Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 11, No. 1 (2022), hal 121 –128

BILANGAN AKROMATIK PADA GRAF BINTANG, GRAF POHON PISANG DAN GRAF KEMBANG API

Darul Ihsan, Yundari, Fransiskus Fran

INTISARI

Pewarnaan lengkap adalah pewarnaan simpul sehingga untuk setiap pasangan warna (a, b) terdapat sisi $e = (v_1, v_2)$ dengan v_1 diwarnai a dan v_2 diwarnai b. Permasalahan yang dikaji pada pewarnaan lengkap adalah mencari bilangan akromatik yaitu maksimum banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lengkap. Bilangan akromatik dinotasikan dengan lambang $\psi(G)$. Pada penelitian ini dibahas tentang bilangan akromatik pada graf khusus yaitu graf bintang S_n, graf pohon pisang $B_{2,n}$, graf pohon pisang $B_{3,n}$, graf kembang api $F_{2,n}$ dan graf kembang api $F_{3,n}$ dengan $n \geq 3$. Graf bintang S_n adalah graf dengan $n + 1$ simpul, dengan satu simpul berdejarat n yang dinamakan simpul pusat, dan n simpul berderajat satu yang dinamakan daun. Graf Pohon pisang $B_{m,n}$ adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan satu daun dari setiap m salinan graf bintang S_n ke sebuah simpul baru yang disebut simpul akar. Graf kembang api $F_{k,n}$ adalah graf yang diperoleh dari k salinan graf bintang dengan cara menghubungkan sebuah daun dari setiap S_n melalui sebuah lintasan. Berdasarkan penelitian diperoleh bilangan akromatik pada graf bintang adalah 2*. Bilangan akromatik pada graf pohon pisang $B_{2,n}$ dan $B_{3,n}$ berturut-turut adalah* 4 *dan* 5*. Bilangan akromatik pada graf kembang api $F_{2,n}$ dan $F_{3,n}$ adalah* 4 *dan* 5*.*

Kata kunci: *pewarnaan graf, pewarnaan simpul, pewarnaan lengkap.*

PENDAHULUAN

Salah satu pembahasan dalam teori graf yang hingga kini masih berkembang yaitu tentang pewarnaan graf. Pewarnaan graf dibagi menjadi tiga pewarnaan yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi dan perwarnaan bidang [1]. Pewarnaan simpul adalah pemberian warna pada simpul sedemikian sehingga setiap dua simpul yang saling bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Konsep ini berlaku juga pada pewarnaan sisi dan pewarnaan bidang. Pewarnaan lengkap merupakan pengembangan dari pewarnaan simpul. Pewarnaan lengkap adalah pewarnaan simpul sehingga untuk setiap pasangan warna (a, b) terdapat sisi $e = (v_1, v_2)$ dengan v_1 diwarnai a dan v_2 diwarnai b [2].

Permasalahan yang dapat dikaji dalam pewarnaan lengkap adalah maksimum banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lengkap suatu graf G yang disebut bilangan akromatik. Penelitian yang membahas tentang bilangan akromatik telah dilakukan oleh Thilagavanthy dan Santha di [3], yaitu penelitian tentang bilangan akromatik pada graf khusus graf barbel dan graf matahari. Berdasarkan hal tersebut, pada artikel ini lebih lanjut membahas bilangan akromatik pada objek graf khusus lainnya yaitu graf bintang, pohon pisang dan kembang api.

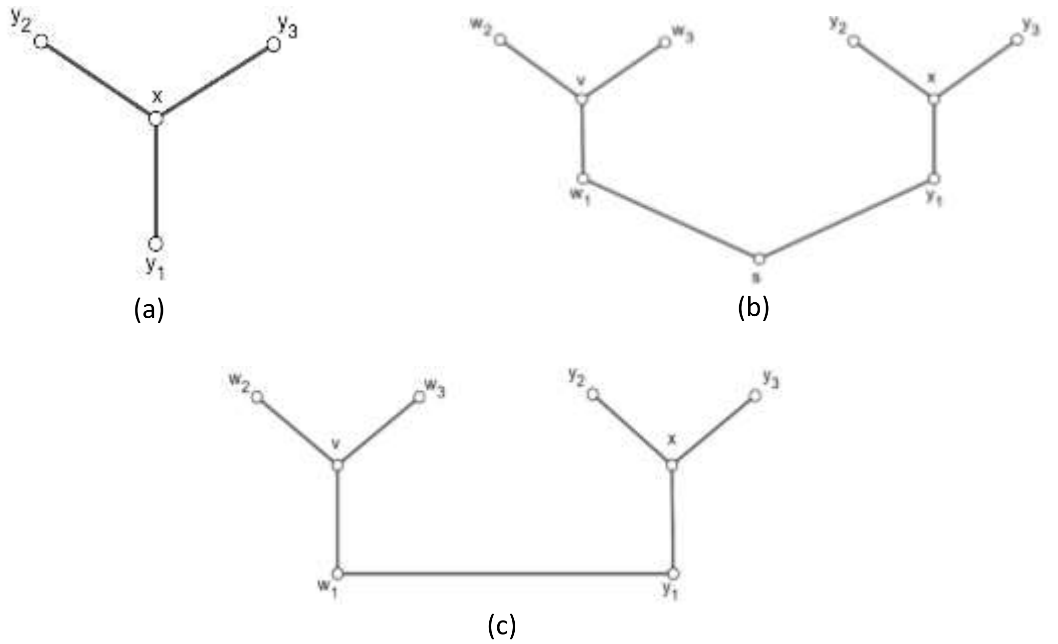
Graf bintang, graf pohon pisang dan graf kembang api adalah graf yang merupakan pohon. Graf yang merupakan pohon yaitu graf tak berarah terhubung dan tidak memiliki sirkuit [1]. Selain itu, terdapat keterkaitan antara beberapa graf yang merupakan pohon tersebut. Keterkaitan graf tersebut yaitu graf pohon pisang terbentuk dari beberapa graf bintang yang setiap satu daun pada graf bintang tersebut dihubungkan ke satu simpul baru, sedangkan graf kembang api terdiri dari beberapa graf bintang yang setiap satu daun graf tersebut dihubungkan melalui sebuah lintasan.

Bilangan akromatik pada beberapa graf yang merupakan pohon diperoleh dengan melakukan pewarnaan lengkap. Kemudian, menentukan maksimum banyaknya warna yang digunakan dalam pewarnaan lengkap sehingga diperoleh pola bilangan pada graf tersebut. Berdasarkan pola bilangan tersebut maka diperoleh bilangan akromatik pada graf tersebut.

PEWARNAAN GRAF

Graf G didefinisikan sebagai <u>pasangan</u> himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul [1]. Berdasarkan ada atau tidaknya sirkuit, graf dapat disebut sebagai pohon (graf tidak memiliki sirkuit). Graf yang disebut pohon contohnya adalah graf bintang, graf pohon pisang dan graf kembang api.

Graf bintang S_n adalah graf dengan $n + 1$ simpul, dengan satu simpul berdejarat n yang dinamakan simpul pusat, dan n simpul berderajat satu, yang dinamakan daun [4]. Adapun contoh dari graf bintang S_n terdapat pada Gambar 1(a). Graf Pohon pisang $B_{m,n}$ adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan satu daun dari setiap m salinan graf bintang S_n ke simpul baru yang disebut sebagai simpul akar [5]. Adapun contoh dari graf pohon pisang terdapat pada Gambar 1(b). Graf kembang api $F_{k,n}$ dengan $k, n \in \mathbb{N}$ adalah graf yang diperoleh dari k salinan graf bintang dengan cara menghubungkan sebuah daun dari setiap s_n melalui sebuah lintasan [6]. Adapun contoh dari graf kembang api terdapat pada Gambar 1(c).



Gambar 1 (a) Graf Bintang S_3, (b) Graf Pohon Pisang $B_{2,3}$ dan (c) Graf Kembang Api $F_{2,4}$

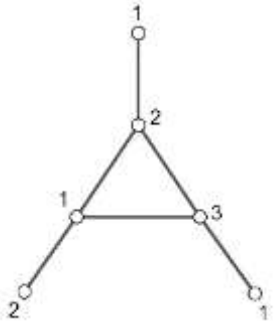
Pewarnaan graf merupakan pemberian warna pada simpul, sisi ataupun bidang [7]. Pemberian warna dalam graf dapat menggunakan himpunan warna seperti {merah, biru,..,hijau} atau himpunan bilangan asli $\{1,2, \dots, n\}$ pada setiap simpul sisi maupun bidang. Pada bagian ini hanya dibahas tentang pewarnaan simpul. Penjelasan lebih lengkap diberikan definisi berikut ini.

Definisi 1 [1] *Pewarnaan simpul adalah memberi warna pada simpul-simpul di dalam graf sedemikian sehingga setiap dua simpul bertetangga mempunyai warna yang berbeda.*

Pada pewarnaan simpul, dapat ditentukan minimum warna yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul-simpul pada graf yang diberikan. Adapun minimum warna tersebut dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 2 [8] *Jika G dapat diwarnai dengan pewarnaan simpul maka bilangan kromatik dari G adalah jumlah warna minimum yang digunakan pada pewarnaan di graf G. Bilangan kromatik dinotasikan dengan $\chi(G)$.*

Dari Definisi 1 dan Definisi 2 diberikan contoh pewarnaan simpul pada suatu graf pada gambar 2. Terdapat 3 warna dalam pewarnaan graf G yaitu warna 1, warna 2 dan warna 3.



Gambar 2 Pewarnaan simpul pada graf G

Berdasarkan Gambar 2 terlihat bahwa graf G menggunakan pewarnaan simpul dengan setiap simpul yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Pada graf G memiliki minimum banyaknya warna sebanyak tiga warna, sehingga bilangan kromatik dari graf G adalah 3.

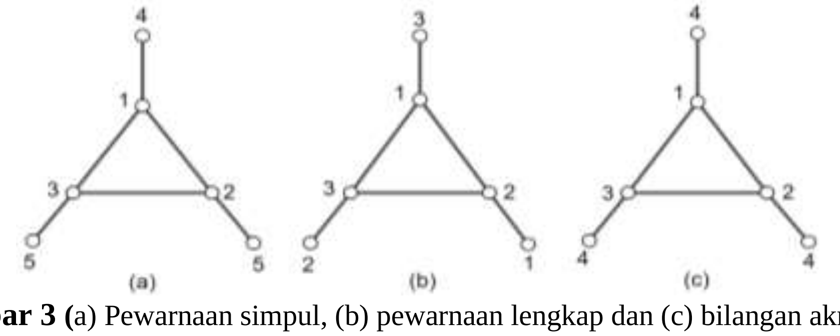
PEWARNAAN LENGKAP DAN BILANGAN AKROMATIK

Pada tahun 1968 diperkenalkan konsep pewarnaan lengkap yang merupakan pengembangan dari pewarnaan simpul [9]. Pada saat itu diperkenalkan pula konsep bilangan akromatik yang didefinisikan bilangan maksimum w dari pewarnaan lengkap pada simpul G, sehingga diperoleh maksimum warna yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul G [9]. Adapun penjelasan mengenai pewarnaan lengkap dan bilangan akromatik dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 3 [2] *Pewarnaan lengkap adalah pewarnaan simpul sehingga untuk setiap pasangan warna* (a, b) *terdapat sisi* $e = (v_1, v_2)$ *dengan* v_1 *diwarnai* a *dan* v_2 *diwarnai* b.

Definisi 4 [2] *Bilangan akromatik adalah maksimum banyaknya warna yang digunakan dalam pewarnaan lengkap graf* G *dan dilambangkan dengan* $\psi(G)$.

Dari Definisi 3 dan Definisi 4 diberikan contoh pewarnaan simpul, pewarnaan lengkap dan bilangan akromatik pada suatu graf pada Gambar 3.



Gambar 3 (a) Pewarnaan simpul, (b) pewarnaan lengkap dan (c) bilangan akromatik

Pada Gambar 3 terlihat bahwa Gambar 3(a) merupakan pewarnaan simpul dengan menggunakan lima warna, tetapi bukan pewarnaan lengkap karena ada pasangan warna yang tidak terpenuhi yaitu pasangan warna $(1,5), (2,4), (3,4), (4,5)$. Sedangkan pada Gambar 3(b) merupakan pewarnaan lengkap yang menggunakan tiga warna dengan pasangan warna $(1,2), (1,3), (2,3)$. Kemudian pada Gambar 3(c) pewarnaan lengkap dengan menggunakan warna sebanyak empat warna, sehingga diperoleh $\psi(G) = 4$.

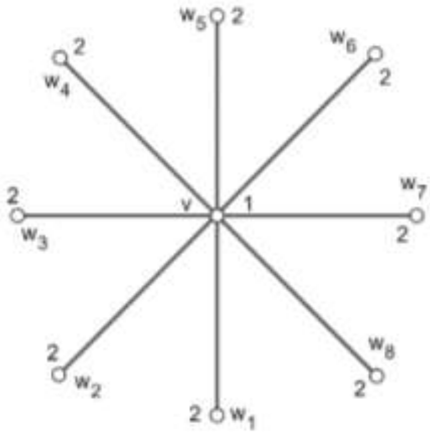
Pada penelitian ini dibahas bilangan akromatik pada graf bintang S_n, graf pohon pisang $B_{2,n}$, graf pohon pisang $B_{3,n}$, graf kembang api $F_{2,n}$, dan graf kembang api $F_{3,n}$. Adapun hasil dari penelitian tentang bilangan akromatik pada graf-graf tersebut dijelaskan pada teorema-teorema berikut.

Teorema 3.1 *Bilangan akromatik graf bintang yaitu* $\psi(S_n) = 2$ *dengan* $n \geq 3$.

Bukti:

Diberikan graf bintang S_n dengan $V(S_n) = \{v, w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n\}$ dan v merupakan simpul pusat. Didefinisikan pewarnaan pada graf S_n yaitu c:$V(S_n) \to \{1,2\}$ dengan $c(v_1) = 1$ dan $c(w_i) = 2$. Dari pewarnaan tersebut maka c merupakan pewarnaan lengkap. Berdasarkan Definisi 4 maka diperoleh $\psi(S_n) \geq 2$. Selanjutnya andaikan $\psi(S_n) = 3$. Diketahui v adalah simpul pusat dan bertetangga dengan $w_i, \forall i \in \{1,2, \ldots, n\}$, maka warna v dan w_i haruslah berbeda. Hal ini berati tersisa dua warna yang digunakan untuk mewarnai w_i. Akan tetapi, karena simpul-simpul w_i tersebut tidak bertetangga, maka pasangan warna dari dua warna yang tersisa tidak mungkin ada. Hal tersebut kontradiksi dengan Definisi 3 oleh karena itu harus $\psi(S_n) = 2$. ■

Dari penjelasan tersebut diberikan pewarnaan lengkap pada Gambar 4.



Gambar 4 Pewarnaan lengkap pada graf bintang S_8 dengan $\psi(S_8) = 2$

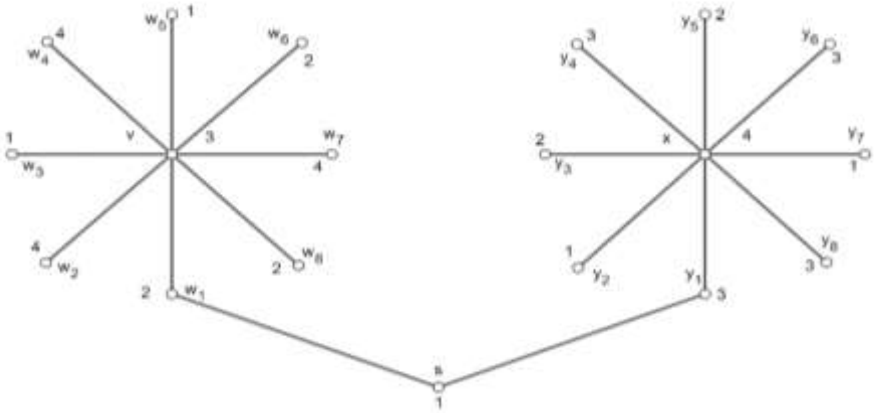
Pada Gambar 4 dapat dilihat bahwa pewarnaan lengkap pada graf bintang S_8 menggunakan maksimum banyaknya warna yaitu 2 warna dengan setiap pasangan warna digunakan minimal muncul pada satu sisi.

Teorema 3.2 *Jika $B_{2,n}$ adalah graf pohon pisang dengan $n \geq 3$ maka $\psi(B_{2,n}) = 4$.*

Bukti:

Misalkan graf G adalah graf pohon pisang $B_{2,n}$ dengan $n \geq 3$ terdiri dari simpul akar yaitu s, himpunan simpul graf bintang yang pertama $\{v, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, dan himpunan graf bintang yang kedua $\{x, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Dari pemisalan tersebut, didefinisikan pewarnaan yaitu $c: V(B_{2,n}) \to \{1,2,3,4\}$ dengan $c(s) = c(y_2) = 1$, $c(w_1) = c(y_3) = 2$, $c(y_1) = c(v) = 3$, $c(x) = 4$, kemudian untuk simpul $w_2, w_3, \ldots, w_n$ diberikan warna 1, 2 atau 4, dan untuk simpul $y_4, y_5, \ldots, y_n$ diberi warna 1, 2, atau 3. Dari pewarnaan tersebut maka c merupakan pewarnaan lengkap. Berdasarkan Definisi 4 diperoleh $\psi(B_{2,n}) \geq 4$. Selanjutnya, andaikan $\psi(B_{2,n}) = 5$, maka simpul yang berderajat lebih dari satu diwarnai dengan lima warna berbeda. Hal ini berarti tersisa $n - 5$ simpul daun berderajat satu yang belum diwarnai. Adapun warna yang akan diberikan pada $n - 5$ simpul daun yang tersisa adalah empat warna dari lima warna yang telah digunakan. Hal tersebut karena satu warna telah diberikan pada simpul pusat graf bintang S_n, akan tetapi pewarnaan tersebut tidaklah mungkin terjadi, karena ada pasangan warna antara simpul berderajat 2 yang bukan simpul akar tidak terpenuhi. Sehingga pewarnaan tersebut kontradiksi dengan Definisi 3 oleh karena itu harus $\psi(B_{2,n}) = 4$. ■

Dari penjelasan tersebut diberikan pewarnaan lengkap pada Gambar 5.



Gambar 5 Pewarnaan lengkap pada graf pohon pisang $B_{2,8}$ dengan $\psi\left(B_{2,8}\right) = 4$

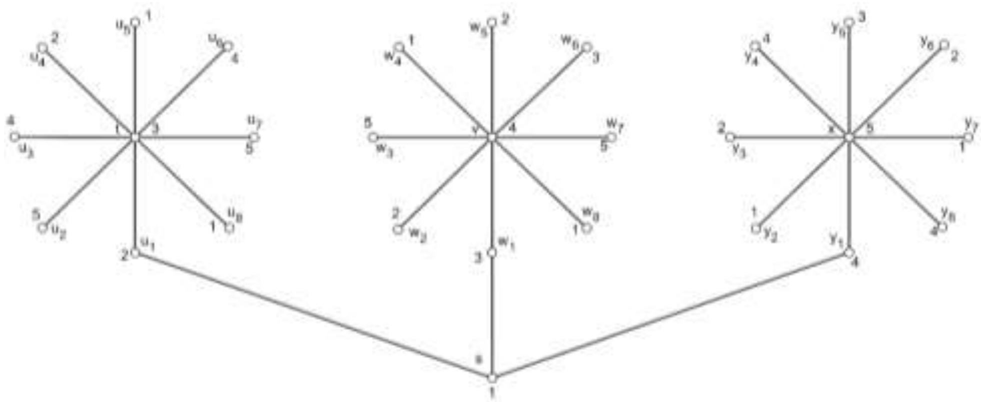
Pada Gambar 5 dapat dilihat bahwa pewarnaan lengkap menggunakan maksimum banyaknya warna yaitu 4 warna dengan setiap pasangan warna yang digunakan minimal muncul pada satu sisi.

Teorema 3.3 *Jika $B_{3,n}$ adalah graf pohon pisang dengan $n \geq 3$ maka $\psi\left(B_{3,n}\right) = 5$.*

Bukti:

Misalkan graf G adalah graf pohon pisang $B_{3,n}$ dengan $n \geq 3$ terdiri dari simpul akar yaitu s, himpunan simpul graf bintang yang pertama $\{t, u_1, \dots, u_n\}$, himpunan graf bintang yang kedua $\{v, w_1, w_2, \dots, w_n\}$, dan himpunan graf bintang yang ketiga $\{x, y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Dari pemisalan tersebut selanjutnya didefinisikan pewarnaan lengkap yaitu $c: V\left(B_{3,n}\right) \to \{1,2,3,4,5\}$ dengan $c(s) = c(y_2) = 1$, $c(u_1) = c(y_3) = c(w_2) = 2$, $c(t) = c(w_1) = 3$, $c(v) = c(y_1) = 4$, $c(x) = c(u_2) = 5$. Kemudian untuk simpul $\{u_3, u_4, \dots, u_n\}$ diberikan warna 1, 2, 4 atau 5, untuk simpul $w_3, w_4, \dots, w_n$ diberi warna 1, 2, 3 atau 5, dan untuk simpul $y_4, y_5, \dots, y_n$ diberikan warna 1, 2, 3 atau 4. Dari pewarnaan tersebut maka c merupakan pewarnaan lengkap. Berdasarkan Definisi 4 diperoleh $\psi\left(B_{3,n}\right) \geq 5$. Lebih lanjut, andaikan $\psi\left(B_{3,n}\right) = 6$, maka terdapat 7 simpul berderajat lebih dari satu yang diberikan 6 warna berbeda pada simpul-simpul tersebut. Hal ini berarti terdapat dua simpul dengan warna sama, dua simpul dengan warna yang sama adalah simpul pusat dan salah satu simpul berderajat 2. Setelah pemberian warna tersebut, tersisa $n - 6$ simpul daun brderajat 1 yang belum diwarnai. Adapun warna yang akan diberikan adalah 5 warna dari 6 warna yang telah digunakan. Hal ini dikarenakan satu warna telah diberikan pada simpul pusat graf bintang S_n. Akan tetapi, pewarnaan tersebut tidaklah mungkin karena salah satu pasangan warna antara simpul berderajat 2 tidak terpenuhi. Sehingga pewarnaan tersebut kontradiksi dengan Definisi 3 maka harus $\psi\left(B_{3,n}\right) = 5$. ■

Dari penjelasan tersebut diberikan pewarnaan lengkap pada Gambar 6.



Gambar 6 Pewarnaan lengkap pada graf pohon pisang $B_{3,8}$ dengan $\psi\left(B_{3,8}\right) = 5$

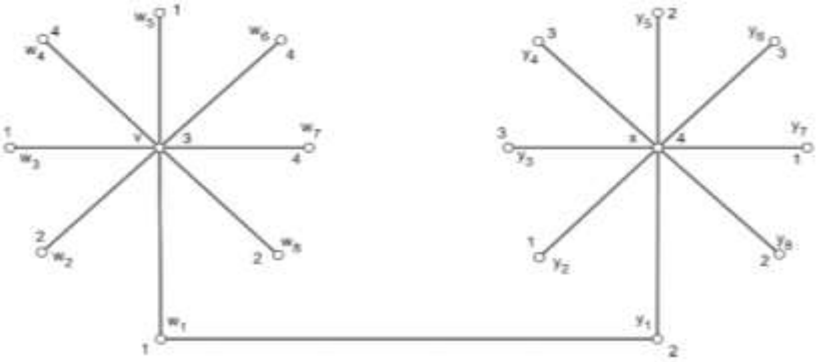
Pada Gambar 6 dapat dilihat bahwa pewarnaan lengkap menggunakan maksimum banyaknya warna yaitu 5 warna dengan setiap pasangan warna yang digunakan minimal muncul pada satu sisi.

Teorema 3.4 *Jika $F_{2,n}$ adalah graf kembang api dengan $n \geq 3$ maka $\psi(F_{2,n}) = 4$.*

Bukti:

Misalkan graf G adalah graf kembang api $F_{2,n}$ dengan $n \geq 3$ terdiri dari himpunan simpul graf bintang yang pertama $\{v, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, dan himpunan graf bintang yang kedua $\{x, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Dari pemisalan tersebut, selanjutnya didefinisikan pewarnaan lengkap yaitu $c: V(F_{2,n}) \rightarrow \{1,2,3,4\}$ dengan $c(w_1) = c(y_2) = 1,\ c(y_1) = c(w_2) = 2, c(v) = c(y_3) = 3, c(x) = 4$, kemudian untuk simpul $w_3, w_4, \ldots, w_n$ diberikan warna 1, 2 atau 4, dan untuk simpul $y_4, y_5, \ldots, y_n$ diberi warna 1, 2 atau 3. Dari pewarnaan tersebut maka c merupakan pewarnaan lengkap. Berdasarkan Definisi 4 diperoleh $\psi(F_{2,n}) \geq 4$. Selanjutnya, andaikan $\psi(F_{2,n}) = 5$, maka pewarnaan dapat dilakukan dengan menentukan 4 warna yang berbeda pada simpul-simpul berderajat lebih dari satu. Hal ini berarti tersisa $n - 4$ simpul daun yang berderjat satu yang belum diwarnai. Adapun warna yang diberikan pada simpul-simpul ini adalah warna ke 5 dan 3 warna yang telah digunakan, 3 warna yang dipilih harus berbeda dengan simpul pusat graf bintang S_n. Hal tersebut bukan merupakan pewarnaan lengkap, karena ada pasangan warna antara warna ke 5 dengan warna simpul berderajat 2 tidak terpenuhi. Sehingga pewarnaan tersebut kontradiksi dengan Definisi 3 oleh karena itu harus $\psi(F_{2,n}) = 4$. ■

Dari penjelasan tersebut diberikan pewarnaan lengkap pada Gambar 7.



Gambar 7 Pewarnaan lengkap pada graf kembang api $F_{2,8}$ dengan $\psi(F_{2,8}) = 4$

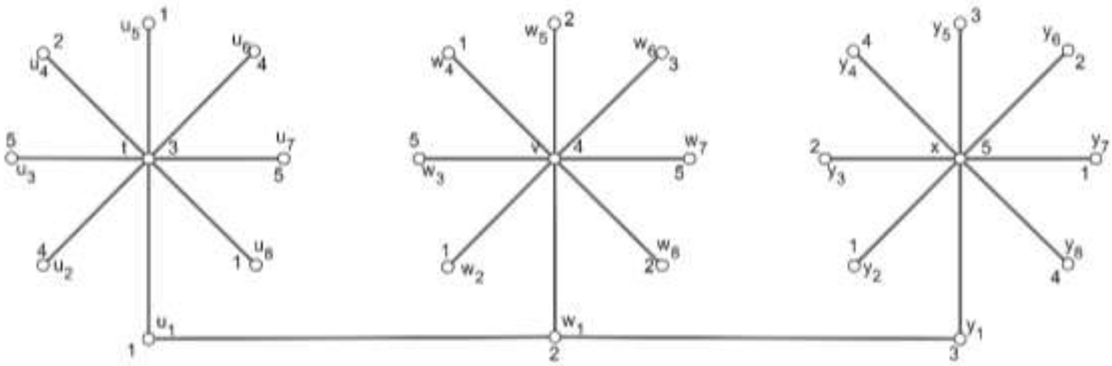
Pada Gambar 7 dapat dilihat bahwa pewarnaan lengkap menggunakan maksimum banyaknya warna yaitu 4 warna.

Teorema 3.5 *Jika $F_{3,n}$ adalah graf kembang api dengan $n \geq 3$ maka $\psi(F_{3,n}) = 5$.*

Bukti:

Misalkan graf G adalah graf kembang api $F_{3,n}$ dengan $n \geq 3$ terdiri dari himpunan simpul graf bintang yang pertama $\{t, u_1, \ldots, u_n\}$, himpunan graf bintang yang kedua $\{v, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, dan himpunan graf bintang yang ketiga $\{x, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Dari pemisalan tersebut selanjutnya didefinisikan pewarnaan lengkap yaitu $c: V(F_{3,n}) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$ dengan $c(u_1) = c(y_2) = c(w_2) = 1,\ c(w_1) = c(y_3) = 2,\ c(y_1) = c(t) = 3,\ c(v) = c(u_2) = 4,\ c(x) = c(w_3) = 5$. Kemudian untuk simpul $\{u_3, u_4, \ldots, u_n\}$ diberikan warna 1, 2, 4, atau 5, untuk simpul $w_4, w_5, \ldots, w_n$ diberi warna 1, 2, 3 atau 5, dan untuk simpul $y_4, y_5, \ldots, y_n$ diberikan warna 1, 2, 3 atau 4. Berdasarkan Definisi 4 diperoleh $\psi(F_{3,n}) \geq 5$. Selanjutnya, andaikan $\psi(F_{3,n}) = 6$, maka simpul yang berderajat lebih dari satu diwarnai dengan 6 warna berbeda. Hal ini berarti tersisa $n - 6$ simpul daun berderajat satu yang belum diwarnai. Adapun warna yang akan diberikan pada $n - 6$ simpul daun yang tersisa adalah 5 warna dari 6 warna yang telah digunakan. Hal tersebut dilakukan karena satu warna telah diberikan pada simpul pusat graf bintang S_n, akan tetapi pewarnaan tersebut tidaklah mungkin terjadi, karena ada pasangan warna antara simpul yang berderajat 2 tidak terpenuhi. Sehingga pewarnaan tersebut kontradiksi dengan Definisi 3, oleh karena itu harus $\psi(F_{3,n}) = 5$. ∎

Dari penjelasan tersebut diberikan pewarnaan lengkap pada Gambar 8.



Gambar 8 Pewarnaan lengkap pada graf kembang api $F_{3,8}$ dengan $\psi(F_{3,8}) = 5$

Pada Gambar 8 dapat dilihat bahwa pewarnaan lengkap menggunakan maksimum banyaknya warna yaitu 5 warna dengan setiap pasangan warna yang digunakan muncul pada satu sisi.

Berdasarkan Teorema 3.1 sampai 3.5 diperoleh bahwa setiap daun dari graf bintang selalu bertetangga dengan simpul pusat maka bilangan akromatik pada graf bintang adalah 2. Berdasarkan teorema-teorema tersebut juga ditunjukkan bilangan akromatik pada graf pohon pisang dan graf kembang api yang memuat 2 salinan graf bintang bilangan akromatiknya 4, sedangkan bilangan akromatik pada graf pohon pisang dan graf kembang api yang memuat 3 salinan graf bintang bilangan akromatiknya 5.

KESIMPULAN

Bilangan akromatik adalah maksimum banyaknya warna yang digunakan dalam pewarnaan lengkap. Pewarnaan lengkap merupakan pengembangan dari pewarnaan simpul dengan setiap pasangan warna yang digunakan minimal muncul pada satu sisi. Bilangan akromatik pada graf bintang S_n dan beberapa graf yang memuat bintang diperoleh dengan cara melakukan pewarnaan lengkap dan menentukan pola bilangan akromatik pada beberapa graf tersebut. Berdasarkan proses-proses tersebut, maka dapat disimpulkan bilangan akromatik pada graf yaitu:

1. Bilangan akromatik graf bintang S_n.
$$\psi(S_n) = 2 \text{ dengan } n \geq 3.$$
2. Bilangan akromatik graf pohon pisang $B_{2,n}$ dan $B_{3,n}$.
$$\psi(B_{2,n}) = 4 \text{ dan } \psi(B_{3,n}) = 5 \text{ dengan } n \geq 3.$$
3. Bilangan akromatik graf kembang api $F_{2,n}$.
$$\psi(F_{2,n}) = 4 \text{ dan } \psi(F_{3,n}) = 5 \text{ dengan } n \geq 3.$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Munir R. Matematika Diskrit. Bandung: Informatika; Ed ke-3, 2010.
[2] Chartrand G and Zhang P. *Chromatic Graph Theory*. New York: Crc Press Company; 2009.
[3] Thilagavanty PK. dan Santha A. The Achromatic and B-chromatic Number of Sun Graph, Barbel Graph and Some Named Graphs, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2017; Vol. 116: 147-15.

[4] Bhavanari S, Devanaboina S, Bhavanari M. Star Number of a Graph. *Research Journal of Science and IT Management*. 2016; 5(11): 18-22.

[5] Asmiati. Locating Chromatic Number of Banana Tree. *International Mathematical Forum*. 2017; 12: 39-45.

[6] Asmiati, Baskoro, Assiyatun, H., Suprijanto, D., Simanjuntak, R., Uttunggadewa, S. The locating-chromatic Number of Firecracker Graphs, *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 2012; Vol. 63:11-23.

[7] Jusuf H. Pewarnaan Graph pada Simpul untuk Mendeteksi Konflik Penjadwalan Kuliah.*Seminar Nasional Aplikasi Teknologi Informasi*. 2009; ISSN: 1907-5022.

[8] Mary LJE dan Rayen ALMJ. On the Star Coloring of Graphs Formed from the Cartesian Product of Some Simple Graphs. *International Journal of Mathematics and its Applications*. 2016; 4: 122-155.

[9] Harary F, Hedetniemi ST and Prins G. An interpolation theorem for graphical homomorphisms. *Math*. 1967; 26:453-462.

DARUL IHSAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
h1011141046@student.untan.ac.id

YUNDARI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
yundari@math.untan.ac.id

FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
fransiskusfran@math.untan.ac.id