Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 11, No. 1 (2022), hal 27-34.

METODE ALTERNATIF DALAM MENCARI SOLUSI PARTIKULAR PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA NON HOMOGEN KOEFISIEN KONSTAN

Alvi Yanitami, Mariatul Kiftiah, Yudhi

INTISARI

Solusi umum persamaan diferensial biasa non homogen koefisien konstan terdiri atas solusi homogen dan solusi partikular. Penelitian ini mengkaji metode alternatif untuk mencari solusi partikular persamaan diferensial biasa orde-n non homogen koefisien konstan, $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = e^{\alpha x} f(x)$ dengan a_i merupakan koefisien konstan dari $y^{(i)}$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $a_n \neq 0$ dan α merupakan bilangan riil. Metode ini dapat mencari solusi partikular tanpa harus memperhatikan bentuk umum solusi homogen. Pembahasan pada penelitian dibagi menjadi dua kasus, yaitu kasus pertama akar-akar dari persamaan karakteristik tidak sama dengan α dan kasus kedua, akar-akar dari persamaan karakteristik sama dengan α dengan multiplisitasnya k $(k \geq 1)$. Bentuk umum solusi partikular yang diperoleh, yaitu $y = e^{\alpha x} u(x)$ dimana $u^{(k)}(x) = \sum_{i=j}^{m} d_i g^{(i)}(x)$ dengan $g(x) = \frac{f(x)k!}{P^{(k)}(\alpha)}$.

Kata Kunci: *persamaan diferensial biasa, solusi partikular, koefisien konstan*

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang melibatkan fungsi yang tidak diketahui beserta turunan-turunannya dan bergantung pada satu variabel bebas atau lebih [1]. Menurut variabel bebasnya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dengan satu variabel bebas dan persamaan diferensial parsial dengan dua atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial biasa dapat dibagi menurut kelinearan, orde, dan koefisiennya. Persamaan diferensial yang dibahas dalam penelitian ini adalah persamaan diferensial linear orde-n non homogen dengan koefisien konstan.

Suatu persamaan diferensial orde-n dengan koefisien konstan secara umum dituliskan dalam bentuk

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x), \tag{1}$$

dengan a_i adalah koefisien konstan untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $a_n \neq 0$ dan $g(x)$ adalah fungsi kontinu, sedangkan $y^{(n)}$ adalah turunan ke- n dari y terhadap x [2]. Jika $g(x) = 0$ maka Persamaan (1) dinamakan persamaan diferensial linear orde-n homogen dan jika $g(x) \neq 0$ maka Persamaan (1) dinamakan persamaan diferensial linear orde-n non homogen.

Solusi umum persamaan diferensial biasa orde-n non homogen merupakan penjumlahan antara solusi homogen dan solusi partikular. Solusi homogen dicari menggunakan akar-akar persamaan karakteristiknya, sedangkan untuk mencari solusi partikular melalui beberapa metode antara lain metode variasi parameter dan metode koefisien tak tentu.

Secara umum untuk mencari solusi partikular dengan menggunakan metode variasi parameter dan metode koefisien tak tentu harus memperhatikan bentuk umum dari solusi homogen. Pada penelitian ini, membahas solusi partikular persamaan diferensial biasa orde-n non homogen tanpa harus memperhatikan bentuk umum dari solusi homogen.

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan satu variabel bebas.

Jika diambil $y(x)$ sebagai suatu fungsi satu variabel, dengan x dinamakan variabel bebas dan y dinamakan variabel tak bebas, maka persamaan diferensial biasa dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f\left(x, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{2}$$

Persamaan (2) menyatakan bahwa terdapat hubungan antara variabel bebas x dan variabel tak bebas y beserta derivatif-derivatifnya, dalam bentuk himpunan persamaan yang secara identik sama dengan nol. Sebuah persamaan diferensial disebut mempunyai orde-n jika orde turunan tertinggi yang terlibat adalah n, sedangkan jika turunan dengan orde tertinggi itu k maka persamaan itu dinamakan persamaan diferensial orde-k.

Suatu persamaan diferensial biasa $f\left(x, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\right) = 0$, dikatakan linear jika f merupakan suatu fungsi linear dari variabel $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$, definisi yang sama juga berlaku untuk persamaan diferensial parsial [3].

Contoh 1 Persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa non linear

1. $y' + 2y = 0$ (persamaan diferensial biasa linear)
2. $\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$ (persamaan diferensial biasa non linear)

METODE ALTERNATIF DALAM MENCARI SOLUSI PARTIKULAR PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA NON HOMOGEN KOEFISIEN KONSTAN

Diberikan persamaan diferensial biasa koefisien konstanta non homogen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = f(x)e^{\alpha x};\ f(x) \coloneqq \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \tag{3}$$

dengan $a_0 = 1$ dan α adalah akar karakteristik, dan Persamaan (3) memiliki polinomial karakteristik

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i \tag{4}$$

Teorema 1 [4] Misalkan $(t_1, t_2, t_3, \dots t_n)$ baris pertama dari matriks Toeplitz segitiga atas **T** dan $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots \eta_n)$ merupakan baris pertama dari T^{-1} dengan T^{-1} adalah invers dari matriks T maka

$$\eta_i = \begin{cases} \frac{1}{t_1}, \text{untuk } i = 1 \\ -\frac{1}{t_1} \sum_{j=0}^{i-2} t_{i-j}\eta_{j+1}, \text{untuk } i = 2,3, \dots, n \end{cases} \tag{5}$$

Teorema 2 [4] Diberikan persamaan diferensial biasa dengan bentuk umum

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = f(x), \tag{6}$$

$(f(x) \coloneqq \sum_{i=0}^{m} b_i x^i)$ dengan $a_0 = 1$

maka

$$y = \sum_{i=0}^{m} d_i f^{(i)}(x)$$

dengan

$$d_i = \begin{cases} 1, \text{untuk } i = 0 \\ -\sum_{j=0}^{i-1} a_{i-j} d_j, \text{untuk } i = 1,2, \dots, m. \end{cases} \tag{7}$$

Teorema 3 [4] Jika $y = u(x)e^{\alpha x}$ merupakan solusi partikular Persamaan (3) dan $P(\lambda)$ merupakan polinomial karakteristik dari Persamaan (3), maka

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} u^{(i)}(x) P^{(i)}(\alpha) = f(x) \tag{8}$$

dengan $P^{(i)}(\alpha)$ adalah turunan ke-i dari $P(\lambda)$ saat $\lambda = \alpha$.

Bukti

Diketahui

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i = a_0 + a_1 \lambda^1 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \cdots + a_n \lambda^n$$

dengan menurunkan $P(\lambda)$ sebanyak j kali terhadap λ sehingga diperoleh

$$P^{(j)}(x) = j! \sum_{i=j}^{n} C_i^j \, a_i \, \lambda^{i-j},$$

dengan $C_i^j = \frac{j!}{i!(j-i)!}$

karena

$y = u(x) e^{\alpha x}$,

maka

$$y^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} C_j^i \, (u)^{(j)} \, \alpha^{(i-j)} e^{\alpha x}, i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Lebih lanjut,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \, y^{(i)} = a_0 y + a_1 \, y' + a_2 \, y'' + a_3 y''' + \cdots + a_n \, y^{(n)}.$$

Kemudian substitusikan $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$ yang diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} a_i \, y^{(i)} &= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i} C_j^i \, (u)^{(j)}(x) \alpha^{(i-j)} e^{\alpha x} \\ &= e^{\alpha x} \sum_{j=0}^{n} (u)^{(j)}(x) \sum_{i=j}^{i} C_j^i \, a_i \alpha^{(i-j)} \\ f(x) e^{\alpha x} &= e^{\alpha x} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} (u)^{(i)}(x) \, P^{(i)}(\alpha) \end{aligned}$$

maka

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} (u)^{(i)}(x) \, P^{(i)}(\alpha)$$

terbukti bahwa Teorema (3) terpenuhi. ■

Teorema 4 [4] Jika α bukan akar karakteristik dari $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i = 0$ maka

$$y = e^{\alpha x} \sum_{i=0}^{m} d_i g^{(i)}(x)$$

dengan

$$d_i = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i = 0 \\ -\frac{1}{P(\alpha)} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{P^{(i-j)}(\alpha)}{(i-j)!} d_j, \text{ untuk } i = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

dan

$$g(x) = \frac{f(x)}{P(\alpha)}$$

merupakan solusi partikular dari Persamaan (3).

Bukti

Karena α bukan akar persamaan dari $P(\lambda)$ maka $P(\lambda) \neq 0$. Berdasarkan Teorema 3 dan mengalikan kedua ruas dengan

$$\frac{1}{P(\alpha)}$$

maka diperoleh

$$\frac{f(x)}{P(\alpha)} = \frac{1}{P(\alpha)} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} (u)^{(i)}(x)\, P^{(i)}(\alpha).$$

Misalkan

$$\frac{f(x)}{P(\alpha)} = g(x),$$

maka

$$\frac{1}{P(\alpha)} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} (u)^{(i)}(x)\, P^{(i)}(\alpha) = g(x)$$

dan berdasarkan Teorema 2 diperoleh

$$u(x) = \sum_{i=0}^{m} d_i g^{(i)}(x)$$

dengan

$$d_i = \begin{cases} 1, \text{ untuk } i = 0 \\ -\frac{1}{P(\alpha)} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{P^{(i-j)}(\alpha)}{(i-j)!} d_j, \text{ untuk } i = 1,2,\dots,m\,. \end{cases}$$

Lebih lanjut diperoleh

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x} u(x) \\ &= e^{\alpha x} \sum_{i=0}^{m} d_i g^{(i)}(x) \end{aligned}$$

terbukti bahwa Teorema 4 terpenuhi ■

Teorema 5 [4] Jika α merupakan akar persamaan karakteristik yang memiliki multiplisitas $k (k \geq 1)$, maka

$$y = e^{\alpha x} u(x)$$

dengan

$$u^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{m} d_i g^{(i)}(x),\ g(x) = \frac{f(x)k!}{P^{(k)}(\alpha)},$$

dan

$$d_i = \begin{cases} 1, \text{untuk } i = 0 \\ -\dfrac{k!}{P^{(k)}(\alpha)} \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} \dfrac{P^{(i+k-j)}(\alpha)}{(i+k-j)!} d_j, \text{ untuk } i = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

merupakan solusi partikular dari Persamaan (3).

Bukti

Karena α merupakan akar persamaan karakteristik yang memiliki multiplisitas $k(k \geq 1)$, maka $P(\lambda)$ dapat dituliskan dengan

$$P(\lambda) = (\lambda - \alpha)^k q(\lambda),$$

dan

$$q(\lambda) \neq 0$$

kemudian turunkan $P(\lambda)$ sebanyak k kali terhadap λ sehingga diperoleh

$$P^{(k)}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} C_i^k\,(\lambda)[(\lambda-\alpha)^k]^{(i)} q^{(k-i)}$$

dan

$$P^{(k)}(\alpha) = k!\,q(\alpha),$$

dari Persamaan (8) diperoleh

$$\frac{k!}{P^{(k)}(\alpha)} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i!}(u)^{(i)}(x) P^{(i)}(\alpha) = \frac{k!}{P^{(k)}(\alpha)} f(x).$$

Misalkan

$$g(x) = \frac{f(x)k!}{P^{(k)}(\alpha)},$$

maka

$$\frac{k!}{P^{(k)}(\alpha)} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i!}(u)^{(i)}(x) P^{(i)}(\alpha) = g(x)$$

dan berdasarkan Teorema 2 diperoleh

$$u^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{m} d_i g^{(i)}(x)$$

dengan

$$d_i = \begin{cases} 1, \text{untuk } i = 0 \\ -\dfrac{k!}{P^{(k)}(\alpha)} \displaystyle\sum_{j=0}^{i=1} \dfrac{P^{(i+k-j)}(\alpha)}{(i+k-j)!} d_j, \text{ untuk } i = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

terbukti bahwa Teorema (5) terpenuhi. ■

Contoh 2 Tentukan penyelesaian partikular dari persamaan diferensial biasa

$$y'' - 3y' - 4y = 3x.$$

Penyelesaian

Persamaan diferensial biasa tersebut ekuivalen dengan

$$-\tfrac{1}{4}y'' + \tfrac{3}{4}y' + y = -\tfrac{3x}{4} \tag{9}$$

berdasarkan Persamaan (9) diperoleh $a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = -\frac{1}{4}$.

Perhatikan bahwa

$$f(x) = -\frac{3x}{4}$$
$$f'(x) = -\frac{3}{4}$$

selanjutnya dengan menggunakan Teorema 2 maka diperoleh

$$d_0 = 1$$
$$d_1 = -a_1 = -\frac{3}{4}$$

lebih lanjut diperoleh

$$y = \sum_{i=0}^{m} d_i f^{(i)}(x)$$
$$y = d_0 f(x) + d_1 f'(x)$$
$$= -\frac{3x}{4} + \left[-\frac{3}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$$
$$= -\frac{3x}{4} + \frac{9}{16}$$

jadi penyelesaian partikularnya adalah

$$y_p = -\frac{3x}{4} + \frac{9}{16}.$$

Contoh 3 Tentukan penyelesaian partikular dari persamaan diferensial biasa

$$y^{(4)} - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 2xe^x$$

ekuivalen dengan

$$\frac{1}{2}y^{(4)} - \frac{5}{2}y''' + \frac{9}{2}y'' - \frac{7}{2}y' + y = xe^x \tag{10}$$

Penyelesaian

Perhatikan ruas kanan pada Persamaan (10) terdapat xe^x, berdasarkan Persamaan (3) ruas kanan dapat ditulis $f(x)e^{\alpha x} = xe^x$. Maka $f(x) = x$ dan α merupakan nilai pangkat pada eksponensial yaitu αx, sehingga diperoleh $\alpha = 1$. Pada saat $\lambda = \alpha$ dapat dibentuk polinomial karakteristik berikut,

$$P(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^4 - \frac{5}{2}\lambda^3 + \frac{9}{2}\lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda + 1$$
$$P'(\lambda) = 2\lambda^3 - \frac{15}{2}\lambda^2 + 9\lambda - \frac{7}{2}$$
$$P''(\lambda) = 6\lambda^2 - 15\lambda + 9$$
$$P'''(\lambda) = 12\lambda - 15$$
$$P^{(4)}(\lambda) = 12$$
$$P^{(5)}(\lambda) = 0$$

Karena

$$P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$$

dan

$$P'''(1) \neq 0$$

maka diperoleh multiplisitas $k = 3$, untuk k merupakan nilai terkecil dari orde turunan saat $P^{(k)}(\lambda) \neq 0$. Misalkan

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x)k!}{P^{(k)}(\alpha)} \\ &= x\frac{3!}{-3} \\ &= -2x \end{aligned}$$

selanjutnya dengan menggunakan Teorema 5 maka diperoleh

$$\begin{aligned} d_0 &= 1 \\ d_1 &= -\frac{3!}{P^{(3)}(1)}\frac{P^{(4)}(1)}{4!}d_0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned} u'''(x) &= \sum_{i=0}^{1} d_i g^{(i)}(x) \\ &= 1(-2x) + 1(-2) \\ &= -2(x+1) \end{aligned}$$

dengan mengintegralkan $u'''(x)$ sebanyak tiga kali terhadap x diperoleh

$$u(x) = -\frac{1}{12}(x^4 + 4x^3).$$

Jadi, solusi partikularnya adalah

$$\begin{aligned} y_p &= u(x)e^x \\ &= \left(-\frac{1}{12}(x^4 + 4x^3)\right)e^x. \end{aligned}$$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan, maka dapat ditarik kesimpulan, bahwa metode alternatif dimulai dengan memisalkan

$$g(x) = f(x)e^{\alpha x}$$

dari bentuk umum

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x),$$

dengan polinomial karakteristik

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} a_i\,\lambda^i.$$

Pembentukan solusi partikular dibagi dalam dua kasus, yaitu untuk kasus akar-akar dari polinomial karakteristik tidak sama dengan α atau akar-akar dari polinomial karakteristik sama dengan α dan multiplisitasnya k ($k \geq 1$) sehingga diperoleh solusi partikular $y = e^{\alpha x}u(x)$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Boyce WE, dan DiPrima RC. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem*, Ed ke-7. New York: Wiley and Sons; 2001.
[2] Kartono. *Persamaan Diferensial Biasa; Model Matematika Fenomena Perubahan*, Ed Pertama. Yogyakarta: Graha Ilmu; 2012.
[3] Marwan dan Munzir S. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu; 2009.
[4] Jiteng J, dan Sogabe T. *on Particular Solution of ordinary differential equations. Applied Mathematics and Computation* 219; 2013, 6761-6767.

ALVI YANITAMI : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, alviyanitami@student.untan.ac.id
MARIATUL KIFTIAH : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, kiftiahmariatul@math.untan.ac.id
YUDHI : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, yudhi@math.untan.ac.id