Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 03, No. 1 (2014), hal 19– 28.

KAJIAN OPERASI ARITMETIKA INTERVAL DAN SIFAT-SIFATNYA

Analia Wenda, Evi Noviani, Nilamsari Kusumastuti

INTISARI

*Aritmetika interval merupakan generalisasi dari aritmetika klasik yang pendefinisiannya didasarkan pada himpunan semua interval tertutup (**IR**). Dalam suatu aritmetika interval bilangannya didefinisikan pada interval yang dinyatakan dengan istilah pertidaksamaan sebagai suatu pasangan berurut. Pada kajian ini diterapkan operasi-operasi yang digunakan dalam aritmetika klasik antara lain: penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian dan pergandaan skalar yaitu penjumlahan dan perkalian suatu bilangan real dengan interval pada aritmetika interval. Terdapat sifat-sifat yang berlaku dalam aritmetika interval terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yaitu sifat tertutup, komutatif, assosiatif dan adanya elemen identitas di **IR**. Akan tetapi pada kasus khusus tertentu terdapat pula sifat-sifat yang tidak selalu berlaku yaitu tidak adanya invers terhadap operasi penjumlahan dan perkalian di **IR**. Sifat distributif dalam aritmetika interval di **IR** tidak selalu berlaku namun berlaku sifat subdistributif.*

Kata Kunci : *Aritmetika Interval, Sifat-Sifat Operasi Aritmetika Interval.*

PENDAHULUAN

Pada tahun 1959, Ramon Moore seorang matematikawan memperkenalkan aritmetika interval sebagai salah satu cara untuk mengatasi hal-hal yang tidak dapat ditentukan secara pasti pada persoalan hasil perhitungan secara numerik yang muncul dalam matematika. Aritmetika interval merupakan generalisasi dari aritmetika klasik yang pendefinisiannya didasarkan pada himpunan semua interval tertutup (**IR**). Aritmetika klasik dalam operasinya menggunakan himpunan bilangan real yang bernilai tunggal, akan tetapi dalam suatu aritmetika interval bilangannya berupa interval yang dinyatakan dengan istilah pertidaksamaan sebagai suatu pasangan berurut [1]. Operasi aritmetika klasik yang berlaku pada bilangan bernilai tunggal merupakan suatu kajian yang sering dijumpai. Terdapat hal menarik yang ingin dibahas pada penelitian ini yaitu operasi aritmetika interval dan sifat-sifatnya di **IR**. Berdasarkan latar belakang tersebut dirumuskan permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimanakah operasi aritmetika interval di **IR** beserta sifat-sifatnya. Adapun tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini yaitu mengkaji operasi aritmetika dan sifat-sifat yang berlaku pada operasi aritmetika interval di **IR**. Pada penelitian ini interval yang akan dikaji adalah interval tertutup dan operasi aritmetika yang digunakan antara lain operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian dan pergandaan skalar.

SISTEM BILANGAN INTERVAL DAN ARITMETIKA INTERVAL

Suatu interval merupakan himpunan bilangan-bilangan real yang ditunjukkan sebagai suatu pasangan berurut dan dinyatakan dalam suatu pertidaksamaan [2]. Secara khusus pada kajian ini interval yang digunakan adalah interval tertutup. Oleh karena itu berikut ini akan diberikan definisi interval tertutup.

Definisi 1 [3] *Interval tertutup adalah himpunan semua bilangan real x untuk sebarang konstanta real $\underline{x}$ dan $\overline{x}$ dengan $\underline{x} \leq \overline{x}$ dinyatakan dalam suatu pertidaksamaan $\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$ dan dinotasikan* $[\underline{x}, \overline{x}]$.

Selanjutnya suatu interval tertutup dapat dinyatakan ke dalam notasi pembentuk himpunan sebagai berikut:

$$\tilde{x} = \{x | \underline{x} \leq x \leq \overline{x}, \underline{x} \text{ dan } \overline{x} \in \mathbb{R}\}.$$

Titik $\underline{x}$ disebut titik ujung bawah (*lower endpoints*) dan titik $\overline{x}$ disebut titik ujung atas (*upper endpoints*) dari suatu interval $\tilde{x}$ [2].

Selanjutnya berikut ini akan diberikan definisi tentang kekhususan interval yang berhubungan dengan *endpoints*nya.

Definisi 2 [2]

a) *Misal $\tilde{x}$ adalah suatu interval maka $\tilde{x}$ disebut interval degenerasi jika* $\underline{x} = \overline{x}$.
b) *Jika $\tilde{x}$ adalah suatu interval, negatif dari $\tilde{x}$ dinotasikan $-\tilde{x}$ adalah interval yang berbentuk* $-\tilde{x} = [-\overline{x}, -\underline{x}]$.
c) *Suatu interval $\tilde{x}$ disebut simetris jika* $\underline{x} = -\overline{x}$.
d) *Jika $\tilde{x}$ adalah suatu interval yang tidak memuat* 0, *kebalikan dari $\tilde{x}$ adalah:*

$$\frac{1}{\tilde{x}} := \left\{\frac{1}{x} | x \in \tilde{x}\right\}$$

Sehingga $\frac{1}{\tilde{x}} = \left[\frac{1}{\overline{x}}, \frac{1}{\underline{x}}\right]$.

e) *Interval $\tilde{x}$ dikatakan kurang dari interval $\tilde{y}$ jika dan hanya jika $\overline{x}$ kurang dari nilai $\underline{y}$, $\tilde{x} < \tilde{y} \Leftrightarrow \overline{x} < \underline{y}$.*
f) *Dua interval dikatakan sama jika dan hanya jika mempunyai $\underline{x}$ sama dengan $\underline{y}$ dan $\overline{x}$ sama dengan $\overline{y}$, $\tilde{x} = \tilde{y} \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$ dan $\overline{x} = \overline{y}$.*
g) *Interval $\tilde{x}$ dikatakan subset dari interval $\tilde{y}$ jika dan hanya jika $\underline{y}$ interval $\tilde{y}$ kurang dari $\underline{x}$ interval $\tilde{x}$ dan $\overline{x}$ interval $\tilde{x}$ kurang dari $\overline{y}$ interval $\tilde{y}$, $\tilde{x} \subseteq \tilde{y} \Leftrightarrow \underline{y} \leq \underline{x}$* dan $\overline{x} \leq \overline{y}$.

Selanjutnya diberikan contoh-contoh untuk penerapan Definisi 2 sebagai berikut:

Contoh 3

1. Diberikan $\tilde{x} = [0,0]$ merupakan suatu interval di **IR**, sehingga dapat ditentukan $\tilde{x}$ merupakan interval degenerasi karena nilai $\underline{x} = \overline{x}$.
2. Diberikan $\tilde{x} = [2,3]$ merupakan suatu interval di **IR**, sehingga dapat ditentukan negatif dari suatu interval tersebut $-\tilde{x} = [-3, -2]$.
3. Interval simetris $\tilde{x} = [-3,3]$.
4. Diberikan $\tilde{x} = [2,4]$, kebalikan dari interval $\tilde{x}$ yaitu $\frac{1}{\tilde{x}} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.
5. Diberikan $\tilde{x} = [1,3]$ dan $\tilde{y} = [4,6]$, terlihat nilai $\overline{x} = 3$ dan $\underline{y} = 4$ sehingga $\tilde{x} < \tilde{y}$.
6. Diberikan $\tilde{x} = [2,3]$ dan $\tilde{y} = [2,3]$, terlihat nilai $\underline{x} = \underline{y}$ dan nilai $\overline{x} = \overline{y}$ sehingga $\tilde{x} = \tilde{y}$.
7. Diberikan $\tilde{x} = [3,5]$ dan $\tilde{y} = [2,6]$, terlihat nilai $\underline{x} \leq \underline{y}$ dan $\overline{x} \leq \overline{y}$ sehingga $\tilde{x} \subseteq \tilde{y}$.

Berikut ini diberikan definisi ketaksamaan antara *lower endpoints* dan *upper endpoints* pada **IR**.

Definisi 4 [2]

a) *Interval positif adalah suatu interval yang memiliki $\underline{x}$ lebih dari nol.*
b) *Interval taknegatif adalah suatu interval yang memiliki $\underline{x}$ lebih dari atau sama dengan nol.*
c) *Interval negatif adalah suatu interval yang memiliki $\overline{x}$ kurang dari nol.*
d) *Interval takpositif adalah suatu interval yang memiliki $\overline{x}$ kurang dari atau sama dengan nol.*

Selanjutnya diberikan contoh untuk mengetahui bagaimanakah ketaksamaan antara *lower endpoints* dan *upper endpoints* pada **IR**.

Contoh 5

a. Diberikan suatu interval $\tilde{x} = [2,3]$, interval $\tilde{x}$ ini disebut interval positif karena $\underline{x} = 2$, berdasarkan Definisi 4 $\underline{x} > 0$.

b. Diberikan suatu interval $\tilde{x} = [0,2]$, interval $\tilde{x}$ ini disebut interval taknegatif karena $\underline{x} = 0$, berdasarkan Definisi 4 $\underline{x} \geq 0$.

c. Diberikan suatu interval $\tilde{x} = [-5,-2]$, interval $\tilde{x}$ ini disebut interval negatif karena $\overline{x} = -2$, berdasarkan Definisi 4 $\underline{x} < 0$.

d. Diberikan suatu interval $\tilde{x} = [-1,0]$, interval $\tilde{x}$ ini disebut interval takpositif karena $\overline{x} = 0$, berdasarkan Definisi 4 $\underline{x} \leq 0$.

Aritmetika interval adalah perhitungan yang melibatkan himpunan bilangan-bilangan yang dinyatakan dengan istilah pertidaksamaan sebagai suatu pasangan berurut [1]. Berikut ini akan diberikan definisi tentang aritmetika interval.

Definisi 6 [1] *Jika "$*$" dinotasikan sebagai salah satu dari operasi untuk aritmetika pada bilangan real x dan y maka operasi yang sesuai untuk aritmetika pada bilangan interval $\tilde{x}$ dan $\tilde{y}$ adalah:*

$$\tilde{x} * \tilde{y} = \{x * y | x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}\}.$$

Sedemikian sehingga operasi aritmetika interval yang dinotasikan dengan "$*$" yang memenuhi setiap operasi aritmetika klasik yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian.

Sifat 7 [1] *Pada aritmetika interval terdapat operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Enam operasi dasar aritmetika interval tersebut mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:*

a) Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in \boldsymbol{IR}$, operasi penjumlahan dapat didefinisikan sebagai berikut: $\tilde{x} + \tilde{y} = \left[\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}\right]$,

b) Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in \boldsymbol{IR}$, operasi pengurangan dapat didefinisikan sebagai berikut: $\tilde{x} - \tilde{y} = \left[\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}\right]$,

c) Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in \boldsymbol{IR}$, operasi perkalian dapat didefiniskan sebagai berikut: $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = \left[min\left\{\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\right\}, max\left\{\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\right\}\right]$,

d) Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in \boldsymbol{IR}$, operasi pembagian dapat didefinisikan sebagai berikut: $\tilde{x} \div \tilde{y} = \tilde{x} \cdot \frac{1}{\tilde{y}}\ dengan\ 0 \in \tilde{y}$

e) Untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $\tilde{x} \in \boldsymbol{IR}$, operasi penjumlahan dengan skalar dapat didefinisikan sebagai berikut: $\alpha + \tilde{x} = \left[\alpha + \underline{x}, \alpha + \overline{x}\right]$

f) Untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $\tilde{x} \in \boldsymbol{IR}$, operasi perkalian dengan skalar dapat didefinisikan sebagai berikut: $\alpha \cdot \tilde{x} = \left[min\left\{\alpha \cdot \underline{x}, \alpha \cdot \overline{x}\right\}, max\left\{\alpha \cdot \underline{x}, \alpha \cdot \overline{x}\right\}\right]$.

Selanjutnya operasi dasar dalam aritmetika interval yang melibatkan *endpoints* pada suatu interval yang ditunjukkan berdasarkan Sifat 7, pembuktian dari masing-masing operasi yang melibatkan *endpoints* interval dapat dilihat dalam [3].

SIFAT-SIFAT IR TERHADAP OPERASI ARITMETIKA INTERVAL

Didefinisikan dua operasi biner "$+$" dan "$\cdot$" masing-masing disebut operasi penjumlahan dan operasi perkalian. Kedua operasi biner ini diterapkan pada **IR** dan memenuhi sifat-sifat sebagai berikut.

Sifat 8 [2] *Jika diberikan interval* $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$, $\tilde{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$, $\tilde{z} = [\underline{z}, \overline{z}]$, $\tilde{0} = [0,0]$ *dan* $\tilde{1} = [1,1]$ *di* $\boldsymbol{IR}$, *maka berlaku sifat-sifat berikut:*

a) *Himpunan semua interval tertutup* ($\boldsymbol{IR}$) *tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian* $(\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \boldsymbol{IR})\ \tilde{x} + \tilde{y}, \tilde{x} \cdot \tilde{y} \in \boldsymbol{IR}$.
b) *Penjumlahan dan perkalian di* $\boldsymbol{IR}$ *bersifat komutatif yaitu* $(\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \boldsymbol{IR})\ \tilde{x} + \tilde{y} = \tilde{y} + \tilde{x}$ *dan* $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = \tilde{y} \cdot \tilde{x}$.
c) *Penjumlahan dan perkalian di* $\boldsymbol{IR}$ *bersifat assosiatif yaitu* $(\forall \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \boldsymbol{IR})\ \tilde{x} + (\tilde{y} + \tilde{z}) = (\tilde{x} + \tilde{y}) + \tilde{z}$ *dan* $\tilde{x} \cdot (\tilde{y} \cdot \tilde{x}) = (\tilde{x} \cdot \tilde{y}) \cdot \tilde{z}$.
d) *Terdapat elemen* $\tilde{0} \in \boldsymbol{IR}$ *sehingga* $\tilde{0} + \tilde{x} = \tilde{x} + \tilde{0} = \tilde{x}$ *untuk setiap* $\tilde{x} \in \boldsymbol{IR}$. *Elemen* $\tilde{0}$ *disebut elemen interval nol sebagai elemen identitas terhadap operasi penjumlahan di* $\boldsymbol{IR}$. *Terdapat elemen* $\tilde{1} \in \boldsymbol{IR}$ *sehingga* $\tilde{1} \cdot \tilde{x} = \tilde{x} \cdot \tilde{1} = \tilde{x}$ *untuk setiap* $\tilde{x} \in \boldsymbol{IR}$. *Elemen* $\tilde{1}$ *disebut elemen interval satuan sebagai elemen identitas terhadap operasi perkalian di* $\boldsymbol{IR}$.

Setelah mengetahui sifat-sifat yang berlaku dalam setiap operasi aritmetika klasik yang juga berlaku dalam setiap operasi aritmetika interval, selanjutnya akan ditunjukkan sifat-sifat yang tidak selalu berlaku secara umum dalam setiap operasi aritmetika interval yang berlaku dalam operasi aritmetika klasik. untuk selanjutnya berikut ini akan diberikan sifat-sifat yang menunjukkan ada atau tidaknya invers penjumlahan dan perkalian di **IR**.

Sifat 9 [3] *Diberikan suatu interval* $\tilde{x}$ *di* $\boldsymbol{IR}$ *dimana masing-masing intervalnya berbentuk* $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ *yang menyatakan sebagai sebarang interval di* $\boldsymbol{IR}$ *dan interval bentuk* $\tilde{x} = [x, x]$ *dinyatakan sebagai interval degenerasi sehingga berlaku sifat-sifat berikut:*

a) *Jika* $\tilde{x}$ *adalah suatu interval degenerasi maka terdapat* $\tilde{x}^{-1}$ *disebut invers penjumlahan dari* $\tilde{x}$, *sehingga* $\tilde{x} + \tilde{x}^{-1} = \tilde{0}$.
b) *Jika* $\tilde{x}$ *adalah interval nondegenerasi maka tidak terdapat* $\tilde{x}^{-1}$ *disebut bukan invers penjumlahan dari* $\tilde{x}$, *sehingga* $\tilde{x} + \tilde{x}^{-1} \neq 0$.
c) *Jika* $\tilde{x}$ *adalah suatu interval degenerasi maka terdapat* $\tilde{x}^{-1}$ *disebut invers perkalian dari* $\tilde{x}$, *sehingga* $\tilde{x} \cdot \tilde{x}^{-1} = \tilde{1}$.
d) *Jika* $\tilde{x}$ *adalah interval nondegenerasi maka tidak terdapat* $\tilde{x}^{-1}$ *disebut bukan invers perkalian dari* $\tilde{x}$ *sehingga* $\tilde{x} \cdot \tilde{x}^{-1} \neq \tilde{1}$.

Selanjutnya berikut ini diberikan teorema untuk menjelaskan Sifat 9 tentang ada atau tidaknya invers penjumlahan dan perkalian di **IR**.

Teorema 10 [3]
a) *Interval* $\tilde{x}$ *memiliki invers penjumlahan jika dan hanya jika* $\tilde{x}$ *adalah interval degenerasi.*
b) *Interval* $\tilde{x}$ *memilki invers perkalian jika dan hanya jika* $\tilde{x}$ *adalah interval degenerasi.*

Bukti:

a. Berdasarkan Definisi 2 (*a*) interval yang berdegenerasi dapat dikatakan sebagai generalisasi dari bilangan real yang bernilai tunggal. Sedemikian sehingga ada invers penjumlahan untuk interval degenerasi di **IR**. Misal diberikan sebarang interval nondegenerasi di **IR** yaitu $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$, dimana

$\underline{x} \neq \overline{x}$. Diasumsikan bahwa ada invers penjumlahan untuk interval nondegenerasi di **IR**, misalkan $\tilde{x}^{-1} = [\underline{x}, \overline{x}]^{-1}$. selanjutnya dengan menggunakan Sifat 7 (*a*) diperoleh: $[\underline{x}, \overline{x}] + [\underline{x}, \overline{x}]^{-1} = [\underline{x} + \underline{x}^{-1}, \overline{x} + \overline{x}^{-1}] = [0,0]$ sehingga $\underline{x} + \underline{x}^{-1} = 0$ dan $\overline{x} + \overline{x}^{-1} = 0$ dimana $\underline{x} = -\underline{x}$ dan $\overline{x} = -\overline{x}$. Oleh karena berdasarkan asumsi dimana $\underline{x} < \overline{x}$, hal ini berakibat: $\underline{x} = \underline{x}^{-1} < \overline{x} = \overline{x}^{-1}$ dan $-\underline{x} < -\overline{x}$, ini berarti bahwa $\overline{x}^{-1} < \underline{x}^{-1}$ nya dengan menggunakan Sifat 7 (*a*) diperoleh: $[\underline{x}, \overline{x}] + [\underline{x}, \overline{x}]^{-1} = [\underline{x} + \underline{x}^{-1}, \overline{x} + \overline{x}^{-1}] = [0,0]$ sehingga $\underline{x} + \underline{x}^{-1} = 0$ dan $\overline{x} + \overline{x}^{-1} = 0$ dimana $\underline{x} = -\underline{x}$ dan $\overline{x} = \overline{x}^{-1}$. Sedemikian sehingga asumsi yang diberikan pada teorema ini bahwa ada invers penjumlahan untuk interval nondegenerasi, berdasarkan pembuktian yang diperoleh menunjukkan bahwa terbukti tidak ada invers penjumlahan untuk interval nondegenerasi di **IR**.

Kemudian misal diberikan sebarang interval nondegenerasi di **IR** yaitu $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ dimana $\underline{x} = \overline{x}$ yaitu $\underline{x} < \overline{x}$. Diasumsikan bahwa tidak ada invers penjumlahan untuk interval nondegenerasi di **IR**, diketahui bahwa $\tilde{x}$ adalah interval degenerasi, misalkan ada $\tilde{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$ suatu interval di **IR**. Selanjutnya dengan menggunakan Sifat 7 (*a*) $[\underline{x}, \overline{x}] + [\underline{y}, \overline{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] = [0,0]$ sehingga $\underline{x} + \underline{y} = 0$ dan $\overline{x} + \overline{y} = 0$ dimana $\underline{x} = -\underline{y}$ dan $\overline{x} = -\overline{y}$. Oleh karena berdasarkan asumsi dimana $\underline{x} = \overline{x}$, hal ini berakibat: $\underline{y}$ merupakan invers dari $\underline{x}$ dan $\overline{y}$ merupakan invers dari $\overline{x}$. Sedemikian sehingga asumsi yang diberikan pada teorema ini bahwa tidak ada invers penjumlahan untuk interval nondegenerasi, berdasarkan pembuktian yang diperoleh menunjukkan bahwa ada invers penjumlahan untuk interval degenerasi di **IR**. ■

b. Berdasarkan sifat 7 (*f*), misal diberikan $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ sebarang interval nondegenerasi di **IR**, dimana $\underline{x} \neq \overline{x}$ yaitu $\underline{x} < \overline{x}$. Diasumsikan bahwa ada invers perkalian untuk $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ di **IR** misalkan $\tilde{x}^{-1} = [\underline{x}, \overline{x}]^{-1}$, dengan menggunakan Sifat 7 (*c*):

$$[\underline{x}, \overline{x}] \cdot [\underline{x}, \overline{x}]^{-1} = [\min\{\underline{x}\,\underline{x}^{-1}, \underline{x}\,\overline{x}^{-1}, \overline{x}\,\underline{x}^{-1}, \overline{x}\,\overline{x}^{-1}\}, \max\{\underline{x}\,\underline{x}^{-1}, \underline{x}\,\overline{x}^{-1}, \overline{x}\,\underline{x}^{-1}, \overline{x}\,\overline{x}^{-1}\}] = [1,1]$$

Hal ini mengakibatkan:

$$1 \leq \underline{x}\,\underline{x}^{-1} \leq 1, 1 \leq \underline{x}\,\overline{x}^{-1} \leq 1, 1 \leq \overline{x}\,\underline{x}^{-1} \leq 1, 1 \leq \overline{x}\,\overline{x}^{-1} \leq 1$$

Akan tetapi jika $\underline{x}\,\underline{x}^{-1} = \overline{x}\,\underline{x}^{-1}$ atau $\underline{x}\,\overline{x}^{-1} = \overline{x}\,\overline{x}^{-1}$ maka $\underline{x} = \overline{x}$. Dalam hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $\underline{x} < \overline{x}$, dan terbukti bahwa tidak ada invers perkalian untuk interval nondegenerasi di **IR**.

Berdasarkan Sifat 7 (*f*), misal diberikan $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ sebarang interval nondegenerasi di **IR**, dimana $\underline{x} = \overline{x}$ yaitu $\underline{x} < \overline{x}$. Diasumsikan bahwa tidak ada invers perkalian untuk interval nondegenerasi di **IR**. Diketahui bahwa $\tilde{x}$ adalah suatu interval degenerasi, misalkan ada $\tilde{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$ suatu interval di **IR**. Dengan menggunakan Sifat 7 (*c*):

$$[\underline{x}, \overline{x}] \cdot [\underline{y}, \overline{y}] = [\min\{\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\}, \max\{\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\} = [1,1]]$$

Sehingga $\underline{x} \cdot \underline{y} = 1$, $\underline{x} \cdot \overline{y} = 1$, $\overline{x} \cdot \underline{y} = 1$, $\overline{x} \cdot \overline{y} = 1$, dimana $\underline{x} = \frac{1}{\underline{y}}$ dan $\overline{x} = \frac{1}{\overline{y}}$. Oleh karena berdasarkan asumsi bahwa $\underline{x} = \overline{x}$, hal ini berakibat: $\underline{y}$ merupakan invers dari $\overline{x}$ dan $\overline{y}$ merupakan invers dari $\overline{x}$.

Sedemikian sehingga diperoleh $\underline{y}$ adalah invers dari $\underline{x}$ dan $\overline{y}$ adalah invers dari $\overline{x}$ maka $\underline{x}\,\underline{y} = \overline{x}\,\overline{y}$. Sedemikian sehingga asumsi yang diberikan pada teorema ini bahwa tidak ada invers perkalian untuk interval nondegenerasi, berdasarkan pembuktian yang diperoleh menunjukkan bahwa ada invers perkalian untuk interval degenerasi di **IR**.■

Berdasarkan hasil pembuktian yang diperoleh terlihat bahwa secara umum tidak ada invers penjumlahan dan perkalian di **IR**, kecuali untuk interval degenerasi. Selanjutnya berikut ini akan diberikan contoh soal untuk mengetahui bagaimana ada atau tidak adanya invers penjumlahan dan perkalian di **IR**.

Contoh 11 Diberikan $\tilde{x} = [2,5]$ dan $\tilde{x} = [5,5]$, cari invers penjumlahan dan perkaliannya masing-masing!

Jawab:

1) Akan dicari invers dari $\tilde{x}$ diketahui $\tilde{x} = [2,5]$ diperoleh: $[2,5] + \tilde{x}^{-1} = \tilde{0}$

   menggunakan Sifat 7 (*a*) dan Definisi 2 (*b*) $[2,5] + [a, b] = \tilde{0}$

$$2 + a = 0 \Longrightarrow a = -2, 5 + b = 0 \Longrightarrow b = -5$$

   Akan dicari invers dari $\tilde{x}$, diketahui $\tilde{x} = [5,5]$ diperoleh: $[5,5] + \tilde{x}^{-1} = \tilde{0}$

   menggunakan Sifat 7 (*a*) dan Definisi 2 (*b*) $[5,5] + -\tilde{x} = \tilde{0}$

$$5 + a = 0 \Longrightarrow a = -5, 5 + b = 0 \Longrightarrow b = -5$$

2) Akan dicari invers dari $\tilde{x}$ diketahui $\tilde{x} = [2,5]$ diperoleh: $[2,5] \cdot \tilde{x}^{-1} = \tilde{1}$

   menggunakan Sifat 7 (*c*) dan Definisi 2 (*d*) $[2,5] \cdot \frac{1}{\tilde{x}} = \tilde{1}$

$$2 \cdot c = 1 \Longrightarrow c = \frac{1}{5}\,, 5 \cdot d = 1 \Longrightarrow d\frac{1}{2}$$

   Akan dicari invers dari $\tilde{x}$ diketahui $\tilde{x} = [5,5]$ diperoleh: $[5,5] \cdot \tilde{x}^{-1} = \tilde{1}$

   menggunakan Sifat 7 (*c*) dan Definisi 2 (*d*) $[5,5] \cdot \frac{1}{\tilde{x}} = \tilde{1}$

$$5 \cdot c = 1 \Longrightarrow c = \frac{1}{5}\,, 5 \cdot d = 1 \Longrightarrow d = \frac{1}{5}\,.$$

Pembahasan selanjutnya adalah tentang sifat distributif yang tidak selalu berlaku dalam operasi aritmetika interval terhadap operasi penjumlahan dan perkalian di **IR**. Secara umum sifat distributif dalam aritmetika interval dirumuskan sebagai berikut: $\tilde{x}(\tilde{y} + \tilde{z}) = \tilde{x}\,\tilde{y} + \tilde{x}\,\tilde{z}$ [2]. Berikut ini akan ditunjukkan dengan menggunakan teorema beserta pembuktiannya yang menunjukkan berlaku dan tidak berlakunya sifat distributif.

Teorema 12 [3] *Sifat distributif dalam aritmetika interval di **IR** berlaku yaitu:*

*a. Jika $\tilde{x}$ adalah interval degenerasi dan $\tilde{y}, \tilde{z}$ adalah sebarang interval di **IR**.*

b. Jika $\tilde{x}$ adalah sebarang interval dan $\tilde{y}, \tilde{z}$ adalah interval taknegatif dengan $\underline{y}, \underline{z} \geq 0$.

c. Jika $\tilde{x}$ adalah sebarang interval dan $\tilde{y}, \tilde{z}$ adalah interval takpositif dengan $\overline{y}, \overline{z} \leq 0$.

Bukti:

a. Misal diberikan: $\tilde{x} = [x, x]$ dengan $\tilde{x} = [x, x]$, $\tilde{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$ dan $\tilde{z} = [\underline{z}, \overline{z}]$ di **IR**. Menggunakan Sifat 7 (*a*) dan Sifat 7 (*c*):

$[x,x]\left(\left[\underline{y},\overline{y}\right]+\left[\underline{z},\overline{z}\right]\right)$

$[x,x]\left[\underline{y}+\underline{z},\overline{y}+\overline{z}\right]$

$\left[x\left(\underline{y}+\underline{z}\right),x(\overline{y}+\overline{z})\right]$

Diperoleh: $\left[x\underline{y}+x\underline{z},x\overline{y}+x\overline{z}\right]$

Kemudian pengoperasian di sebelah kanan dilakukan dengan cara mengalikan terlebih dahulu kemudian baru dijumlahkan, menggunakan Sifat 7 (*a*) dan Sifat 7 (*c*):

$[x,x]\left[\underline{y},\overline{y}\right]+[x,x]\left[\underline{z},\overline{z}\right]$

$\left[\min\left\{x\underline{y},x\overline{y},x\underline{y},x\overline{y}\right\},\max\left\{x\underline{y},x\overline{y},x\underline{y},x\overline{y}\right\}\right]+\left[\min\{x\underline{z},x\overline{z},x\underline{z},x\overline{z}\},max\{x\underline{z},x\overline{z},x\underline{z},x\overline{z}\}\right]$

$\left[x\underline{y},x\overline{y}\right]+\left[x\underline{z},x\overline{z}\right]$

Diperoleh: $\left[x\underline{y}+x\underline{z},x\overline{y}+x\overline{z}\right]$

Sehingga hasilnya $\tilde{x}(\tilde{y}+\tilde{z})=\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{x}\tilde{z}$.

b. Misal diberikan $\tilde{x}=\left[\underline{x},\overline{x}\right]$, $\tilde{y}=\left[\underline{y},\overline{y}\right]$ dan $\tilde{z}=\left[\underline{z},\overline{z}\right]$ di **IR** dengan $\underline{y},\underline{z}\geq 0$. Menggunakan Sifat 7 (*a*) dan (*c*):

$$\left[\underline{x},\overline{x}\right]\left(\left[\underline{y},\overline{y}\right]+\left[\underline{z},\overline{z}\right]\right)$$

$$\left[\underline{x},\overline{x}\right]\left[\underline{y}+\underline{z},\overline{y}+\overline{z}\right]$$

$$\left[\min\left\{\underline{x}\left(\underline{y}+\underline{z}\right),\underline{x}(\overline{y}+\overline{z}),\overline{x}\left(\underline{y}+\underline{z}\right),\overline{x}(\overline{y}+\overline{z})\right\}\right],\max\left\{\underline{x}\left(\underline{y}+\underline{z}\right),\underline{x}(\overline{y}+\overline{z}),\overline{x}\left(\underline{y}+\underline{z}\right),\overline{x}(\overline{y}+\overline{z})\right\}.$$

Diperoleh: $\left[\underline{x}\,\underline{y}+\underline{x}\,\underline{z},\overline{x}\,\overline{y}+\overline{x}\,\overline{z}\right]$

Kemudian dilakukan operasi di sebelah kanan:

$$\left[\underline{x},\overline{x}\right]\left[\underline{y},\overline{y}\right]+\left[\underline{x},\overline{x}\right]\left[\underline{z},\overline{z}\right]$$

$$\left[\min\left\{\underline{x}\cdot\underline{y},\overline{x}\cdot\overline{y}\right\},\max\left\{\underline{x}\cdot\underline{y},\overline{x}\cdot\overline{y}\right\}\right]+\left[\min\{\underline{x}\cdot\underline{z},\overline{x}\cdot\overline{z}\},\max\{\underline{x}\cdot\underline{z},\overline{x}\cdot\overline{z}\}\right]$$

Diperoleh: $\left[\underline{x}\,\underline{y}+\underline{x}\,\underline{z},\overline{x}\,\overline{y}+\overline{x}\,\overline{z}\right]$

Sehingga hasilnya: $\tilde{x}(\tilde{y}+\tilde{z})=\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{x}\tilde{z}$.

c. Misal diberikan $\tilde{x}=\left[\underline{x},\overline{x}\right]$, $\tilde{y}=\left[\underline{y},\overline{y}\right]$ dan $\tilde{z}=\left[\underline{z},\overline{z}\right]$ di **IR** dengan $\overline{y},\overline{z}\leq 0$. Menggunakan Sifat 7 (*a*) dan (*c*), dilakukan operasi disebelah kiri:

$$\left[\underline{x},\overline{x}\right]\left(\left[\underline{y},\overline{y}\right]+\left[\underline{z},\overline{z}\right]\right)=\left[\underline{x},\overline{x}\right]\left[\underline{y}+\underline{z},\overline{y}+\overline{z}\right]$$

$$\left[\min\left\{\underline{x}\left(\underline{y}+\underline{z}\right),\underline{x}\left(\underline{y}+\overline{z}\right),\overline{x}(\overline{y}+\underline{z}),\overline{x}(\overline{y}+\overline{z})\right\},\max\left\{\underline{x}\left(\underline{y}+\underline{z}\right),\underline{x}\left(\underline{y}+\overline{z}\right),\overline{x}(\overline{y}+\underline{z}),\overline{x}(\overline{y}+\overline{z})\right\}\right]$$

$$\left[\overline{x}(\overline{y}+\underline{z}),\underline{x}\left(\underline{y}+\overline{z}\right)\right]$$

Diperoleh: $\left[\overline{x}\,\overline{y}+\overline{x}\,\underline{z},\underline{x}\,\underline{y}+\underline{x}\,\overline{z}\right]$

Selanjutnya dilakukan pengoperasian disebelah kanan:

$$\left[\underline{x},\overline{x}\right]\left[\underline{y},\overline{y}\right]+\left[\underline{x},\overline{x}\right]\left[\underline{z},\overline{z}\right]$$

$$\left[\min\left\{\underline{x}\,\underline{y},\underline{x}\,\overline{y},\overline{x}\,\underline{y},\overline{x}\,\overline{y}\right\},\max\left\{\underline{x}\,\underline{y},\underline{x}\,\overline{y},\overline{x}\,\underline{y},\overline{x}\,\overline{y}\right\}\right]+\left[\min\left\{\underline{x}\,\underline{z},\underline{x}\,\overline{z},\overline{x}\,\underline{z},\overline{x}\,\overline{z}\right\},\max\left\{\underline{x}\,z,\underline{x}\,\overline{z},\overline{x}\,z,\overline{x}\,\overline{z}\right\}\right]$$

Diperoleh: $\left[\overline{x}\,\overline{y}+\overline{x}\,\underline{z},\underline{x}\,\underline{y}+\underline{x}\,\overline{z}\right]$.

Sehingga hasilnya: $\tilde{x}(\tilde{y}+\tilde{z})=\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{x}\tilde{z}$. ■

Berikut ini akan diberikan contoh sebagai penerapan dari salah satu kasus tentang berlakunya sifat distributif dalam aritmetika interval.

Contoh 13 Jika diberikan tiga interval di **IR** yang masing-masing sebagai berikut: $\tilde{x}=[1,1]$, $\tilde{y}=[-5,-2]$ dan $\tilde{z}=[-2,3]$, maka tunjukkan bahwa sifatdistributif berlaku di **IR**!

Penyelesaian: Diketahui ada tiga interval di **IR** yaitu: $\tilde{x}=[1,1]$, $\tilde{y}=[-5,-2]$ dan $\tilde{z}=[-2,3]$. Selanjutnya disubstitusikan ke dalam persamaan sifat distributif diperoleh:

$$[1,1]([-5,-2]+[-2,3])=[1,1][-5,-2]+[1,1][-2,3]$$
$$[1,1][(-5)+(-2),(-2)+3]=[1(-5),1(-2)]+[1(-2),1\cdot 3]$$
$$[(-2)+3,(-5)+(-2)]=[(-2)+3,(-5)+(-2)]$$
$$[-5,7]=[-5,7]$$

Selanjutnya berikut ini akan diberikan teorema yang menunjukkan bahwa sifat distributif tidak berlaku dalam operasi aritmetika interval di **IR**.

Teorema 14 [3] *Diberikan tiga interval di **IR** yaitu $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ dan $\tilde{z}$, dengan menggunakan operasi aritmetika pada interval yaitu penjumlahan dan perkalian akan diperoleh:*

Jika $\tilde{x}$ merupakan sebarang interval dengan bentuk $\tilde{x}=\left[\underline{x},\overline{x}\right]$, sedangkan $\tilde{y}$ adalah interval degenerasi dengan bentuk $\tilde{y}=[y,y]$ dan $\tilde{z}$ interval dengan bentuk $\tilde{z}=[-y,-y]$ maka hasilnya $\tilde{x}(\tilde{y}+\tilde{z})\neq\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{x}\tilde{z}$.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $\tilde{x}(\tilde{y}+\tilde{z})\neq\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{x}\tilde{z}$, misal diberikan $\left[\underline{x},\overline{x}\right]$, $[y,y]$ dan $\left[-y,-y\right]$ di **IR**. Berdasarkan sifat 7 (a) dan (c), langkah pertama adalah menjumlahkan kemudian mengalikan, hasilnya:

$$\left[\underline{x},\overline{x}\right]([y,y]+[-y,-y])=\left[\underline{x},\overline{x}\right][0,0]=[0,0]$$

Tetapi jika langkah pertama mengalikan dan kemudian menjumlahkan, diperoleh:

$$\begin{aligned}\left[\underline{x},\overline{x}\right]([y,y]+[-y,-y])&=\left[\underline{x},\overline{x}\right][y,y]+\left[\underline{x},\overline{x}\right][-y,-y]\\&=\left[\min\{\underline{x}y,\overline{x}y\},\max\{\underline{x}y,\overline{x}y\}\right]+\left[\min\{-\underline{x}y,-\overline{x}y\},\max\{-\underline{x}y,-\overline{x}y\}\right]\\&=\left[\min\{\underline{x}y,\overline{x}y\},\max\{\underline{x}y,\overline{x}y\}\right]+\left[\min\{-\underline{x}y,-\overline{x}y\},\max\{-\underline{x}y,-\overline{x}y\}\right]\\&\neq 0\end{aligned}$$

Kecuali jika $\underline{x} = \overline{x} = 0$ atau $y = -y = 0$ atau keduanya.

Contoh 15 Jika diberikan tiga interval di **IR** yang masing-masing sebagai berikut: $\tilde{x} = [1,2]$, $\tilde{y} = [1,1]$ dan $\tilde{z} = [-1,-1]$, maka tunjukkan bahwa sifat distributif tidak berlaku di **IR**!

Penyelesaian: Diketahui $\tilde{x} = [1,2]$, $\tilde{y} = [1,1]$ dan $\tilde{z} = [-1,-1]$, selanjutnya dengan menggunakan Sifat 7 (a) dan Sifat 7 (c) operasikan masing-masing *endpoints* interval ke dalam aritmetika interval sebagai berikut:

Ruas kiri: $\tilde{x}(\tilde{y} + \tilde{z}) = [1,2]([1,1] + [-1,-1])$
$= [1,2][0,0]$
$= [0,0]$

Ruas kanan: $\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{x}\tilde{z} = [1,2][1,1] + [1,2][-1,-1]$
$= [1,2] - [1,2]$
$= [-1,1]$

Oleh karena sifat distributif tidak selalu berlaku dalam setiap operasi aritmetika interval di **IR**, maka dalam hal ini pada operasi aritmetika interval berlaku sifat subdistributif. Berikut ini akan diberikan teorema yang menunjukkan bahwa berlakunya sifat subdistributif.

Teorema 16 [5] *Misalkan diberikan tiga interval $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ dan $\tilde{z}$ di **IR**, dengan menggunakan operasi aritmetika interval yaitu penjumlahan dan perkalian akan diperoleh:*

$$\tilde{x}(\tilde{y} + \tilde{z}) \subseteq \tilde{x}\tilde{y} + \tilde{x}\tilde{z}$$

Bukti: Diberikan $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$, $\tilde{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$ dan $\tilde{z} = [\underline{z}, \overline{z}]$ di **IR**. Akan ditunjukkan bahwa $\tilde{x}(\tilde{y} + \tilde{z}) \subseteq \tilde{x}\tilde{y} + \tilde{x}\tilde{z}$, misalkan $a \in \tilde{x}(\tilde{y} + \tilde{z})$, $b \in \tilde{x}$ dan $c = \tilde{y} + \tilde{z}$ sedemikian sehingga $a = bc$ dimana $\underline{x} \leq b \leq \overline{x}$, dan $\underline{y} + \underline{z} \leq c \leq \overline{y} + \overline{z}$. Dengan menggunakan Sifat 7 (a), (c) yaitu $\underline{x}\underline{y} + \underline{x}\,\underline{z} \leq bc \leq \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{z}$, atau $\underline{x}\,\overline{y} + \underline{x}\,\overline{z} \leq bc \leq \overline{x}\,\underline{y} + \overline{x}\,\underline{z}$, atau $\overline{x}\,\underline{y} + \overline{x}\,\underline{z} \leq bc \leq \overline{x}\,\underline{y} + \overline{x}\,\underline{z}$, atau $\overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{z} \leq bc \leq \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{z}$. Sehingga diperoleh $\min\left(\underline{x}\underline{y} + \underline{x}\underline{z}, \underline{x}\overline{y} + \underline{x}\overline{z}, \overline{x}\underline{y} + \overline{x}\underline{z}, \overline{xy} + \overline{xz}\right) \leq a \leq \max\left(\underline{x}\underline{y} + \underline{x}\underline{z}, \underline{x}\overline{y} + \underline{x}\overline{z}, \overline{x}\underline{y} + \overline{x}\underline{z}, \overline{xy} + \overline{xz}\right)$,

$\min\left(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{xy}\right) + \min\left(\underline{x}\underline{z}, \underline{x}\overline{z}, \overline{x}\underline{z}, \overline{xz}\right) \leq a \leq \max\left(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{xy}\right) + \max\left(\underline{x}\underline{z}, \underline{x}\overline{z}, \overline{x}\underline{z}, \overline{xz}\right)$

berarti $a \in \tilde{x}\tilde{y} + \tilde{x}\tilde{z}$. ■

Berikut ini diberikan contoh sebagai penerapan berlakunya sifat subdistributif dalam operasi aritmetika interval di **IR**.

Contoh 17 Jika diberikan tiga interval di **IR** yang masing-masing sebagai berikut: $\tilde{x} = [1,2]$, $\tilde{y} = [3,3]$ dan $\tilde{z} = [-3,-3]$ maka tunjukkan sifat subdistributif berlaku di **IR**!

Penyelesaian: Diketahui $\tilde{x} = [1,2]$, $\tilde{y} = [3,3]$ dan $\tilde{z} = [-3,-3]$ sehingga dengan menggunakan Sifat 7 (a) dan Sifat 7 (c) dioperasikan masing-masing *endpoints* interval ke dalam aritmetika interval sebagai berikut:

Ruas kiri: $\tilde{x}(\tilde{y} + \tilde{z}) = [1,2]([3,3] + [-3,-3])$
$= [1,2][0,0]$
$= [0,0]$

Ruas kanan: $\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{x}\tilde{z} = [1,2][3,3] + [1,2][-3,-3]$
$= [3,6] + [-6,-3]$

$$= [-3,3]$$

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari kedua ruas terlihat bahwa operasi di sebelah kiri menghasilkan $[0,0]$ dan operasi di sebelah kanan menghasilkan $[-3,3]$. Dalam hal ini interval $[-3,3]$ adalah interval simetris. Interval simetris memuat nol, oleh karena itu berlaku sifat subdistributif dalam aritmetika interval di **IR**.

KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa aritmetika real merupakan pengkhususan dari aritmetika interval. Dalam hal ini jika suatu intervalnya adalah interval degenerasi, maka bilangan interval yang dioperasikan dengan menggunakan operasi aritmetika interval dapat digeneralisasikan sebagai bilangan yang bernilai tunggal dalam operasi aritmetika klasik. Sifat-sifat yang berlaku dalam aritmetika klasik secara umum dapat juga berlaku dalam aritmetika interval yaitu sifat tertutup, komutatif, asosiatif dan adanya elemen identitas di **IR**. Akan tetapi secara khusus ada juga sifat-sifat dalam aritmetika klasik yang tidak selalu berlaku dalam aritmetika interval yaitu tidak ada invers penjumlahan dan perkalian di **IR**, kecuali untuk interval degenerasi. Selanjutnya dalam operasi aritmetika interval sifat distributif juga tidak selalu berlaku, hal tersebut menyebabkan berlakunya sifat subdistributif dalam operasi aritmetika interval di **IR**.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Hansen E, William W. *Global optimization using Interval Analysis.* USA: Marcel Dekker Inc and Sun Microsystems Inc; 2004.

[2]. Moore R, Kearfott BR, Cloud JM. *Introduction to Interval Analysis*. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2009.

[3]. Hansen E. *Interval Arithmetic with some Applications for Digital Computers.* Palo Alto, California: Loockheed Missiles and space Company; 1965.

[4]. Caprani O, Madsen K, Nielsen BH. *Introduction to Interval Analysis.* Urbana-Champaign: University of Illinois; 2002.

[5]. Chio PK. Inclusion Monotonic Property of Courant-Fischer Symmetric Interval Matrices: *Journal of Mathematical Sciences*. 1999 May;5(11):11-20.

ANALIA WENDA : JURUSAN MATEMATIKA FMIPA UNTAN, Jl. Jend. A. Yani Pontianak, analiawenda@gmail.com

EVI NOVIANI : JURUSAN MATEMATIKA FMIPA UNTAN, Jl. Jend. A. Yani Pontianak, evinovianisp@gmail.com

NILAMSARI KUSUMASTUTI : JURUSAN MATEMATIKA FMIPA UNTAN, Jl. Jend. A. Yani Pontianak, nilamkusumastuti@gmail.com