tag{6}$$

dari persamaan (4) dan (6) didapat $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$ dan $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$. ■

Terkait persamaan karakteristik, terdapat suatu sifat yang disebut Teorema Cayley-Hamilton. Teorema 5 menjelaskan mengenai hubungan matriks *persegi A berordo* $n \times n$ dengan persamaan karakteristiknya.

Teorema 5 (Cayley-Hamilton) *Diberikan matriks persegi A berordo $n \times n$ dan*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

adalah polinomial karakteristik dari matriks A, maka

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1A + a_0I = 0,$$

disebut memenuhi persamaan karakteristiknya.

Bukti:

Diberikan sebarang matriks persegi A yang memiliki invers, maka A^{-1} dari A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$$

$$\Leftrightarrow \quad AA^{-1} = A\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$$
$$\Leftrightarrow \quad I = A\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$$
$$\Leftrightarrow \quad \det(A)I = A\operatorname{adj}(A)$$

Persamaan $A\operatorname{adj}(A) = \det(A)I$ berlaku untuk semua matriks persegi sehingga pasti berlaku untuk matriks $(A - \lambda I)$, jadi $(A - \lambda I)\operatorname{adj}(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)I = p(\lambda)I$. Entri-entri dari $\operatorname{adj}(A - \lambda I)$ adalah polinomial berderajat $n - 1$. Oleh karena itu $\operatorname{adj}(A - \lambda I)$ dapat ditulis sebagai polinomial λ berderajat $n - 1$ dengan koefisien berbentuk matriks, yaitu

$$\operatorname{adj}(A - \lambda I) = A_{n-1}\lambda^{n-1} + A_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + A_1\lambda + A_0 \tag{7}$$

Dengan $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ adalah koefisien berbentuk matriks. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I)I &= (A - \lambda I)\operatorname{adj}(A - \lambda I)\\ &= (A - \lambda I)(A_{n-1}\lambda^{n-1} + A_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + A_1\lambda + A_0)\\ &= AA_0 + (AA_1 - A_0)\lambda + \cdots + (AA_{n-1} - A_{n-2})\lambda^{n-1} - A_{n-1}\lambda^n \end{aligned} \tag{8}$$

karena $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, maka

$$p(\lambda)I = I\lambda^n + a_{n-1}I\lambda^{n-1} + \cdots + a_1I\lambda + a_0I \tag{9}$$

Dengan menyamakan persamaan (8) dan (9) diperoleh

$$AA_0 + (AA_1 - A_0)\lambda + \cdots + (AA_{n-1} - A_{n-2})\lambda^{n-1} - A_{n-1}\lambda^n = I\lambda^n + a_{n-1}I\lambda^{n-1} + \cdots + a_1I\lambda + a_0\, I$$

Dengan menyamakan koefisien dari λ^k pada ruas kiri dan ruas kanan diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} AA_0 &= a_0I & (10)\\ AA_1 - A_0 &= a_1I & (11)\\ AA_2 - A_1 &= a_2I & (12)\\ &\vdots & \vdots\\ AA_{n-1} - A_{n-2} &= a_{n-1}I & (13)\\ -A_{n-1} &= I & (14)\end{aligned}$$

Kalikan ruas kiri dan ruas kanan pada persamaan (10) dengan A^0, (11) dengan A^1, (12) dengan A^2, $\cdots$, (13) dengan A^{n-1},(14) dengan A^n maka diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} AA_0 &= a_0I & (15)\\ (AA_1 - A_0)A &= a_1IA & (16)\\ (AA_2 - A_1)A^2 &= a_2IA^2 & (17)\\ &\vdots & \vdots\\ (AA_{n-1} - A_{n-2})A^{n-1} &= a_{n-1}IA^{n-1} & (18)\\ -A_{n-1}A^n &= IA^n & (19)\end{aligned}$$

Kemudian ditambahkan, maka jumlah ruas kiri adalah 0. Sedangkan ruas kanan adalah

$$p(A) = IA^n + a_{n-1}IA^{n-1} + \cdots + a_1IA + a_0I,$$

Sehingga terbukti bahwa $p(A) = 0$. ■

Jika λ diganti dengan A dalam persamaan

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

maka diperoleh

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1A + a_0 = \mathbf{O}$$

Jadi A^n dapat dinyatakan dalam matriks-matriks A^{n-1}, $A^{n-1}, \ldots, A$ dan I, dengan I adalah matriks identitas dan $\mathbf{O}$ adalah matriks yang semua entri-entrinya nol. Berdasarkan Teorema Cayley-Hamilton untuk mencari akar kuadrat dari suatu matriks berlaku jika matriks yang dicari adalah definit positif dan mempunyai nilai-nilai eigen yang berbeda. Misal diberikan suatu matriks A berordo $n \times n$, maka bentuk polinomial dari matriks A berdasarkan Teorema Cayley-Hamilton dapat dituliskan dalam bentuk $A^r = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1A + b_0I$ untuk $r \geq n$ dimana r dan n. Oleh karena itu bentuk polinomial matriks A berordo 2×2 berdasarkan Teorema Cayley-Hamilton menjadi $A^2 = b_1 A + b_0 I$, dengan b_0 dan b_1 yang memenuhi $\lambda^2 = b_1\lambda + b_0$ [4].

METODE GENERALISASI

Pada bab ini dijelaskan mengenai suatu akar kuadrat matriks dan metode generalisasi untuk mencari akar kuadrat matriks dengan matriks-matriks yang dicari akarnya adalah sebarang matriks berordo 2×2.

Definisi 6 [5] *Misalkan $M_n(\mathbb{C})$ adalah himpunan dari semua matriks kompleks yang berordo $n \times n$. Matriks A dikatakan sebagai* ***akar kuadrat dari matriks B****, jika matriks $A^2 = B$ dengan $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ dan akar kuadrat dari matriks B dinotasikan sebagai $\sqrt{B}$.*

Salah satu metode untuk mencari akar kuadrat matriks adalah metode Cayley-Hamilton. Namun matriks yang digunakan sebatas matriks definit positif. Pada Teorema 7 dijelaskan mengenai Metode Cayley-Hamilton untuk mencari akar kuadrat dari suatu matriks persegi yang definit positif sebelum digeneralisasi.

Teorema 7 [6] *Misal diberikan $A \in M_2(\mathbb{R})$dan A adalah matriks definit positif dan nilai-nilai eigen A berbeda maka $\sqrt{A} = a_1 A + a_0 I$ untuk suatu $a_0, a_1 \neq 0$ dan memenuhi $\sqrt{\lambda_A} = a_0 + a_1\lambda_A$.*

Bukti:

Misalkan A adalah matriks definit positif dan A memiliki nilai-nilai eigen yang berbeda. Karena A adalah matriks definit positif berordo 2×2 maka $\lambda_{A_1}, \lambda_{A_2} > 0$ yang berakibat $a_0, a_1 \neq 0$. Misalkan $\sqrt{A} = C$ dimana $C \in M_2(\mathbb{R})$ maka

$$C = a_0 I + a_1 C^2$$
$$\Leftrightarrow C^2 = \frac{1}{a_1} C - \frac{a_0}{a_1} I, (a_1 \neq 0).$$

Misal $\frac{1}{a_1} = b_1$ dan $-\frac{a_0}{a_1} = b_0$, sehingga

$$C^2 = b_1 C + b_0 I \text{ untuk suatu } b_0, b_1 \neq 0 \text{ dan memenuhi } {\lambda_C}^2 = b_1\lambda_C + b_0.$$

Berdasarkan Teorema Cayley-Hamilton yang menyatakan bahwa untuk semua matriks persegi dapat dinyatakan sebagai

$$C^2 = b_1 C + b_0 I$$

Karena $\sqrt{A} = C$ maka

$$C^2 = b_1 C + b_0 I$$
$$\Leftrightarrow A = b_1\sqrt{A} + b_0 I$$

Ganti A dengan λ_A, jadi

$$\lambda_A = b_1\sqrt{\lambda_A} + b_0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\lambda_A} = \frac{1}{b_1}\lambda_A - \frac{b_0}{b_1}$$

Karena $\frac{1}{b_1} = a_1$ dan $-\frac{b_0}{b_1} = a_0$,

maka

$$\sqrt{\lambda_A} = a_1\lambda_A + a_0$$

Ganti λ_A dengan A diperoleh

$$\sqrt{A} = a_1 A + a_0 I, \text{ untuk suatu } a_0, a_1 \neq 0$$

dan memenuhi $\sqrt{\lambda_A} = a_0 + a_1\lambda_A$. ■

Selanjutnya dengan generalisasi metode Cayley-Hamilton pada Teorema 7 ditentukan akar kuadrat suatu matriks berordo 2×2. Untuk penjelasan lebih lanjut, dipaparkan pada Teorema 8.

Teorema 8 [5] *Misal $A^2 = B$ dengan $A, B \in M_2(\mathbb{C})$*, dan $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ *maka* $\sqrt{B} = \frac{1}{\operatorname{tr}(A)}(B + \det(A)I)$.

Bukti: Misal $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, maka

$$\text{tr}\ (A) = a_{11} + a_{22}$$

dan

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned} & |A - \lambda\text{I}| = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{12}a_{21} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda^2 - \big(\text{tr}\ (A)\big)\lambda + \det(A) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Berdasarkan Teorema Cayley-Hamilton ganti λ dengan A, maka persamaan (20) menjadi

$$A^2 - \big(\text{tr}\ (A)\big)A + \det(A)I = 0$$

sehingga

$$A^2 = \big(\text{tr}(A)\big)A - \det(A)\,I \tag{21}$$

Jika $A^2 = B$, maka persamaan (21) menjadi

$$\begin{aligned} B &= \big(\text{tr}\ (A)\big)\sqrt{B} - \det(A)I \\ \Leftrightarrow\quad B + \det(A)I &= \big(\text{tr}\ (A)\big)\sqrt{B} \\ \Leftrightarrow\quad \frac{1}{\text{tr}(A)}(B + \det(A)I) &= \sqrt{B} \end{aligned}$$

■

Berdasarkan Teorema 8 jika suatu matriks A adalah matriks singular maka

$$\sqrt{B} = \frac{1}{\text{tr}(A)}B \tag{22}$$

Pada Lema 9 dijelaskan hubungan $\text{tr}(A^2)$ dengan $\text{tr}(A)$ dan $\det(A)$.

Lema 9 [5] *Misalkan* $A \in M_2(\mathbb{C})$, *maka* $\text{tr}\ (A^2) = (\text{tr}\ (A))^2 - 2\det(A)$.

Bukti: Berdasarkan Teorema 2.13 misal $\lambda_1$dan λ_2 adalah dua nilai eigen dari matriks A. Maka ${\lambda_1}^2$ dan ${\lambda_2}^2$ adalah nilai eigen dari A^2. Diketahui $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ dan $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$, maka

$$\text{tr}(A^2) = {\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = (\text{tr}(A))^2 - 2\det(A).$$

■

Selanjutnya dari Teorema 8 andaikan diketahui matriks B, kemudian dicari nilai dari $A = \sqrt{B}$ maka diperlukan nilai $\text{tr}(A)$ dan $\det(A)$. Oleh karena itu pada Proposisi 10 dijelaskan cara mencari $\text{tr}(A)$ dan $\det(A)$ melalui matriks B tanpa mengetahui matriks A.

Proposisi 10 [5] Misal diberikan $A^2 = B$ untuk suatu $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, maka pernyataan berikut berlaku:

i. $\det(A) = \pm\sqrt{\det(B)}$

ii. $\text{tr}(A) = \pm\sqrt{\text{tr}\ (B) \pm 2\sqrt{\det(B)}}$

Bukti:

i. Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, maka $\det\ (A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

dan

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {a_{11}}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} & {a_{22}}^2 + a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

Untuk $\det(\sqrt{B})$ substitusikan $A^2 = B$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(A^2)} &= \sqrt{({a_{11}}^2 + a_{12}a_{21})({a_{22}}^2 + a_{12}a_{21}) - (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22})(a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22})} \\ &= \sqrt{(a_{11}a_{22})^2 - 2\,a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} + (a_{21}a_{12})^2} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2}$$

Akibatnya, $\det(A) = \pm\sqrt{\det(A^2)} = \pm\sqrt{\det(B)}$. ■

ii. Berdasarkan Lema 9

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A^2) &= (\operatorname{tr}(A))^2 - 2\det(A) \\ \Leftrightarrow \quad \operatorname{tr}(A^2) + 2\det(A) &= (\operatorname{tr}(A))^2 \\ \Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{\operatorname{tr}(A^2) + 2\det(A)} &= \operatorname{tr}(A) \end{aligned}$$

Karena $A^2 = B$ dan berdasarkan i yaitu $\det(A) = \pm\sqrt{\det(B)}$ maka $\operatorname{tr}(A) = \pm\sqrt{\operatorname{tr}(B) \pm 2\sqrt{\det(B)}}$. ■

Selanjutnya diberikan contoh untuk Lema 9 dan Proposisi 10.

Contoh 11 Misal diberikan $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ dengan $A^2 = B$ dan $B = \begin{bmatrix} 3+3i & 7i \\ 3 & 5+2i \end{bmatrix}$. Tentukanlah $\sqrt{B}$!

Penyelesaian:

$$\det(B) = (3+3i)(5+2i) - 7i \times 3 = 15 + 6i + 15i - 6 - 21i = 9$$

dan

$$\operatorname{tr}(B) = (3+3i) + (5+2i) = 8 + 5i$$

Jika $A^2 = B$, maka berdasarkan Proposisi 10 diperoleh $\det(A) = \pm\sqrt{\det(B)} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ dan $\operatorname{tr}(A) = \pm\sqrt{8 + 5i \pm 2\sqrt{9}} = \pm\sqrt{8 + 5i \pm 6}$. Sehingga berdasarkan Teorema (23) diperoleh

$$\sqrt{B} = \frac{1}{(\operatorname{tr}(A))}[B + \det(A)\, I = \frac{1}{\pm\sqrt{8+5i\pm 6}}\left(\begin{bmatrix} 3+3i & 7i \\ 3 & 5+2i \end{bmatrix} \pm 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Akibatnya diperoleh dua solusi, yaitu

i. $\sqrt{B} = \frac{1}{\pm\sqrt{14+5i}}\left(\begin{bmatrix} 3+3i & 7i \\ 3 & 5+2i \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{14+5i}}\begin{bmatrix} 6+3i & 7i \\ 3 & 8+2i \end{bmatrix}$

ii. $\sqrt{B} = \frac{1}{\pm\sqrt{2+5i}}\left(\begin{bmatrix} 3+3i & 7i \\ 3 & 5+2i \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2+5i}}\begin{bmatrix} 3i & 7i \\ 3 & 2+2i \end{bmatrix}$

Jadi, $\sqrt{\mathbf{B}} = \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{14+5i}}\begin{bmatrix} 6+3i & 7i \\ 3 & 8+2i \end{bmatrix}, \pm\frac{1}{\sqrt{2+5i}}\begin{bmatrix} 3i & 7i \\ 3 & 2+2i \end{bmatrix}\right\}$.

Selanjutnya pada Lema 12 dijelaskan cara mencari A jika diketahui $\operatorname{tr}(A) = 0$ yang berakibat $A^2 \in \mathbf{I}$. Dengan demikian diperoleh suatu himpunan $\sqrt{\mathbf{I}}$ yang tak hingga banyaknya.

Lema 12 [5] *Misal* $A \in M_2(\mathbb{C})$ *jika* $\operatorname{tr}(A) = 0$ *maka* $A^2 \in \mathbf{I}$ *dengan* $\mathbf{I}$ *adalah matriks diagonal.*

$$\mathbf{I} = \{\alpha I | \alpha \in \mathbb{C}\}$$

Bukti: Berdasarkan Teorema 8 diketahui $\lambda - (\operatorname{tr}(A))\lambda + \det(A) = 0$, jika λ diganti dengan A diperoleh

$$A - (\operatorname{tr}(A))A + \det(A)I = 0 \tag{23}$$

oleh karena itu, jika $\operatorname{tr}(A) = 0$, maka dari persamaan (23) diperoleh

$$\begin{aligned} & A^2 - 0.A + \det(A)\, I = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & A^2 + \det(A)\, I = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & A^2 = -\det(A)\, I \text{ dan } A^2 \in \mathbf{I}. \end{aligned}$$ ■

Lema 13 [5] *Untuk setiap* $\delta \in \mathbb{C}$ *dan sebarang matriks* $A \in M_2(\mathbb{C})$, $\sqrt{\delta A} = \sqrt{\delta}\sqrt{A}$.

Bukti:

i. Misal $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ dengan $B^2 = A$ dan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, maka diperoleh $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ dan $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Jika $A^2 = B$, maka berdasarkan Proposisi 10

$$\operatorname{tr}(B) = \pm\sqrt{\operatorname{tr}(A) \pm 2\sqrt{\det(A)}} = \pm\sqrt{(a_{11} + a_{22}) \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}$$

dan

$$\det(B) = \pm\sqrt{\det(A)} = \pm\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Kemudian dihitung $\sqrt{A}$, berdasarkan Teorema 8 diperoleh

$$\sqrt{A} = \frac{1}{\text{tr}(B)}(A + \det(B)\, I) = \frac{1}{\pm\sqrt{(a_{11} + a_{22}) \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

ii. Misal diberikan $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$ dan $Y^2 = X$ dengan $Y = \delta A = \delta\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta a_{11} & \delta a_{12} \\ \delta a_{21} & \delta a_{22} \end{bmatrix}$

maka, tr $(Y) = \delta a_{11} + \delta a_{22} = \delta(a_{11} + a_{22})$ dan $\det(Y) = \delta^2 a_{11}a_{22} - \delta^2 a_{12}a_{21} = \delta^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$. Jika $Y^2 = X$, maka berdasarkan Proposisi 10

$$\det(X) = \pm\sqrt{\det(Y)} = \pm\sqrt{\delta^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} = \pm\delta\sqrt{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

dan

$$\text{tr}\,(X) = \pm\sqrt{\delta(a_{11} + a_{22}) \pm 2\sqrt{\delta^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}} = \pm\sqrt{\delta}\sqrt{(a_{11} + a_{22}) \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}$$

Kemudian dihitung $\sqrt{Y}$, berdasarkan Teorema 8 diperoleh

$$\begin{aligned} \sqrt{Y} &= \frac{1}{\text{tr}(X)}(Y + \det(X)\, I) \\ &= \frac{1}{\pm\sqrt{\delta}\sqrt{(a_{11} + a_{22}) \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}}\left(\delta\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \delta\sqrt{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{\delta}{\pm\sqrt{\delta}\sqrt{(a_{11} + a_{22}) \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \sqrt{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \sqrt{\delta}\left(\frac{1}{\pm\sqrt{(a_{11} + a_{22}) \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \sqrt{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right) \end{aligned}$$

Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa $\sqrt{Y} = \sqrt{\delta A} = \sqrt{\delta}\sqrt{A}$. ∎

Pada Contoh 14 diberikan masing-masing contoh penggunaan Lema 12 dan Lema 13

Contoh 14

1. Misalkan $A, I \in M_2(\mathbb{C})$ dan $A^2 = I$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Tentukanlah $\sqrt{I}$!

Penyelesaian:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {a_{11}}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} & {a_{22}}^2 + a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

Jika $A^2 = I$, maka $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {a_{11}}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} & {a_{22}}^2 + a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$. Diperoleh

$${a_{11}}^2 + a_{12}a_{21} = 1 \tag{24}$$

$$a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} = 0 \tag{25}$$

$$a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} = 0 \tag{26}$$

$${a_{22}}^2 + a_{12}a_{21} = 1 \tag{27}$$

Dari persamaan (25) didapat $a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} = 0 \Leftrightarrow a_{12}(a_{11} + a_{22}) = 0$ maka $a_{12} = 0$ atau $a_{11} + a_{22} = 0$. Dari persamaan (26) didapat $a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} = 0 \Leftrightarrow a_{21}(a_{11} + a_{22}) = 0$ maka $a_{21} = 0$ atau $a_{11} + a_{22} = 0$. Dari persamaan (25) dan (26) diperoleh

i $\begin{cases} \text{jika} \quad a_{12} = 0 \quad \text{maka} \quad a_{11} + a_{22} \neq 0 \\ \text{jika} \quad a_{21} = 0 \quad \text{maka} \quad a_{11} + a_{22} \neq 0 \end{cases}$

Sehingga diperoleh $a_{12} = 0, a_{21} = 0$, dan $a_{11} + a_{22} \neq 0$.

ii $\begin{cases} \text{jika} \quad a_{12} \neq 0 \quad \text{maka} \quad a_{11} + a_{22} = 0 \\ \text{jika} \quad a_{21} \neq 0 \quad \text{maka} \quad a_{11} + a_{22} = 0 \end{cases}$

Sehingga diperoleh $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, dan $a_{11} + a_{22} = 0$.

Dari i dan ii dicari nilai a_{11} dan a_{22}

a. Kasus pertama, jika $a_{11} + a_{22} = 0$ maka persamaan (25) dan (26) berlaku. Dari persamaan (24) diketahui $a_{11}{}^2 + a_{21}a_{12} = 1$ atau $a_{11} = \sqrt{1 - a_{21}a_{12}}$. Karena $a_{11} + a_{22} = 0$, maka diperoleh $a_{11} = -a_{22} = -\sqrt{1 - a_{21}a_{12}}$. Untuk kasus yang pertama diperoleh solusi yaitu
$$\left\{\begin{bmatrix} \sqrt{1 - a_{21}a_{12}} & a_{12} \\ a_{21} & -\sqrt{1 - a_{21}a_{12}} \end{bmatrix} \middle| a_{21}, a_{12} \in \mathbb{C}\right\}$$
b. Kasus kedua, jika $a_{11} + a_{22} \neq 0$ maka $a_{12} = 0$ dan $a_{21} = 0$. Sehingga $a_{11} = \pm 1$ dan $a_{22} = \pm 1$, karena itu diperoleh solusi, yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Sehingga dari kedua kasus tersebut diperoleh
$$\sqrt{\mathbf{I}} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\} \cup \left\{\begin{bmatrix} \sqrt{1 - a_{21}a_{12}} & a_{12} \\ a_{21} & -\sqrt{1 - a_{21}a_{12}} \end{bmatrix} \middle| a_{21}, a_{12} \in \mathbb{C}\right\}$$

2. Misalkan $B = \begin{bmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$, kemudian dicari $\sqrt{B}$!

Penyelesaian:

Berdasarkan Lema 3.13 matriks B dapat dinyatakan dalam bentuk $B = 36\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 36I$. Sehingga $\sqrt{B} = \sqrt{36I} = \pm 6\sqrt{I}$. Berdasarkan Lema 13 diperoleh
$$\sqrt{\mathbf{I}} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\} \cup \left\{\begin{bmatrix} \sqrt{1 - a_{21}a_{12}} & a_{12} \\ a_{21} & -\sqrt{1 - a_{21}a_{12}} \end{bmatrix} \middle| a_{21}, a_{12} \in \mathbb{C}\right\}.$$
Jadi, $\sqrt{\mathbf{B}} = \left\{\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}\right\} \cup \left\{\begin{bmatrix} 6\sqrt{1 - a_{21}a_{12}} & 6a_{12} \\ 6a_{21} & -6\sqrt{1 - a_{21}a_{12}} \end{bmatrix} \middle| a_{21}, a_{12} \in \mathbb{C}\right\}.$

KESIMPULAN

Jika A adalah suatu matriks di $M_2(\mathbb{C})$, maka persamaan karakteristik A yaitu $|A - \lambda I| = 0$ memiliki derajat 2 dan koefisien variabel λ^2 adalah 1. Jika matriks definit positif A dengan persamaan karakteristik $|A - \lambda I| = 0$ memiliki nilai-nilai eigen yang berbeda, maka untuk mencari $\sqrt{A}$ dapat menggunakan metode Cayley-Hamilton yaitu $\sqrt{A} = a_0 I + a_1 A$. Pada metode Cayley-Hamilton solusi yang diperoleh adalah tunggal. Selanjutnya dengan menerapkan metode generalisasi, jika A adalah suatu matriks identitas $I \in M_2(\mathbb{C})$ maka solusi dari $\sqrt{I}$ adalah tak hingga banyaknya. Solusi dari $\sqrt{I}$ jika A^2 memenuhi $A^2 = I$ adalah
$$\sqrt{\mathbf{I}} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\} \cup \left\{\begin{bmatrix} \sqrt{1 - a_{21}a_{12}} & a_{12} \\ a_{21} & -\sqrt{1 - a_{21}a_{12}} \end{bmatrix} \middle| a_{21}, a_{12} \in \mathbb{C}\right\}.$$
Kemudian untuk sebarang matriks $B \in M_2(\mathbb{C})$, dimisalkan matriks B yang memenuhi $A^2 = B$ untuk $A \in M_2(\mathbb{C})$ jika $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, maka $A = \frac{1}{\mathrm{tr}(A)}(B + \det(A)I)$. Sedangkan jika $\mathrm{tr}(A) = 0$, maka $A^2 \in \mathbf{I}$ sehingga $A = \sqrt{\alpha}\sqrt{I}$ untuk suatu $\alpha \in \mathbb{C}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. dan Rorres, Chris. *Aljabar Linear Entriter Versi Aplikasi*, *Ed ke-8* [Indiasari, Refina. dan Harmein, Irzam, trans]. Erlangga, Jakarta: Erlangga; 2004

[2] Al-Tamimi, I.A. The Square Roots of 2×2 Nonsingular Matrices. *International Journal of Difference Equations*. 2011; 6(1):61-64

[3] Leon, S.J. *Aljabar Linear dan Aplikasinya Edisi ke-5* [Bondan, Alit, trans]. Jakarta: Erlangga; 2001.

[4] Erawati, Nur., dan Panrita, A.B. Perluasan Teorema Cayley-Hamilton pada Matriks $m \times n$. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*. 2011; 8(1):1-11

[5] Singh, R.M. A Generalized Method to Find the Square Root of Matrix Whose Characteristic Equation is Quadratic. *International Journal of Mathematic And its Applications.* 2020*;* 8(1):95-100.

[6] Rao, S.S., Jagadeeshwar, P. dan Somasekhar, K. On the Square Root of A Matrix. *Journal of Global Research in Mathematic Archives*. 2013; 1(11):30-33.

FERECCELLA ZUNETTA : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, fereccella.zunetta@student.untan.ac.id

NILAMSARI KUSUMASTUTI : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, nilamsari@math.untan.ac.id

FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, fransiskusfran@math.untan.ac.id