Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 11, No. 1 (2022), hal 35-42.

PENYELESAIAN GENERALISASI PERSAMAAN BERNOULLI DAN PERSAMAAN RICCATI DENGAN PENDEKATAN PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSAK

Annisa Anadia Resty, Mariatul Kiftiah, Yudhi

INTISARI

Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan yang memuat turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas. Persamaan Bernoulli dan persamaan Riccati merupakan bentuk dari persamaan diferensial biasa orde satu. Pada penelitian ini dibahas tentang mencari solusi umum dari generalisasi persamaan Bernoulli dan persamaan Riccati dengan menggunakan pendekatan persamaan diferensial eksak. Bentuk umum persamaan Bernoulli yang digeneralisasikan menjadi $\frac{dy}{dx}+a(x)h(y)=b(x)g(y)$ *dengan* $h(y)=g(y)\int\left(\frac{dy}{g(y)}\right)$. *Solusi umum dari generalisasi persamaan Bernoulli, yaitu* $e^{\int a(x)dx}\int\frac{dy}{g(y)}-\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx=c$ *dan solusi umum persamaan Riccati diperoleh dari solusi umum persamaan Bernoulli dengan memisalkan* $y=u+z$ *dimana* u *sebagai solusi partikular dengan dan* z *sebagai solusi homogen.*

Kata Kunci: *generalisasi persamaan Bernoulli, persamaan Riccati, persamaan diferensial eksak.*

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang mempunyai turunan fungsi dari satu atau lebih variabel bebas yang dibagi menjadi dua bentuk persamaan yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Jika dalam suatu persamaan diferensial memuat hanya satu turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas, maka persamaan tersebut dinamakan persamaan diferensial biasa [1].

Persamaan diferensial memiliki orde dan derajat tertentu pada setiap persamaan. Tingkatan atau orde ialah tingkat tertinggi dari suatu turunan pada persamaan diferensial, sedangkan derajat atau pangkat ditulis sebagai bentuk polinomial dalam turunan dengan derajat turunan tingkat tertinggi [2].

Persamaan diferensial biasa yang dibahas pada penelitian ini, yaitu persamaan Bernoulli dan persamaan Riccati. Persamaan diferensial Bernoulli merupakan salah satu bentuk persamaan diferensial orde satu yang memuat persamaan diferensial linear atau non linear yang ditemukan oleh Jacob Bernoulli pada tahun 1695. Persamaan diferensial Bernoulli dapat dikatakan linear jika pangkat dari variabel tak bebasnya adalah 0 atau 1, selain dari itu maka disebut persamaan diferensial Bernoulli non linear [3].

Persamaan Riccati ialah persamaan diferensial biasa non linear orde satu yang diperkenalkan pada tahun 1724 oleh matematikawan Itali, Vicenzo Riccati [4]. Diberikan bentuk umum persamaan Riccati berikut:

$$\frac{dy}{dx}=Q(x)y^2-P(x)y+R(x) \tag{1}$$

Jika $R=0$ maka Persamaan (1) disebut dengan persamaan Bernoulli.

Pada penelitian ini, dicari solusi umum dari generalisasi persamaan Bernoulli dan persamaan Riccati menggunakan pendekatan persamaan diferensial eksak. Solusi umum merupakan penjumlahan antara solusi homogen dan solusi partikular. Solusi homogen dicari berdasarkan akar-akar karakteristiknya, sedangkan solusi partikular dicari melalui beberapa metode antara lain metode variasi parameter dan metode koefisien tak tentu. Adapun untuk menentukan solusi umum ini, generalisasi persamaan Bernoulli dikalikan dengan suatu faktor integral sehingga menjadi persamaan diferensial eksak dan diperoleh solusi umum. Selanjutnya solusi umum dari persamaan Riccati diperoleh dengan memisalkan $y = u + z$ dengan u sebagai solusi partikular dan z sebagai solusi homogen sehingga dapat membentuk persamaan Bernoulli dan diperoleh solusi umumnya. Oleh karena itu, solusi umum tersebut dapat dijadikan alternatif dalam mengerjakan berbagai contoh kasus yang ada pada generalisasi persamaan Bernoulli dan persamaan Riccati.

GENERALISASI PERSAMAAN BERNOULLI

Diberikan bentuk umum persamaan Bernoulli berikut:

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)y^n \tag{2}$$

Azovedo dan Valentino [6] menggeneralisasi persamaan Bernoulli untuk dijadikan bentuk alternatif dari persamaan Bernoulli pada umumnya menjadi,

$$\frac{dy}{dx} + a(x)h(y) = b(x)g(y) \tag{3}$$

dengan $h(y) = g(y)\int \frac{dy}{g(y)}$. Persamaan (3) dapat dinyatakan dalam bentuk,

$$dy - \big(b(x)g(y) - a(x)h(y)\big)dx = 0 \tag{4}$$

Selanjutnya, diselidiki bahwa Persamaan (4) merupakan persamaan diferensial eksak dengan menurunkan $M(x, y)$ terhadap y dan $N(x, y)$ terhadap x.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\big(b(x)g(y) - a(x)h(y)\big)}{\partial y} = b(x)g'(y) - a(x)h'(y)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(1)}{\partial x} = 0$$

karena $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, maka Persamaan (4) merupakan persamaan diferensial non eksak. Selanjutnya mengubah Persamaan (4) menjadi persamaan diferensial eksak. Substitusikan $h(y) = g(y)\int \frac{dy}{g(y)}$ ke Persamaan (4), diperoleh

$$\frac{dy}{g(y)} + \left(a(x)\int \frac{dy}{g(y)} - b(x)\right)dx = 0. \tag{5}$$

Kemudian dimisalkan $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ dari Persamaan (5). Setelah itu diturunkan $M(x, y)$ terhadap y dan $N(x, y)$ terhadap x. Proses selanjutnya menentukan faktor integrasi μ berupa $e^{\int a(x)dx}$. Karena μ merupakan faktor integrasi dari Persamaan (5) dengan diperoleh $\mu = e^{\int a(x)dx}$. Faktor integrasi $\mu = e^{\int a(x)dx}$ dikalikan pada kedua ruas Persamaan (5), diperoleh

$$\mu\frac{dy}{g(y)} + \mu\left(a(x)\int \frac{dy}{g(y)} - b(x)\right)dx = 0. \tag{6}$$

Persamaan (6) merupakan persamaan diferensial eksak dapat ditunjukkan dengan memisalkan kembali $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ dari Persamaan (6), diperoleh

$$M(x,y) = e^{\int a(x)dx}\left(a(x)\int \frac{dy}{g(y)} - b(x)\right) \tag{7}$$

$$N(x,y) = e^{\int a(x)dx}\frac{dy}{g(y)}. \tag{8}$$

Kemudian, integralkan Persamaan (7) terhadap x dan Persamaan (8) terhadap y, diperoleh

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)dx \\ &= \int e^{\int a(x)dx}\left(a(x)\int \frac{dy}{g(y)} - b(x)\right)dx \end{aligned}$$

$$= e^{\int a(x)dx} \int \frac{dy}{g(y)} - \int b(x) e^{\int a(x)dx} dx + c_1(y) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int N(x,y)dy \\ &= \int \frac{e^{\int a(x)dx}}{g(y)} dy \\ &= e^{\int a(x)dx} \int \frac{dy}{g(y)} + d_1(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Berdasarkan Persamaan (9) dan Persamaan (10) diperoleh $c_1(y) = 0$ dan $d_1(x) = -\int b(x) e^{\int a(x)dx}$ maka solusi umum dari Persamaan (3) sebagai berikut,

$$e^{\int a(x)dx} \int \frac{dy}{g(y)} - \int b(x) e^{\int a(x)dx} dx = c. \quad (11)$$

Berikut contoh soal dari generalisasi persamaan Bernoulli.

Contoh 1 Tentukan solusi umum dari,

$$\frac{dy}{dx} - 1 = e^{-y} \quad (12)$$

Penyelesaian:

Persamaan (8) dapat diubah ke dalam bentuk Persamaan (4) menjadi,

$$dy - (1 - e^{-y})dx = 0. \quad (13)$$

Selanjutnya, diselidiki bahwa Persamaan (8) merupakan persamaan diferensial eksak dengan menurunkan $M(x,y)$ terhadap y dan $N(x,y)$ terhadap x.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(1 + e^{-y})}{\partial y} = -e^{-y}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(1)}{\partial x} = 0.$$

Karena $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, maka Persamaan (13) merupakan persamaan diferensial non eksak. Selanjutnya mengubah Persamaan (13) menjadi persamaan diferensial eksak. Substitusikan $h(y) = g(y) \int \frac{dy}{g(y)}$ ke Persamaan (13), diperoleh

$$\frac{dy}{e^{-y}} + \left(-1 \int \frac{dy}{e^{-y}} - 1\right) dx = 0$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} + (-e^{y} - 1)dx = 0. \quad (14)$$

Kemudian dimisalkan $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ pada Persamaan (14). Setelah itu diturunkan $M(x,y)$ terhadap y dan $N(x,y)$ terhadap x. Proses selanjutnya menentukan faktor integrasi μ berupa e^{-x}. Karena μ merupakan faktor integrasi dari Persamaan (14) dengan diperoleh $\mu = e^{-x}$. Faktor integrasi $\mu = e^{-x}$ dikalikan pada kedua ruas Persamaan (14), diperoleh

$$e^{x} \frac{dy}{e^{-y}} + e^{x}(-e^{y} - 1)dx = 0. \quad (15)$$

Persamaan (15) merupakan persamaan diferensial eksak dapat ditunjukkan dengan memisalkan kembali $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ dari Persamaan (15), diperoleh

$$M(x,y) = e^{x}(-e^{y} - 1) \quad (16)$$

$$N(x,y) = e^{x} \frac{dy}{e^{-y}}. \quad (17)$$

Kemudian, integralkan Persamaan (16) terhadap x dan Persamaan (17) terhadap y, diperoleh

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)dx \\ &= \int e^{-x}(-e^{y} - 1)dx \end{aligned}$$

$$= e^{-x}e^{y} + e^{-x} + c_1(y) \tag{18}$$

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy$$

$$= \int \frac{e^{-x}}{e^{-y}} dy$$

$$= e^{-x}e^{y}d_1(x). \tag{19}$$

Berdasarkan Persamaan (18) dan Persamaan (19) diperoleh $c_1(y) = 0$ dan $d_1(x) = 2e^{-x}e^{y} + e^{-x}$, maka $\mu = e^{-x}$ merupakan faktor integrasi yang memenuhi Persamaan (13). Kemudian, dari Persamaan (13) dapat dicari solusi umum dari Persamaan (11).

Misalkan $g(y) = e^{-y}$, maka

$$h(y) = g(y) \int \frac{dy}{g(y)}$$

$$= e^{-y} \int \frac{dy}{e^{-y}}$$

$$= 1.$$

Berdasarkan Persamaan (3) dan Persamaan (11) diperoleh $a(x) = -1$ dan $b(x) = 1$, maka solusi umum dari $\frac{dy}{dx} - 1 = e^{-y}$ yaitu,

$$e^{\int -dx} \int \frac{dy}{e^{-y}} - \int e^{\int -dx}\, dx = C$$

$$e^{-x}.e^{y} = c - e^{-x}$$

$$\ln e^{y} = \ln \frac{c - e^{-x}}{e^{-x}}$$

$$y = \ln(ce^{x} - 1).$$

Contoh 2 Diberikan persamaan Gompertz [4]

$$\frac{dy}{dx} + a\,y \ln y = a\,y \ln b \tag{20}$$

Tentukan solusi umum dari persamaan Gompertz.

Penyelesaian:

Misalkan $g(y) = y$, maka

$$h(y) = g(y) \int \frac{dy}{g(y)}$$

$$= y \int \frac{dy}{y}$$

$$= y \ln y$$

Berdasarkan Persamaan (3) dan Persamaan (11) diperoleh $a(x) = a$ dan $b(x) = a \ln b$, maka solusi umum dari $\frac{dy}{dx} + a\,y \ln y = a\,y \ln b$ yaitu,

$$e^{\int a dx} \int \frac{dy}{y} - \int a \ln b\ .e^{\int a dx} dx = c$$

$$e^{ax}(\ln y - \ln b) = c$$

$$\ln \frac{y}{b} = ce^{-ax}$$

$$y = be^{ce^{-ax}}.$$

Contoh 3 Diberikan persamaan Logistik,

$$\frac{dy}{dx} = my\left(1 - \frac{y}{K}\right) \tag{21}$$

dengan m merupakan tingkat pertumbuhan penduduk dan K merupakan daya tampung penduduk.

Penyelesaian:

Persamaan (21) dapat diubah ke dalam bentuk,

$$\frac{dy}{dx} = my - \frac{my^2}{K}$$
$$\frac{dy}{dx} - my = -\frac{my^2}{K} \tag{22}$$

Misalkan $g(y) = -y^2$, maka

$$\begin{aligned} h(y) &= g(y)\int \frac{dy}{g(y)} \\ &= -y^2 \int \frac{dy}{-y^2} \\ &= -y \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (3) dan Persamaan (13) diperoleh $a(x) = m$ dan $b(x) = \frac{m}{K}$, maka solusi umum dari Persamaan (22) yaitu,

$$e^{\int m dx}\int \frac{dy}{-y^2} - \int \frac{m}{K} e^{\int m dx}\, dx = C$$
$$\frac{e^{mx}}{y} - \frac{e^{mx}}{K} = C$$
$$\frac{e^{mx}}{y} = C + \frac{e^{mx}}{K}$$
$$y = \frac{e^{mx}}{C + \frac{e^{mx}}{K}}$$
$$y = \frac{K}{1 + CKe^{-mx}}\,.$$

PERSAMAAN RICCATI

Diberikan bentuk umum persamaan Riccati pada Persamaan (1). Misalkan $y = u + z$ dengan u solusi partikular dengan diketahui z solusi homogen. Substitusikan $y = u + z$ ke Persamaan (1) maka diperoleh,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} + \frac{dz}{dx} &= Q(x)(u+z)^2 - P(x)(u+z) + R(x) \\ &= Q(x)(u^2 + 2uz + z^2) - P(x)(u+z) + R(x) \\ &= \left(Q(x)u^2 - P(x)u + R(x)\right) + (2uzQ(x) + z^2Q(x) - zP(x)) \\ \frac{du}{dx} + \frac{dz}{dx} &= \frac{du}{dx} + (2uzQ(x) - z^2Q(x) - zP(x)) \\ \frac{dz}{dx} &= 2uzQ(x) - z^2Q(x) - zP(x) \\ \frac{dz}{dx} &= (2uQ(x) - P(x))z + z^2Q(x) \end{aligned} \tag{23}$$

Karena Persamaan (23) merupakan Persamaan Bernoulli, maka berdasarkan solusi umum generalisasi Persamaan Bernoulli dari Persamaan (3) diperoleh solusi umum dari Persamaan (1), yaitu

$$\frac{e^{\int (2uQ(x) - P(x))dx}}{u - y} - \int Q(x) e^{\int (2uQ(x) - P(x))dx} dx = c$$

Diberikan contoh soal dari persamaan Riccati.

Contoh 4 Tentukan solusi umum dari persamaan

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - y - 2 \tag{24}$$

dengan $u = 2$.

Penyelesaian:

Misalkan $y = u + z$ dengan u solusi partikular dengan diketahui z solusi homogen. Substitusikan $y = u + z$ ke Persamaan (24) maka diperoleh,

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} + \frac{dz}{dx} &= (u+z)^2 - (u+z) - 2 \\
&= (u^2 + 2uz + z^2) - (u+z) + 2 \\
&= (u^2 - u + 2) + (2uz + z^2 - z) \\
\frac{du}{dx} + \frac{dz}{dx} &= \frac{du}{dx} + (2uz + z^2 - z) \\
\frac{dz}{dx} &= 2uz + z^2 - z \\
\frac{dz}{dx} &= (2u - 1)z + z^2 \qquad (25)
\end{aligned}$$

Persamaan (25) dapat diubah ke dalam bentuk Persamaan (4) menjadi,

$$dz - ((2u-1)z + z^2)dx = 0 \tag{26}$$

Selanjutnya, menunjukkan bahwa Persamaan (26) merupakan persamaan diferensial eksak dengan menurunkan $M(x,y)$ terhadap y dan $N(x,y)$ terhadap x.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M(x,y)}{\partial z} &= \frac{\partial\big((2u-1)z + z^2\big)}{\partial z} = 2u - 1 + 2z \\
\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial(1)}{\partial x} = 0
\end{aligned}$$

karena $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, maka Persamaan (26) merupakan persamaan diferensial non eksak. Berdasarkan solusi umum pada Persamaan (1) dengan mengubah persamaan Riccati menjadi persamaan Bernoulli, maka solusi umum dari Persamaan (26) adalah,

$$\frac{e^{\int 3dx}}{2-y} - \int e^{\int 3dx} dx = c$$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{3x}}{2-y} - \int e^{3x} dx &= c \\
\frac{e^{3x}}{2-y} &= c + \frac{1}{3}e^{3x} \\
\frac{e^{3x}}{c + \frac{1}{3}e^{3x}} &= 2 - y \\
y &= 2 - \frac{e^{3x}}{c + \frac{1}{3}e^{3x}}.
\end{aligned}$$

Contoh 5 Tentukan solusi umum dari persamaan

$$\frac{dy}{dx} + 2xy - y^2 = 1 + x^2 \tag{27}$$

dengan $u = x$.

Penyelesaian:

Berdasarkan solusi umum pada Persamaan (1) dengan mengubah persamaan Riccati menjadi persamaan Bernoulli, maka solusi umum dari Persamaan (27) adalah,

$$\frac{e^{\int -6x dx}}{x-y} - \int e^{\int -6x dx} dx = c$$
$$\frac{e^{-3x^2}}{x-y} + \int e^{-3x^2} dx = c$$
$$y = x - \frac{e^{-3x^2}}{c - \int e^{-3x^2} dx}.$$

Contoh 6 Tentukan solusi umum dari persamaan

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 - xy = 2x \tag{28}$$

dengan $u = 2$.

Penyelesaian:

Berdasarkan solusi umum pada Persamaan (1) dengan mengubah persamaan Riccati menjadi persamaan Bernoulli, maka solusi umum dari Persamaan (28) adalah,

$$\frac{e^{\int 3x dx}}{2-y} - \int x e^{\int 3x dx} dx = c$$
$$\frac{e^{\frac{3}{2}x^2}}{2-y} - \int x e^{\frac{3}{2}x^2} dx = c$$
$$y \int x e^{\frac{3}{2}x^2} dx = 2 \int x e^{\frac{3}{2}x^2} dx - e^{\frac{3}{2}x^2} + c$$
$$y = 2 - \frac{e^{\frac{3}{2}x^2}}{\frac{1}{3} e^{\frac{3x^2}{2}}} + c.$$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan dari bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Diketahui generalisasi persamaan Bernoulli dalam bentuk,
$$\frac{dy}{dx} + a(x)h(y) = b(x)g(y)$$
dengan $h(y) = g(y) \int \frac{dy}{g(y)}$. Maka, solusi umum dari generalisasi persamaan Bernoulli adalah
$$e^{\int a(x) dx} \int \frac{dy}{g(y)} - \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx = c$$
2. Diketahui persamaan Riccati dalam bentuk,
$$\frac{dy}{dx} = Q(x)y^2 - P(x)y + R(x).$$
Maka, solusi umum dari persamaan Riccati adalah
$$\frac{e^{\int (2uQ(x) - P(x)) dx}}{u-y} + \int Q(x) e^{\int (2uQ(x) - P(x)) dx} dx = c$$
dengan u sebagai solusi partikular.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abell ML dan Braselton JP *Differential Equations with Mathematica*. Boston: Academic Press, Inc. 1993.

[2] Alloway BJ and DC Ayres. Chemical Principle of Environmental Pollution. 2nd Edition. *Blackie Academic and Professional*. Chapman & Hall, London. 1995.

[3] Degeng I Wayan. *Kalkulus Lanjut: Persamaan Diferensial dan Aplikasinya*. Graha Ilmu. Yogyakarta. 2007.

[4] Reid WT *Riccati Differential Equations*. New York: Academic Press, Inc. 1972.

[5] Tisdell CC Alternate solution to generalized Bernoulli equation via an integrating factor: an exact differential equation approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2016. 7(2):1-4.

ANNISA ANADIA RESTY : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, annisa.anadia.resty@student.untan.ac.id

MARIATUL KIFTIAH : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

YUDHI : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, yudhi@math.untan.ac.id