Buletin Ilmiah Math. Stat dan Terapannya (Bimaster)
Volume 10, No.4 (2021), hal 477-484

METODE GUPTA DALAM MENENTUKAN SOLUSI PARTIKULAR PERSAMAAN BEDA LINEAR TAK HOMOGEN DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

Frananta Maha, Mariatul Kiftiah, Yudhi

INTISARI

Persamaan beda yaitu persamaan yang memuat penerapan operator beda pada fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Penelitian ini mencari solusi partikular dari persamaan beda linear tak homogen dengan koefisien konstan menggunakan Metode Gupta, dengan bentuk tak homogennya adalah perkalian fungsi eksponensial dengan fungsi polinomial. Pada Metode Gupta, persamaan beda linear dinyatakan dalam bentuk operator geser. Selanjutnya, ditransformasikan ke dalam bentuk operator beda maju sampai diperoleh solusi partikular persamaan beda linear tak homogen.

Kata Kunci: *Operator geser, operator beda maju, transformasi*

PENDAHULUAN

Pada umumnya persamaan beda (*difference*) muncul dari fenomena yang terjadi pada kehidupan sehari-hari. Seperti perubahan yang teramati, yaitu sebagai contoh perubahan jumlah populasi kelinci disuatu pulau pada setiap waktu dengan jenis variabel diskrit waktu. Perubahan populasi kelinci dapat dinyatakan ke dalam bentuk Persamaan Fibonacci. Persamaan Fibonacci juga merupakan contoh dari persamaan beda [1].

Persamaan beda linear terbagi menjadi 2 bentuk persamaan yaitu persamaan beda linear homogen dan persamaan beda linear tak homogen. Solusi umum persamaan beda linear tak homogen terdiri dari solusi homogen dan solusi partikular. Adapun dalam mencari solusi partikular terdapat beberapa metode, diantaranya adalah Metode Annihilator dan Metode Variasi Parameter. Pada umumnya dalam Metode Annihilator dan Metode Variasi Parameter memperhatikan bentuk umum solusi homogen untuk mencari solusi partikular [2].

Namun, terdapat metode yang tidak perlu memperhatikan bentuk umum solusi homogen dari persamaan beda linear tak homogen untuk mencari solusi partikular, seperti Metode Gupta. Menurut Ramesh C. Gupta [3], lebar langkah (h) yang digunakan adalah 1, operator beda yang digunakan adalah operator geser (E) dan operator beda maju (Δ), bentuk tak homogen yang digunakan adalah perkalian antara fungsi eksponensial dengan fungsi polinomial. Konstruksi Metode Gupta berawal dari persamaan beda linear yang dinyatakan dengan fungsi $y(x)$ yang diterapkan dengan operator geser. Berikutnya, subtitusikan fungsi $y(x)$ yaitu perkalian antara fungsi eksponensial dengan sembarang fungsi $u(x)$. Selanjutnya, fungsi yang sudah diterapkan dengan operator geser ditransformasikan ke dalam bentuk operator beda maju. Kemudian, persamaan yang sudah ditransformasikan, dioperasikan dengan operator beda maju sampai sebanyak n kali dan diperoleh solusi partikular persamaan beda linear tak homogen.

Pada penelitian ini dibahas konstruksi dari Metode Gupta dan pengaplikasiannya dalam menyelesaikan persamaan beda linear tak homogen. Selain itu, dibahas teori-teori yang dapat digunakan dalam proses pengaplikasian Metode Gupta untuk menyelesaikan persamaan beda linear tak homogen.

BILANGAN STIRLING JENIS KEDUA

Bilangan Stirling jenis kedua memiliki definisi yaitu sebagai berikut.

Definisi 1 [4] *Bilangan Stirling jenis kedua, dinotasikan dengan* $S(n,k)$ *atau* $\left\{ n \atop k \right\}$, *adalah banyaknya cara menyusun partisi dari suatu himpunan dengan* n *elemen ke dalam* k *himpunan bagian yang tidak kosong, dengan* $n,k\ \geq 1$ *dan* $n \geq k$.

Berikut adalah teorema yang dapat menghitung Bilangan Stirling jenis kedua.

Teorema 2 [4] Bilangan Stirling jenis kedua dapat dirumuskan sebagai:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n.$$

Bukti:

Misalkan N adalah himpunan bola sebanyak n bola dan K adalah himpunan wadah sebanyak k wadah. Selanjutnya, dibuktikan bahwa banyaknya cara memasukan paling sedikit 1 bola ke dalam k wadah adalah $k!\,S(n,k)$. Dimisalkan $f: N \to K$ dan didefinisikan A_i dengan $i = 1,2,3,\dots,k$ adalah himpunan bola yang berada didalam wadah, maka $A_i \subseteq N$. Jelas f surjektif karena $f^{-1} \neq \emptyset$. Himpunan-himpunan A_i saling lepas dan gabungannya sama dengan N. Ini berarti semua himpunan A_i membentuk partisi pada N. Jadi, banyaknya partisi yang berbeda adalah Bilangan Stirling jenis kedua. Tetapi untuk urutan k wadah yang lain, diperoleh partisi $A_1, A_2, \dots, A_k$ yang berbeda. Karena terdapat $k!$ dengan urutan k wadah yang berbeda, maka total ada $k!\,S(n,k)$ partisi yang berbeda. Ini membuktikan terdapat fungsi surjektif yang berbeda. Berikutnya, karena wadah untuk setiap bola bisa bebas dipilih salah satu diantara k wadah dan ada sebanyak k pilihan untuk setiap bola. Karena cara memilih setiap bola saling bebas satu sama lain dan terdapat n bola, maka dengan menggunakan prinsip perkalian. Dapat disimpulkan bahwa banyaknya cara memasukan bola yang berbeda adalah k^n. Kemudian, dalam menghitung fungsi f ketika salah satu anggota k tidak tercakup, maka harus menghapus unsur tersebut. Untuk menghitungnya, dipilih k yang tidak tercakup dan kemudian menambahkan setiap elemen n dengan $k-1$ kemungkinan lainnya. Namun, ketika menghapus unsur tersebut maka telah menghapus dua kali unsur disetiap fungsi ketika dua elemen k tidak tercakup, Jadi harus menambahkannya kembali. Dengan inklusi-eksklusi didapatkan formula yang diinginkan yaitu:

$$k!\,S(n,k) = \binom{k}{0}k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \cdots = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$$

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n \ \blacksquare.$$

Contoh 3 Tentukan nilai dari $S(4,2)$.

Penyelesaian:

$$S(4,2) = \frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\binom{2}{j}(2-j)^4$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\binom{2}{0}(2-0)^4\right) - \left(\binom{2}{1}(2-1)^4\right) + \left(\binom{2}{2}(2-2)^4\right)\right)$$

$$= 7.$$

Definisi 4 [5] *Polinomial faktorial turun dinyatakan dengan* $x^{\underline{n}}$, *untuk* n *bilangan bulat positif dan didefinisikan sebagai berikut:*

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)(x-3)\dots\big(x-(n-1)\big).$$

Teorema 5 [5] Jika $x^{\underline{n}}$ merupakan bentuk polinomial faktorial turun, maka:

$$x.x^{\underline{n}} = x^{\underline{n+1}} + nx^{\underline{n}}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} x.x^{\underline{n}} &= x.x^{\underline{n}} - n.x^{\underline{n}} + n.x^{\underline{n}} \\ &= (x-n).x^{\underline{n}} + n.x^{\underline{n}} \\ &= x^{\underline{n+1}} + nx^{\underline{n}} \blacksquare. \end{aligned}$$

Berikut terdapat Teorema yang dapat mengubah bentuk polinomial menjadi polinomial faktorial turun.
Teorema 6 [5] Jika x^n adalah sebuah polinomial berderajat n dengan n adalah bilangan asli, maka:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}.$$

Bukti:
Diketahui hasil dari $\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$ dan $\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1$. Selanjutnya, x dapat dikonversikan ke dalam polinomial faktorial turun yaitu sebagai berikut:

$$x^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} x^{\underline{0}} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} x^{\underline{1}}.$$

Dari ilustrasi sebelumnya. Jika bentuk x^1 dapat ditulis juga sebagai x^{1+0} , maka dibuktikan untuk kasus $x^{r+1} = \sum_{k=0}^{r+1} \begin{Bmatrix} r+1 \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}$ adalah benar untuk $r > 0$ yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x^{r+1} &= x \cdot x^r \\ &= x\left(\sum_{k=0}^{r} \begin{Bmatrix} r \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \begin{Bmatrix} r \\ k \end{Bmatrix} [x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}] \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} \begin{Bmatrix} r \\ k-1 \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{r} \begin{Bmatrix} r \\ k \end{Bmatrix} kx^{\underline{k}} \\ &= \begin{Bmatrix} r \\ r \end{Bmatrix} x^{\underline{r+1}} + \left[\sum_{k=1}^{r} \begin{Bmatrix} r \\ k-1 \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} + \begin{Bmatrix} r \\ k \end{Bmatrix} kx^{\underline{k}}\right] + \begin{Bmatrix} r \\ 0 \end{Bmatrix} x^{\underline{0}} \\ &= x^{\underline{r+1}} + \sum_{k=0}^{r} \begin{Bmatrix} r+1 \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{r+1} \begin{Bmatrix} r+1 \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} \blacksquare. \end{aligned}$$

OPERATOR ANTIBEDA (Δ^{-1})

Operator antibeda mempunyai definisi sebagai berikut.
Definisi 7 *Jika diketahui $\Delta F(x) = 0$, maka $\Delta^{-1}(0) = F(x) = c$ untuk c adalah suatu konstanta. Selain itu, jika $\Delta F(x) = f(x)$, maka $\Delta^{-1} f(x) = F(x) + c$. Karena*

$$\Delta\Delta^{-1} f(x) = f(x)$$
$$\Delta^{-1}\Delta F(x) = F(x) + c$$

atau dapat juga ditulis $\Delta\Delta^{-1} = I$ tapi $\Delta^{-1}\Delta \neq I$. Operator Δ^{-1} dapat dihitung dengan:

$$\Delta^{-1} f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

terdapat contoh soal tentang antibeda yaitu.

Contoh 8 Tentukan hasil antibeda dari 6^x.
Penyelesaian:
Dengan menggunakan Definisi 7, maka:

$$\sum_{x=0}^{n-1} 6^x = 6^0 + 6^1 + 6^2 + \cdots + 6^{n-1}.$$

Diketahui bahwa bentuk deretnya sama dengan bentuk deret geometri yaitu:

$$\sum_{x=0}^{n-1} ar^x = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{ar^n}{r - 1} - \frac{a}{r - 1}.$$

Karena $-\frac{a}{r-1}$ merupakan konstanta, maka persamaannya dapat ditulis:

$$\frac{ar^n}{r - 1} + c.$$

Jadi, hasil dari :

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{n-1} 6^x = 6^0 + 6^1 + 6^2 + \cdots + 6^{n-1} &= \frac{6^n - 1}{6 - 1} \\ &= \frac{6^n}{5} + c.\end{aligned}$$

METODE GUPTA

Pada bagian ini dibahas tentang konstruksi dari Metode Gupta. Terdapat 2 operator yang digunakan dalam Metode Gupta yaitu operator geser (E) dan operator beda maju (Δ). Berikut dibahas teorema yang digunakan dalam konstruksi Metode Gupta.

Teorema 9 [6] Jika $f_n(x)$ adalah sebuah fungsi polinomial berderajat n di $x \in \mathbb{R}$, maka $\Delta^n f_n =$ konstanta dan $\Delta^{n+1} f_n(x) = 0$.

Bukti: Diberikan suatu fungsi polinomial berderajat n di $x \in \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_n(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n \tag{1}$$

dengan $p_0, p_1, \dots, p_n$ adalah konstanta dan x adalah variabel bebas, maka dibuktikan hasil dari $\Delta^n f_n(x) = c$ dengan c adalah suatu konstanta. Dengan menerapkan operator Δ pada Persamaan (1), maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= [p_0 + p_1(x + h) + p_2(x + h)^2 + \cdots + p_n(x + h)^n] - [p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \\ &\quad + \cdots + p_n x^n] \\ &= p_1 h + p_2[(x + h)^2 - x^2] + p_3[(x + h)^3 - x^3] + \cdots \\ &\quad + p_n[(x + h)^n - x^n] \\ &= p_1 h + p_2[C_1^2 xh + h^2] + p_3[C_1^3 x^2 h + C_2^3 x h^2 + h^3] + \cdots + p_n[C_1^n x^{n-1} h \\ &\quad + C_2^n x^{n-2} h^2 + \cdots + C_n^n h^n \\ &= t_1 + t_2 x + t_3 x^2 + \cdots + t_{n-1} x^{n-2} + n p_n h x^{n-1}\end{aligned} \tag{2}$$

dengan $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ adalah koefisien konstan. Selanjutnya, dengan menerapkan operator Δ pada Persamaan (2), maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) &= t_1 + t_2(x + h) + t_3(x + h)^2 + \cdots + t_{n-1}(x + h)^{n-2} + n p_n h (x + h)^{n-1} - [t_1 + t_2 x + \cdots \\ &\quad + n h p_n x^{n-1}] \\ &= t_2 h + t_3[(x + h)^2 - x^2] + \cdots + t_{n-1}[(x + h)^{n-2} - x^{n-2}] \\ &\quad + n h p_n[(x + h)^{n-1} - x^{n-1}] \\ &= t_2 h + t_3[C_1^2 h x + h^2] + \cdots + t_{n-1}[C_1^{n-2} x^{n-3} h + \cdots + C_{n-2}^{n-2} h^{n+2}] + n h p_n[C_1^{n-1} x^{n-2} h \\ &\quad + C_2^{n-1} x^{n-3} h^2 + \cdots + h^{n-1}] \\ &= s_2 + s_3 x + s_4 x^2 + \cdots + s_{n-1} x^{n-3} + n(n-1) h^2 p_n x^{n-2}\end{aligned} \tag{3}$$

dengan $s_2, s_3, s_4, \dots, s_{n-1}$ adalah koefisien konstan. Jika Persamaan (3) dilanjutkan sampai sebanyak

$\Delta^n f(x)$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x) &= (n)!\,h^n p_n \\ &= c. \end{aligned} \tag{4}$$

Karena n, h dan p_n adalah konstanta, maka c adalah suatu konstanta. Jadi, dengan menerapkan operator Δ pada Persamaaan (4), maka diperoleh $\Delta^{n+1}f(x) = c - c = 0$ ■.

Diberikan suatu persamaan beda linear tak homogen orde m yaitu:

$$\sum_{i=0}^{m} b_i E^{m-i} y(x) = a^x f_n\,(x) \tag{5}$$

dengan $x \in \mathbb{Z}^+$, E adalah suatu operator geser yang didefinisikan sebagai $Ey(x) = (1 + \Delta)y(x)$ atau $Ey(x) = y(x+1)$, $f_n(x)$ adalah fungsi polinomial berderajat n di x, a dan $b_i \in \mathbb{R}$ dengan $0 \le i \le m$, b_0, b_m dan $a \neq 0$ serta bilangan bulat $m \neq n$. Selanjutnya, dengan memisalkan:

$$y(x) = a^x u(x) \tag{6}$$

dan mensubstitusikannya ke Persamaan (5), maka diperoleh

$$\sum_{i=0}^{m} \left(b_i a^{(m-i)}\right) E^{m-i} u(x) = f_n\,(x).$$

Misalkan $b_i . a^{m-i} = q_i$ ($q_i =$ konstanta dan $0 \le i \le m$), maka diperoleh:

$$\sum_{i=0}^{m} q_i E^{m-i} u(x) = f_n\,(x). \tag{7}$$

Selanjutnya, dengan menerapkan ekspansi binomial ke dalam Persamaan (7), maka diperoleh:

$$c_0 \Delta^m u(x) + c_1(\Delta^{m-1})u(x) + c_2(\Delta^{m-2})u(x) + \cdots + c_m u(x) = f_n(x). \tag{8}$$

Misalkan $q_i . g_i = c_i$ ($c_i =$ konstanta dan $0 \le i \le m$), maka Persamaan (8) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum_{i=0}^{m} c_i \Delta^{m-i} u(x) = f_n\,(x) \tag{9}$$

dengan $c_0, c_m \neq 0$. Jika Persamaan (9) dioperasikan dengan operator Δ sampai sebanyak n kali dan dengan menggunakan Teorema 6, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\Delta^n u(x) &= \frac{\Delta^n f_n(x)}{c_m} \\ \Delta^{n+s} u(x) &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

dengan $s > 0$. Karena $m \neq n$, maka Persamaan (8) dapat ditulis ulang menjadi persamaan sebagai berikut:

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i \Delta^{n-i} u(x) = f_n\,(x). \tag{11}$$

Ketika $m > n$, maka $\Delta^{n+s}u(x) = 0$ untuk $s = m - n$. Sedangkan ketika $m < n$, maka koefisien dari $\Delta^{m+r}u(x)$ untuk $r = n - m$ pada Persamaan (11) adalah 0. Jadi $\beta_i = c_{i-n+m}$ dengan $0 \le i \le n$ ketika $m > n$ dan

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & 0 \le i \le n - m - 1, \\ c_{i-n+m}\,, & n - m \le i \le n \end{cases}$$

ketika $m < n$. Setelah itu asumsikan $\beta_n \neq 0$. Selanjutnya, operasikan kedua ruas pada Persamaan (11)

dengan operator Δ sampai sebanyak n kali, maka diperoleh:

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i \Delta^{n-i+n} u(x) = \Delta^n f_n(x). \quad (12)$$

Persamaan (12) memiliki solusi partikular karena $\Delta^n u(x) = \frac{\Delta^n f_n(x)}{\beta_n}, \Delta^{n+s} u(x) = 0$ dengan $0 < s \leq n$. Persamaan (12) dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$\beta_n \Delta^n u(x) = \Delta^n f_n(x)$$

$$\Leftrightarrow \beta_n \Delta^{n-j} u(x) = \Delta^{n-j} f_n(x) - \sum_{i=n-j}^{n-1} \beta_i \Delta^{2n-i-j} u(x), j = 0,1,2,..,n. \quad (13)$$

Dari Persamaan (13). Untuk $j = n$, maka diperoleh solusi partikular yaitu:

$$\Delta^0 u(x) = \frac{f_n(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \Delta^{n-i} u(x)}{\beta_n}.$$

CONTOH PENGGUNAAN METODE GUPTA DALAM MENENTUKAN SOLUSI PARTIKULAR PERSAMAAN BEDA LINEAR TAK HOMOGEN

Berikut adalah cara menentukan solusi partikular dari persamaan beda linear tak homogen dengan koefisien konstan dengan menggunakan Metode Gupta.

Contoh 10 Diberikan persamaan beda linear orde 2 yaitu sebagai berikut:

$$y(x+2) + y(x+1) - 12\, y(x) = x2^x. \quad (14)$$

Tentukan solusi partikular dari Persamaan (14) dengan menggunakan Metode Gupta.

Penyelesaian:

Berdasarkan Persamaan (6), maka $y(x) = 2^x u(x)$. Jika disubtitusikan ke dalam Persamaan (14), maka diperoleh:

$$4u(x+2) + 2u(x+1) - 12u(x) = x. \quad (15)$$

Dari Persamaan (15), jika mentransformasikan ruas kiri ke dalam bentuk operator Δ dengan menggunakan ekspansi binomial dan mengkonversi ruas kanan menjadi polinomial faktorial turun dengan menggunakan Teorema 6, maka diperoleh:

$$4\Delta^2 u(x) + 10\Delta u(x) - 6u(x) = x^{\underline{1}}$$

Selanjutnya, menyamakan orde dari persamaan beda linear dengan derajat tertinggi pada polinomial faktorial turun dengan mengambil deret pada ruas kiri sampai dengan orde 1, maka diperoleh:

$$10\Delta u(x) - 6u(x) = x^{\underline{1}}. \quad (16)$$

Dari Persamaan (16), diketahui: $\beta_0 = 10, \beta_1 = -6, f_1(x) = x^{\underline{1}}, \Delta f_1(x) = 1$, maka dengan menggunakan Persamaan (13), maka diperoleh solusi partikularnya yaitu:

$$u(x) = -\frac{x^{\underline{1}}}{6} - \frac{5}{18} \quad (17)$$

karena $y(x) = 2^x u(x)$, maka didapat solusi partikular dari Persamaan (14) yaitu:

$$y(x) = -2^x \left(\frac{x^{\underline{1}}}{6} + \frac{5}{18} \right)$$

Contoh 11 Diberikan persamaan beda linear orde 2 yaitu sebagai berikut:

$$y(x+2) - 2y(x+1) - 3\, y(x) = 3^x (x^2 + x). \quad (18)$$

Tentukan solusi partikular dari Persamaan (18) dengan menggunakan Metode Gupta.

Penyelesaian:

Berdasarkan Persamaan (6), maka $y(x) = 3^x u(x)$. Jika disubtitusikan ke dalam Persamaan (18), maka diperoleh:

$$9u(x+2) - 6u(x+1) - 3u(x) = x^2 + x. \quad (19)$$

Dari Persamaan (19), jika mentransformasikan ruas kiri ke dalam bentuk operator Δ dengan menggunakan ekspansi binomial dan mengkonversi ruas kanan menjadi polinomial faktorial turun dengan menggunakan Teorema 6, maka diperoleh:

$$9\Delta^2 u(x) + 12\Delta u(x) = 2x^{\underline{1}} + x^{\underline{2}}. \tag{20}$$

Karena pada Persamaan (20) nilai $\beta_2 = 0$, maka misalkan $\Delta u(n) = w(x)$ dan diperoleh:

$$0\Delta^2 w(x) + 9\Delta w(x) + 12w(x) = 2x^{\underline{1}} + x^{\underline{2}}. \tag{21}$$

Dari Persamaan (21), diketahui: $\beta_0 = 0, \beta_1 = 9, \beta_2 = 12, f_2(x) = 2x^{\underline{1}} + x^{\underline{2}}, \Delta f_2(x) = 2 + 2x^{\underline{1}}, \Delta^2 f_2(x) = 2$, maka dengan menggunakan rumus pada Persamaan (13) diperoleh:

$$w(x) = \frac{x^{\underline{2}}}{12} + \frac{x^{\underline{1}}}{24} - \frac{1}{32}. \tag{22}$$

Karena $\Delta u(x) = w(x)$, maka solusi partikularnya yaitu:

$$u(x) = \frac{x^{\underline{3}}}{36} + \frac{x^{\underline{2}}}{48} - \frac{x^{\underline{1}}}{32} + c \tag{23}$$

dengan c adalah suatu konstanta. Karena $y(x) = 3^x u(x)$, maka didapat solusi partikular dari Persamaan (18) yaitu:

$$y(x) = 3^x \left(\frac{x^{\underline{3}}}{36} + \frac{x^{\underline{2}}}{48} - \frac{x^{\underline{1}}}{32} + c \right).$$

PENUTUP

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan. Dapat disimpulkan bahwa:

1. Konstruksi Metode Gupta dimulai dari Persamaan:

$$\sum_{i=0}^{m} b_i E^{m-i} y(x) = a^x f_n(x).$$

Kemudian, dimisalkan $y(x) = a^x u(x)$. Selanjutnya persamaan ditransformasikan ke dalam operator beda maju. Kemudian, menyamakan orde dan derajat tertinggi pada kedua ruas. Selanjutnya, persamaan dioperasikan dengan operator beda maju sampai sebanyak n kali dan diperoleh:

$$\beta_n \Delta^{n-j} u(x) = \Delta^{n-j} f_n(x) - \sum_{i=n-j}^{n-1} \beta_i \Delta^{2n-i-j} u(x), j = 0,1,2,..,n.$$

Selanjutnya, didapat solusi partikular ketika $j = n$ yaitu:

$$\Delta^0 u(x) = \frac{f_n(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \Delta^{n-i} u(x)}{\beta_n}.$$

2. Dalam menyelesaikan persamaan beda linear tak homogen dengan Metode Gupta berawal dari bentuk persamaan beda linear tak homogen yaitu:

$$b_0 y(x+m) + b_1 y\big(x + (m-1)\big) + \cdots + b_m y(x) = a^x f_n(x).$$

Selanjutnya, persamaan dimisalkan dengan $y(x) = a^x u(x)$. Kemudian, persamaan ditransformasikan ke dalam bentuk operator beda maju dan mengubah fungsi polinomial menjadi polinomial faktorial turun. Selanjutnya, menyamakan orde dan derajat pada kedua ruas. Jika nilai $\beta_n = 0$, maka dimisalkan $\Delta^{0+i} u(x) = w(x)$, dengan mencari $\beta_{n-i} \neq 0$. Berikutnya selesaikan persamaan dengan Metode Gupta. Untuk solusi partikularnya adalah $w(x)$, maka harus ditransformasikan dengan antibeda sampai kembali menjadi $u(x)$ dan kemudian subtitusikan nilai $u(x)$ ke dalam permisalan $y(x)$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Elaydi S. *An Introduction to Difference Equations*.New York: Springer Science+Business Media, Inc; 2005.

[2]. Kelley WG, Peterson AC. *Difference Equations: An Introduction with Applications*.San Diego: Academic Press; 2001.

[3]. Gupta RC. *On Particular Solutions of Linear Difference*. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1998; 40: 680-684.

[4]. Bravo PS. *Problem-Solving Methods in Combinatorics*. London: Birkhauser; 2013.

[5]. Gleich D. *Finite Calculus: A Tutorial for Solving Nasty Sums*; 2005.

[6]. Gupta, Malik, Chauhan. *Calculus Of Finite Differences & Numerical Analysis*. India: Satyendra Rastogi "Mitra"; 2013.

FRANANTA MAHA : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak
frananta.maha@student.untan.ac.id

MARIATUL KIFTIAH : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak
kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

YUDHI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak
yudhi@math.untan.ac.id