Buletin Ilmiah Mat. Stat dan Terapannya (Bimaster)
Volume 11, No. 1 (2022), hal 1-10

DEKOMPOSISI MATRIKS-MATRIKS OPERASIONAL DARI POLINOMIAL BERNSTEIN

Sarah Aljona, Evi Noviani, Yudhi

INTISARI

Dalam penelitian ini, dikaji matriks Polinomial Bernstein$(\boldsymbol{\phi}(x))$*. Matriks Polinomial Bernstein*$(\boldsymbol{\phi}(x))$ *adalah matriks kolom yang memuat elemen berupa Polinomial Bernstein. Polinomial Bernstein memiliki matriks-matriks operasional yaitu matriks operasional integral*$(\mathbf{P})$*, matriks operasional diferensial*$(\mathbf{D})$ *dan matriks operasional hasilkali*$(\widehat{\mathbf{V}})$. *Matriks Polinomial Bernstein dapat didekomposisikan menjadi* $\boldsymbol{\phi}(x) = \mathbf{At_m}(x)$ *dengan* $\mathbf{A}$ *adalah matriks koefisien dari Polinomial Bernstein dan* $\mathbf{t_m}(x)$ *adalah vektor kolom dari variabel Polinomial Bernstein. Dengan menggunakan* $\boldsymbol{\phi}(x) = \mathbf{At_m}(x)$, *dapat diperoleh dekomposisi matriks operasional integral dari Polinomial Bernstein adalah* $\mathbf{P} = \mathbf{A\Lambda B}$ *yang memenuhi* $\int_0^x \boldsymbol{\phi}(\mathrm{t})dt \simeq \mathbf{P}\boldsymbol{\phi}(x)$. *Selain itu, dapat diperoleh pula dekomposisi matriks operasional diferensial dari Polinomial Bernstein adalah* $\mathbf{D} = \mathbf{AFA^{-1}}$ *yang memenuhi* $\frac{d}{dx}\boldsymbol{\phi}(x) = \mathbf{D}\boldsymbol{\phi}(x)$ *dan dekomposisi matriks operasional hasilkali dari Polinomial Bernstein adalah* $\widehat{\mathbf{V}} = \widehat{\mathbf{V}}\mathbf{A^T}$ *yang memenuhi* $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}} \simeq \boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}}\,\widehat{\mathbf{V}}$.

Kata Kunci: *matriks Polinomial Bernstein, matriks operasional diferensial, matriks operasional integral, matriks operasional hasilkali*

PENDAHULUAN

Polinomial Bernstein pertama kali diperkenalkan oleh Sergei Natanovich Bernstein (1880-1986) [1]. Sergei menggunakan Polinomial Bernstein untuk menentukan teorema Weierstrass [2]. Selain itu, Polinomial Bernstein juga dapat digunakan untuk mengaproksimasi model regresi isotonik [3], matematika terapan, bidang fisika dan *computer aided geometric design*, dan dikombinasikan dengan metode lain seperti Galerkin, dan kolokasi untuk mencari solusi dari beberapa persamaan diferensial dan integral [4].

Penelitian ini menggunakan bentuk umum Polinomial Bernstein [5] pada interval $[0,1]$ sebagai berikut.

$$B_{k,m}(x) = \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \tag{1}$$

dengan k merupakan indeks dengan $k = 0, 1, \dots, m$ dan untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Polinomial Bernstein telah dikaji oleh Yousefi dan Behroozifar [5] yaitu membahas tentang matriks-matriks operasional dari Polinomial Bernstein serta pengaplikasiannya pada Persamaan Emden-Fowler dan Persamaan Bessel.

Suatu Polinomial Bernstein sebanyak m dapat dinyatakan dalam sebuah matriks Polinomial Bernstein. Berdasarkan penelitian Yousefi dan Behroozifar yaitu Polinomial Bernstein memiliki matriks-matriks operasional yaitu matriks operasional integral, matriks operasional diferensial dan matriks operasional hasilkali dari Polinomial Bernstein [5]. Matriks operasional dari Polinomial Bernstein telah digunakan dalam beberapa penelitian yaitu mencari solusi persamaan diferensial dan integral, perhitungan varians [5], solusi aproksimasi masalah nilai batas [6] dan kontrol optimal pecahan multidimensi [7]. Penelitian ini mengkaji penentuan dekomposisi matriks operasional integral, matriks operasional diferensial dan matriks operasional hasilkali dari Polinomial Bernstein yang sebelumnya telah dibahas [5], tetapi dengan uraian yang lebih lengkap.

Tahapan dalam menentukan dekomposisi matriks Polinomial Bernstein yaitu dari Persamaan (1) disajikan dengan menggunakan teorema Binomial. Lalu dengan memisahkan koefisien dan variabel dari Polinomial Bernstein, maka Polinomial Bernstein dapat dinyatakan menjadi perkalian matriks. Oleh karena itu matriks Polinomial Bernstein dapat diuraikan menjadi perkalian matriks koefisien dan vektor dari variabel Polinomial Bernstein. Selanjutnya mencari fungsi aproksimasi untuk elemen matriks operasional integral dari Polinomial Bernstein. Lalu dengan menggunakan hasil fungsi aproksimasi, dicari dekomposisi matriks operasional integral dari Polinomial Bernstein dengan menggunakan integrasi matriks [8]. Langkah selanjutnya mencari dekomposisi matriks operasional diferensial dari Polinomial Bernstein dengan menggunakan diferensiasi matriks [8]. Kemudian mencari dekomposisi matriks operasional hasilkali dari Polinomial Bernstein.

DEKOMPOSISI MATRIKS POLINOMIAL BERNSTEIN

Diketahui matriks Polinomial Bernstein yang dinyatakan dengan $\boldsymbol{\phi}(x)$ yaitu

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \begin{bmatrix} B_{0,m}(x) \\ B_{1,m}(x) \\ \vdots \\ B_{m,m}(x) \end{bmatrix} \tag{2}$$

Adapun bentuk umum Polinomial Bernstein berderajat m pada interval $[a,b]$ dengan $a,b \in \mathbb{R}$ sebagai berikut.

$$B_{k,m}(x) = \binom{m}{k} \frac{(x-a)^k (b-x)^{m-k}}{(b-a)^m}$$

Oleh karena itu, diperoleh Polinomial Bernstein pada interval $[0,1]$ yaitu

$$B_{k,m}(x) = \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k},$$

dengan $k = 0,1,\dots m,\ m \in \mathbb{N}$ dan $\binom{m}{k}$ merupakan kombinasi m obyek dengan pengambilan sebanyak k obyek yaitu

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}.$$

Adapun dengan menggunakan teorema Binomial dari $(1-x)^{m-k}$ yaitu

$$(1-x)^{m-k} = \sum_{s=0}^{m-k} (-1)^s \binom{m-k}{s} x^s$$

Persamaan (1) dapat dinyatakan menjadi

$$\begin{aligned} B_{k,m}(x) &= \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \\ &= \binom{m}{k} x^k \left(\sum_{s=0}^{m-k} (-1)^s \binom{m-k}{s} x^s \right) \\ B_{k,m}(x) &= \sum_{s=0}^{m-k} (-1)^s \binom{m}{k} \binom{m-k}{s} x^{k+s}, \end{aligned} \tag{3}$$

dengan $k = 0,1,2,\dots,m$.

Untuk memperoleh dekomposisi dari $\boldsymbol{\phi}(x)$, maka dengan menguraikan Persamaan (3) menjadi perkalian vektor baris dari koefisien Polinomial Bernstein dan vektor kolom dari variabel Polinomial Bernstein diperoleh sebagai berikut.

$$B_{k,m}(x) = \left[\overbrace{0,\ldots,0}^{k}, (-1)^0 \binom{m}{k}\binom{m-k}{0}, (-1)^1 \binom{m}{k}\binom{m-k}{1}, \ldots, (-1)^{m-k} \binom{m}{k}\binom{m-k}{m-k}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix} \tag{4}$$

Misalkan $\mathbf{A}_{\boldsymbol{k+1}}$ merupakan vektor baris ke-k dari koefisien Polinomial Bernstein yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{k+1}} = \left[\overbrace{0,\ldots,0}^{k}, (-1)^0 \binom{m}{k}\binom{m-k}{0}, (-1)^1 \binom{m}{k}\binom{m-k}{1}, \ldots, (-1)^{m-k} \binom{m}{k}\binom{m-k}{m-k}\right]$$

dengan demikian, untuk $k = 0,1,2,\ldots,m$ diperoleh matriks $\mathbf{A}$ sebagai matriks koefisien yang berukuran $(m+1)(m+1)$ yaitu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (-1)^0 \frac{m!}{0!m!}\frac{m!}{0!(m-0)!} & (-1)^1 \frac{m!}{0!m!}\frac{m!}{1!(m-1)!} & \cdots & (-1)^{m-0} \frac{m!}{0!m!}\frac{m!}{m!m-m!} \\ 0 & (-1)^0 \frac{m}{1!}\frac{m-1!}{0!(m-1)!} & \cdots & (-1)^{m-1} \frac{m}{1!}\frac{m-1!}{(m-1)!(m-m)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (-1)^{m-m} \frac{m!}{m!}\frac{m-m!}{m-m!(m-m)!} \end{bmatrix}.$$

Kemudian misalkan vektor kolom dari variabel Polinomial Bernstein dinyatakan sebagai $\mathbf{t_m}(x)$ yaitu

$$\mathbf{t_m}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}.$$

Oleh karena itu, Polinomial Bernstein pada Persamaan (4) dapat dinyatakan menjadi

$$B_{k,m}(x) = \mathbf{A}_{\boldsymbol{k+1}}\mathbf{t_m}(x). \tag{5}$$

Untuk $k = 0,1,2,\ldots,m$ Persamaan (5) maka uraian dari Persamaan (2) menjadi

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \begin{bmatrix} \sum_{s=0}^{m-0} (-1)^s \binom{m}{0}\binom{m-0}{s} x^{0+s} \\ \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \binom{m}{0}\binom{m-1}{s} x^{1+s} \\ \vdots \\ \sum_{s=0}^{m-k} (-1)^s \binom{m}{m}\binom{m-m}{s} x^{m+s} \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^0 \frac{m!}{0!m!}\frac{m!}{0!(m-0)!} & (-1)^1 \frac{m!}{0!m!}\frac{m!}{1!(m-1)!} & \cdots & (-1)^{m-0} \frac{m!}{0!m!}\frac{m!}{m!m-m!} \\ 0 & (-1)^0 \frac{m}{1!}\frac{m-1!}{0!(m-1)!} & \cdots & (-1)^{m-1} \frac{m}{1!}\frac{m-1!}{(m-1)!(m-m)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (-1)^{m-m} \frac{m!}{m!}\frac{m-m!}{m-m!(m-m)!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \mathbf{A}\mathbf{t_m}(x). \tag{6}$$

FUNGSI APROKSIMASI

Untuk mencari dekomposisi matriks operasional integral dari Polinomial Bernstein, terlebih dahulu mencari fungsi aproksimasi untuk variabel x^{m+1} pada Polinomial Bernstein. Dengan menggunakan hasilkali dalam[10], misalkan $H = L^2[0,1]$ dengan $L^2[0,1]$ yaitu ruang Lebesgue (L^2) pada interval $[0,1]$ dan $Y = span[B_{0,m}, B_{1,m}, \dots, B_{m,m}]$. Himpunan Y merupakan subruang tertutup di H maka Y subruang lengkap dari H. Jika $f, g \in H$ maka diperoleh hasilkali dalam sebagai berikut.

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Karena $f \in H$ dan Y subruang lengkap dari H maka untuk setiap $y \in Y$ terdapat $y_0 \in Y$ berlaku

$$\|f - y_0\| < \|f - y\|$$

dan memenuhi

$$\langle f - y_0, y\rangle = 0. \tag{7}$$

Kemudian, karena $y_0 \in Y$ maka terdapat koefisien $a_0, a_1, \dots, a_m$ sedemikian sehingga menjadi

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k B_{k,m}(x) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\phi}(x),$$

dengan $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}} = [\, a_0, a_1, \dots, a_m]$.

Dengan menggunakan $y = B_{k,m}$, maka Persamaan (7) dapat dinyatakan menjadi

$$\begin{aligned} \langle f - y_0, B_{k,m}\rangle &= 0, \quad k = 0,1, \dots, (m). \\ \langle f - y_0, \phi_i\rangle &= 0 \\ \langle f, \phi_i\rangle - \langle y_0, \phi_i\rangle &= 0 \\ \langle y_0, \phi_i\rangle &= \langle f, \phi_i\rangle, \quad i = 1,2, \dots, (m+1). \end{aligned} \tag{8}$$

Berdasarkan Persamaan (9) dan $g = \phi_i$ maka $\langle f, \phi_i\rangle$ dapat dinyatakan menjadi

$$\langle f, \phi_i\rangle = \int_0^1 f(x)B_{i-1,m}(x)dx, \qquad \text{untuk } i = 1,2, \dots, (m+1).$$

Misalkan $\langle f, \boldsymbol{\phi}\rangle$ merupakan vektor yang memuat elemen hasilkali dalam dari f, ϕ_i untuk $i = 1,2, \dots, (m+1)$ yaitu

$$\langle f, \boldsymbol{\phi}\rangle = \begin{bmatrix} < f, \phi_1 > \\ < f, \phi_2 > \\ \vdots \\ < f, \phi_{m+1} > \end{bmatrix} \tag{9}$$

dan $\langle y_0, \boldsymbol{\phi}\rangle$ merupakan vektor yang memuat elemen hasilkali dalam dari y_0, ϕ_i untuk $i = 1,2, \dots, (m+1)$ yaitu

$$\langle y_0, \boldsymbol{\phi}\rangle = \begin{bmatrix} < y_0, \phi_1 > \\ < y_0, \phi_2 > \\ \vdots \\ < y_0, \phi_{m+1} > \end{bmatrix}.$$

Dengan mentranspose Persamaan (10), maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} < f,\phi_1 > \\ < f,\phi_2 > \\ \vdots \\ < f,\phi_{m+1} > \end{bmatrix}^T = \left[\langle f, B_{0,m}\rangle, \langle f, B_{1,m}\rangle, \dots, \langle f, B_{m,m}\rangle\right]$$

$$= \left[\int_0^1 f(x)B_{0,m}(x)dx\,, \int_0^1 f(x)B_{1,m}(x)dx\,, \dots, \int_0^1 f(x)B_{m,m}(x)dx\right]$$

$$= \int_0^1 f(x)\boldsymbol{\phi}(x)^T dx. \qquad (10)$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan $y_0(x) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(x)$ dan Persamaan (11) maka untuk $i = 1,2,\dots,(m+1)$ Persamaan (9) diperoleh menjadi

$$\int_0^1 y_0\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}}dx = \int_0^1 f(x)\boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}}dx.$$

$$\int_0^1 \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}}dx = \int_0^1 f(x)\boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}}dx.$$

$$\boldsymbol{a}^T\int_0^1 \boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}}dx = \int_0^1 f(x)\boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}}dx. \qquad (11)$$

Misalkan suatu matriks $\mathbf{Q}$ yaitu suatu matriks simetris dan *invertible* $(m+1)\times(m+1)$ maka berdasarkan Persamaan (12) diperoleh yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \int_0^1 \boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}}dx \\ &= \mathbf{A}\left(\int_0^1 \mathbf{t_m}(x)\mathbf{t_m}(x)^T dx\right)\mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{m+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \cdots & \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}\mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{AHA^T}. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $y_0(x) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(x)$ memiliki $\boldsymbol{a}$ pada Persamaan (12) yang dapat dinyatakan menjadi

$$\boldsymbol{a}^T = \int_0^1 f(x)\boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}}dx\,\mathbf{Q}^{-1} \qquad \text{atau} \qquad \boldsymbol{a} = (\mathbf{Q}^{-1})^T\int_0^1 f(x)\boldsymbol{\phi}(x)dx. \qquad (12)$$

DEKOMPOSISI MATRIKS OPERASIONAL INTEGRAL DARI POLINOMIAL BERNSTEIN

Untuk memperoleh dekomposisi matriks operasional integral dari Polinomial Bernstein diawali dengan memisalkan bentuk integral dari Polinomial Bernstein memenuhi

$$\int_0^x \boldsymbol{\phi}(t)dt \simeq \mathbf{P}\boldsymbol{\phi}(x), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{13}$$

dengan **P** merupakan matriks operasional integral yang berukuran $(m+1) \times (m+1)$.
Oleh karena itu, dicari dekomposisi dari **P** dengan menggunakan Persamaan (14) berdasarkan integrasi matriks yaitu mengintegralkan elemen pada matriks[8] maka diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\int_0^x \boldsymbol{\phi}(t)dt &= \mathbf{A}\int_0^x \mathbf{t_m}(t)dt \\ &= \mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ \frac{x^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{x^{m+1}}{m+1}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{14}$$

Kemudian dengan memisahkan koefisien dan variabel, maka Persamaan (15) dapat diuraikan menjadi perkalian matriks koefisien dan vektor kolom yang memuat variabel x^{m+1} yaitu

$$\int_0^x \boldsymbol{\phi}(t)dt = \mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{m+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{m+1}\end{bmatrix}. \tag{15}$$

Misalkan matriks koefisien dinyatakan dengan $\boldsymbol{\Lambda}$ yang memiliki entri $\Lambda_{ii} = \frac{1}{i}$ dan $\Lambda_{ij} = 0$, $i \neq j$ dengan $i, j = 1, \dots, (m+1)$ dan vektor kolom yang memuat variabel dinyatakan dengan **X** sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{m+1}\end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{m+1}\end{bmatrix}. \tag{17}$$

Oleh karena itu, berdasarkan Persamaan (17) dan (18) maka Persamaan (14) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\int_0^x \boldsymbol{\phi}(t)dt = \mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{X}. \tag{18}$$

Berdasarkan Persamaan (6) diperoleh bahwa

$$\mathbf{t_m}(x) = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\phi}(x),$$

Selanjutnya baris ke-i dari $\mathbf{t_m}$(x) dapat dinyatakan

$$x^{i-1} = \mathbf{A}_i^{-1}\boldsymbol{\phi}(x), \tag{19}$$

dengan A_i^{-1} adalah baris ke-i dari $\mathbf{A}^{-1}$ untuk $i = 1,2, \dots, (m+1)$ maka diperoleh

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} \\ A_2^{-1} \\ \vdots \\ A_{m+1}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Karena terdapat x^{m+1} pada Persamaan (18) maka berdasarkan Persamaan (20) dapat dinyatakan menjadi

$$x^{m+1} \simeq \boldsymbol{a_{m+1}^T} \boldsymbol{\phi}(x). \tag{20}$$

Adapun berdasarkan Persamaan (13), Persamaan (6) dan menggunakan integrasi matriks yaitu mengintegrasikan elemen matriks maka $\boldsymbol{a_{m+1}}$ pada Persamaan (21) dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_{m+1}} &= \left(\mathbf{Q^{-1}}\right)^{\boldsymbol{T}} \left(\int_0^1 x^{m+1} \boldsymbol{\phi}(x) dx\right) \\ \boldsymbol{a_{m+1}} &= \left(\mathbf{Q^{-1}}\right)^{\boldsymbol{T}} \mathbf{A} \left(\int_0^1 x^{m+1}\, \mathbf{t_m}(x) dx\right) \\ &= \left(\mathbf{Q^{-1}}\right)^{\boldsymbol{T}} \mathbf{A} \left(\begin{bmatrix} \int_0^1 x^{m+1} dx \\ \int_0^1 x^{m+2} dx \\ \vdots \\ \int_0^1 x^{2m+1} dx \end{bmatrix} \right) \\ &= (\mathbf{Q}^{-1})^T \mathbf{A} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{m+2} \\ \frac{1}{m+3} \\ \vdots \\ \frac{1}{2m+2} \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Dengan demikian vektor kolom **X** pada Persamaan (18) dapat dinyatakan menjadi

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{m+1} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \mathrm{A}_2^{-1} \\ \vdots \\ \mathrm{A}_m^{-1} \\ a_{m+1}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}\,(x). \tag{21}$$

Misalkan sebuah matriks **B** berukuran $(m+1) \times (m+1)$ yang dinyatakan dengan

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_2^{-1} \\ \vdots \\ \mathrm{A}_m^{-1} \\ a_{m+1}^T \end{bmatrix},$$

maka Persamaan (22) dapat diperoleh

$$\mathbf{X} \simeq \mathbf{B}\boldsymbol{\phi}(x). \tag{22}$$

Substitusikan Persamaan (23) ke Persamaan (19) maka diperoleh

$$\int_0^x \boldsymbol{\phi}(t) dt \simeq \mathbf{A\Lambda B}\boldsymbol{\phi}(x) \simeq \mathbf{P}\boldsymbol{\phi}(x),$$

dan dekomposisi matriks operasional integral dari Polinomial Bernstein yaitu

$$\mathbf{P} = \mathbf{A\Lambda B}.$$

DEKOMPOSISI MATRIKS OPERASIONAL DIFERENSIAL DARI POLINOMIAL BERNSTEIN

Untuk mencari dekomposisi matriks operasional diferensial dari Polinomial Bernstein maka dimisalkan bentuk diferensial dari Polinomial Bernstein memenuhi

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{\phi}(x) = \mathbf{D}\boldsymbol{\phi}(x), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{23}$$

dengan **D** merupakan matriks operasional diferensial yang berukuran $(m+1) \times (m+1)$.

Untuk mencari dekomposisi dari matriks **D** yaitu dengan melakukan diferensiasi matriks yaitu mendiferensialkan elemen matriks dari Persamaan (6) yang diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\boldsymbol{\phi}(x) &= \mathbf{A}\frac{d}{dx}\mathbf{t_m}(x)\\ &= \mathbf{A}\begin{bmatrix}\frac{d}{dx}(1)\\ \frac{d}{dx}(x)\\ \frac{d}{dx}(x^2)\\ \vdots\\ \frac{d}{dx}(x^m)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{\phi}(x) = \mathbf{A}\begin{bmatrix}0\\1\\2x\\ \vdots\\ mx^{m-1}\end{bmatrix} \tag{24}$$

Kemudian dengan memisahkan matriks koefisien dan variabel pada Persamaan (25) sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{\phi}(x) = \mathbf{A}\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ x\\ x^2\\ \vdots\\ x^m\end{bmatrix}. \tag{25}$$

Adapun misalkan matriks koefisien berukuran $(m+1) \times (m+1)$ yang dinyatakan dengan **F** yaitu

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & m & 0\end{bmatrix},$$

maka Persamaan (26) menjadi

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{\phi}(x) = \mathbf{AFt_m}(x). \tag{26}$$

Karena $\mathbf{t}_{\boldsymbol{m+1}}(x) = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\phi}(x)$ maka Persamaman (27) diperoleh

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{\phi}(x) = \mathbf{AFA}^{-1}\boldsymbol{\phi}(x) = \mathbf{D}\boldsymbol{\phi}(x),$$

sehingga dekomposisi matriks operasional diferensial dari Polinomial Bernstein yaitu

$$\mathbf{D} = \mathbf{AFA}^{-1}.$$

DEKOMPOSISI MATRIKS OPERASIONAL HASILKALI DARI POLINOMIAL BERNSTEIN

Misalkan bentuk operasional hasilkali dari Polinomial Bernstein yaitu memenuhi

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}} \simeq \boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}}\,\widehat{\mathbf{V}}, \tag{27}$$

dengan $\boldsymbol{v}$ merupakan sebuah matriks sebarang berukuran $(m+1)\times 1$ dan $\widehat{\mathbf{V}}$ merupakan sebuah matriks operasional hasilkali dari Polinomial Bernstein.

Untuk dicari dekomposisi dari matriks $\widehat{\mathbf{V}}$ yaitu dengan memanfaatkan penjabaran dari ruas kiri Persamaan (28) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}} &= \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\phi}(x)\big(\mathbf{t_m}(x)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\big)\\ &= \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\phi}(x)[1,x,x^2,\dots,x^m]\mathbf{A}^T\\ &= [\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\phi}(x), x\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\phi}(x), x^2\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\phi}(x),\dots,x^m\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\phi}(x)]\mathbf{A}^T\\ &= \left[\sum_{k=0}^{m} v_k B_{k,m}\,, \sum_{k=0}^{m} v_k x B_{k,m}\,,\dots, \sum_{k=0}^{m} v_k x^m B_{k,m}\right]\mathbf{A}^T\end{aligned} \tag{28}$$

Selanjutnya untuk aproksimasi fungsi $x^m B_{k,m}$ berdasarkan Persamaan (21), maka diperoleh

$$x^j B_{k,m} \simeq \boldsymbol{u_{k,j}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(x) = \boldsymbol{\phi}(x)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{u_{k,j}}, \qquad j,k = 0,1,\dots,m.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} v_k\,(x^j B_{k,m}(x)) \simeq \sum_{k=0}^{m} v_k\,\boldsymbol{\phi}(x)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{u_{k,j}} &= \boldsymbol{\phi}(x)^{\boldsymbol{T}}\sum_{k=0}^{m} v_k\,\boldsymbol{u_{k,j}}\\ &= \boldsymbol{\phi}(x)^T\sum_{k=0}^{m}\boldsymbol{u_{k,j}}v_k\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{m} v_k\,(x^j B_{k,m}(x)) \simeq \sum_{k=0}^{m} v_k\,\boldsymbol{\phi}(x)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{u_{k,j}} = \boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{V}}_j\,, \tag{29}$$

dengan memisalkan $\widetilde{\mathbf{V}}_j = \sum_{k=0}^{m}\boldsymbol{u_{k,j}}v_k = \left[\boldsymbol{u_{k,0}},\boldsymbol{u}_{\mathbf{k},\mathbf{1}},\dots,\boldsymbol{u_{k,m}}\right]\boldsymbol{v}$ dan $j = 0,1,\dots,m$. Jika dinyatakan sebuah matriks berukuran $(m+1)\times(m+1)$ yaitu $\widetilde{\mathbf{V}} = [\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2,\dots,\widetilde{V}_{m+1}]$, maka dengan mensubstitusikan Persamaan (30) ke Persamaan (29) diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(x)^{\mathrm{T}} &= \left[\sum_{k=0}^{m} v_k B_{k,m}\,, \sum_{k=0}^{m} v_k x B_{k,m}\,,\dots, \sum_{k=0}^{m} v_k x^m B_{k,m}\right]\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\\ &\simeq \boldsymbol{\phi}(x)^T\big[\widetilde{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{1}},\widetilde{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{2}},\dots,\widetilde{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{m+1}}\big]\mathbf{A}^T\\ \mathbf{v}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(x)^{\mathbf{T}} &\simeq \boldsymbol{\phi}(x)^T\widetilde{\mathbf{V}}\mathbf{A}^T = \boldsymbol{\phi}(x)^T\widehat{\mathbf{V}},\end{aligned}$$

dan dekomposisi matriks operasional hasilkali dari Polinomial Bernstein yaitu

$$\widehat{\mathbf{V}} = \widetilde{\mathbf{V}}\mathbf{A}^T.$$

KESIMPULAN

Matriks operasional dari Polinomial Bernstein terdiri dari matriks operasional integral ($\mathbf{P}$), matriks operasional diferensial ($\mathbf{D}$), dan matriks operasional hasilkali ($\widehat{\mathbf{V}}$). Berdasarkan hasil penelitian ini, diperoleh dekomposisi matriks operasional integral adalah $\mathbf{P} = \mathbf{A\Lambda B}$, dekomposisi matriks operasional diferensial adalah $\mathbf{D} = \mathbf{AFA^{-1}}$, dan dekomposisi matriks operasional hasilkali dari Polinomial Bernstein adalah $\widehat{\mathbf{V}} = \widetilde{\mathbf{V}}\mathbf{A}^T$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Garloff J dan Smith AP, Guest Preface, *Reliable Computing*, vol. 17, hal. 1-4, 2012.

[2] Bernstein S, “Démonstation du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités”, *Comm. Kharkov Math. Soc.*, vol.13:1-2, 1912.

[3] Kurniawan, PS, *Maximum likelihood Estimator untuk Mengestimasik Model Regresi Isotonik dengan Pendekatan Polinomial Bernstein pada Kasus Satu Variabel Indepemden*, Diakses pada 21 Maret 2021 dari https://dspace.uii.ac.id/handle/123456789/6451.

[4] Rani D dan Mishra V, “Approximate Solution of Boundary Value Problem with Bernstein Polynomial Laplace Decomposition Method”, *International journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 114, no. 4:823-833, 2017.

[5] Yousefi SA dan Behroozifar M, “Operational Matrices of Polinomial Bernsteins and Their Applications”, *Journal of Systems Science*, 46: 709-716, Maret 2010.

[6] Shah K, Abdeljawad T, Khalil H dan Khan RA, “Approximate Solutions of Some Boundary Value Problems by Using Opertional Matrices of Bernstein Polynomials”, *IntechOpen*, 2020.

[7] Alipour M, Rostamy D, dan Baleanu D, “Solving multi-dimensional fractional optimal kontrol problems with inequality constraint by Bernstein polynomials operational matrices”, *SAGE Journal*, vol. 19, no. 16:2523-2540, 2012.

[8] Bronson R dan Costa G, *Persamaan Diferensial*, Jakarta: Erlangga, 2007.

[9] Stewart J, *Kalkulus, Edisi Keempat, jilid 2*, Jakarta: Erlangga, 2003.

[10] Kreyzig E, *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York: John Wiley and Sons. Inc, 1978.

SARAH ALJONA : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
sarah.aljona@gmail.com

EVI NOVIANI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
evi_noviani@math.untan.ac.id

YUDHI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
yudhi@math.untan.ac.id