Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 10, No. 3 (2021), hal 293-298.

BILANGAN *DIACHROMATIC* PADA GRAF BINTANG

Raventino, Nilamsari Kusumastuti, Fransiskus Fran

INTISARI

Pewarnaan lengkap pada suatu graf G adalah pewarnaan titik dengan syarat setiap pasangan warna muncul minimal satu kali pada G. Maksimum banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lengkap suatu graf tidak berarah G yang dinotasikan dengan $\psi(G)$ disebut bilangan achromatic. Pada penelitian ini dibahas perluasan dari bilangan achromatic yaitu bilangan diachromatic, khususnya bilangan diachromatic graf bintang berarah $K_{1,n}$. Graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf yang memuat satu titik pusat yang berderajat n dan bertetangga dengan n daun. Bilangan diachromatic yang dinotasikan dengan $dac(G)$, adalah maksimum banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lengkap suatu graf berarah G. Pada penelitian ini diperoleh bahwa banyaknya warna (dinotasikan w) yang dapat digunakan dalam pewarnaan lengkap graf berarah G adalah bilangan bulat yang memenuhi permutasi 2 dari w (P_2^w) yang tidak lebih dari atau sama dengan banyaknya sisi di graf G. Selain itu didapat bahwa bilangan diachromatic pada graf bintang berarah $K_{1,n}$ adalah $dac(K_{1,n}) = 2$.

Kata Kunci: *pewarnaan titik, pewarnaan lengkap, maksimum banyaknya warna.*

PENDAHULUAN

Teori graf adalah suatu ilmu matematika yang digunakan untuk memodelkan objek-objek tertentu yang direpresentasikan sebagai titik (simpul atau *vertex*) dan sisi (garis atau *edges*). Salah satu materi dalam teori graf yaitu pewarnaan graf. Tujuan awal pewarnaan graf yaitu untuk pewarnaan peta sedemikian sehingga setiap daerah yang berbatasan langsung mempunyai warna yang berbeda. Rahayuningsih [1] menyatakan bahwa pewarnaan peta dengan empat warna pertama kali diperkenalkan oleh A. F. Mobius. Pewarnaan pada suatu graf dibagi menjadi beberapa jenis yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Pada artikel ini, konsep pewarnaan yang digunakan yaitu pewarnaan titik. Salah satu pengembangan pewarnaan titik yaitu pewarnaan lengkap yang merupakan pewarnaan titik dengan syarat setiap pasangan warna harus muncul minimal satu kali [2].

Dalam pewarnaaan graf diperlukan suatu cara yang efektif untuk menentukan maksimum atau minimum banyaknya warna yang digunakan. Salah satu masalah dalam pewarnaan graf G yaitu menentukan minimum banyaknya warna yang dapat diterapkan pada graf G. Jumlah minimum warna yang dapat diterapkan pada graf tak berarah (graf berarah) G disebut bilangan kromatik (dikromatik), yang dinotasikan dengan $\chi(G)$ [3]. Maksimum banyaknya warna yang dapat diterapkan dalam pewarnaan lengkap suatu graf tak berarah (graf berarah) disebut bilangan *achromatic* (*diachromatic*) [2,4]. Bilangan *achromatic* pertama kali dibahas pada Harary [5] yang membahas hubungan bilangan *achromatic* dengan bilangan kromatik. Bilangan *achromatic* juga dibahas pada Edwards [2] yang membahas tentang bilangan *achromatic* dari koleksi *paths* dan *cycles*. Selanjutnya, pada Araujo-Pardo [4] dibahas pengembangan dari bilangan *achromatic* yaitu bilangan *diachromatic*.

Dalam penelitian ini dikaji konsep bilangan *diachromatic* untuk graf bintang berarah $\mathrm{K}_{1,n}$ dengan $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Graf bintang $\mathrm{K}_{1,n}$ adalah graf yang memuat satu titik pusat yang berderajat n dan bertetangga dengan n daun [6].

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan menetapkan pewarnaan lengkap pada graf, selanjutnya dikaji bilangan *diachromatic* secara umum. Graf khusus yang dibahas bilangan *diachromatic*-nya yaitu pada graf bintang berarah $\mathrm{K}_{1,n}$. Setelah itu, ditetapkan minimal 2 warna yang dapat diterapkan di graf bintang berarah $\mathrm{K}_{1,n}$. Kemudian banyaknya warna tersebut ditambahkan 1 secara bertahap sampai didapatkan bahwa banyaknya warna tidak memenuhi pewarnaan lengkap. Akhirnya didapatkan bilangan *diachromatic* pada graf bintang berarah $\mathrm{K}_{1,n}$ yaitu banyaknya warna yang tidak memenuhi pewarnaan lengkap setelah ditambah 1 secara bertahap nilainya dikurangin 1.

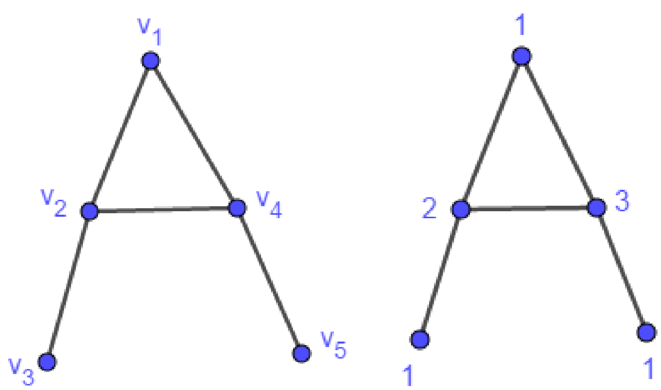
BILANGAN *DIACHROMATIC*

Untuk menentukan bilangan *diachromatic* pada suatu graf, terlebih dahulu diberikan pewarnaan titik pada Definisi 1 dan pewarnaan lengkap pada Definisi 3. Selanjutnya, diberikan Definisi 5 yaitu bilangan *diachromatic* pada suatu graf.

Definisi 1 [7] *Pewarnaan titik adalah suatu pemberian warna pada titik-titik di graf sedemikian sehingga setiap dua titik yang saling bertetangga mempunyai warna yang berbeda.*

Pada Contoh 2 diberikan ilustrasi pewarnaan titik untuk suatu graf.

Contoh 2 Graf G_1 dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_4)$, $e_3 = (v_2, v_4)$, $e_4 = (v_2, v_3)$, dan $e_5 = (v_4, v_5)$. Graf G_1 dapat direpresentasikan pada Gambar 1.



(a) (b)

Gambar 1 (a) Graf G_1 yang belum diwarnai dan (b) Graf G_1 yang sudah diwarnai

Berdasarkan Gambar 1 (a) terlihat bahwa graf tersebut belum diwarnai dan memuat *cycle* dengan tiga titik, selanjutnya diterapkan pewarnaan titik pada graf tersebut sesuai syarat pewarnaan titik. Pewarnaan titik mensyaratkan bahwa dua titik yang saling bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Karena graf G_1 memuat *cycle* dengan tiga titik, maka minimal graf tersebut dapat diwarnai oleh tiga warna. Hasil pewarnaan titik untuk graf G_1 pada Gambar 1 (a) dapat dilihat pada gambar Gambar 1 (b) yaitu titik v_1 diwarnai dengan warna 1, titik v_2 diwarnai dengan warna 2, titik v_3 diwarnai dengan warna 1, titik v_4 diwarnai dengan warna 3, dan titik v_5 diwarnai dengan warna 1.

Pasangan warna yang diperoleh dengan melihat pada Contoh 2 yaitu (1,2), (1,3), dan (2,3). Selanjutnya, misal diberikan graf G dengan $V(G) = \{a, b\}$ dan $E(G) = \{(a, b), (b, a)\}$. Jika (a, b) adalah pasangan warna, maka untuk graf tak berarah G didapatkan $(a, b) = (b, a)$ yang artinya pasangan warna (a, b) sama dengan pasangan warna (b, a). Sedangkan untuk graf berarah G didapatkan $(a, b) \neq (b, a)$ yang artinya pasangan warna (a, b) tidak sama dengan pasangan warna (b, a).

Salah satu pengembangan dari pewarnaan titik yaitu pewarnaan lengkap. Pewarnaan lengkap merupakan pewarnaan titik dengan suatu syarat tambahan. Penjelasan lebih lanjut diberikan Definisi 3 dan Contoh 4.

Definisi 3 [3] *Diberikan suatu graf sederhana G, maka pewarnaan lengkap dari graf G adalah pewarnaan titik dengan syarat setiap pasangan warna muncul minimal satu kali pada graf G.*

Contoh 4 Diberikan graf G_2 yang diperlihatkan pada Gambar 2.

(a) (b)

Gambar 2 (a) Graf tak berarah G_2 yang sudah diwarnai dan (b) Graf berarah G_2 yang sudah diwarnai

Berdasarkan pada Gambar 2 (a) dan (b) terdapat 3 titik yang perlu diwarnai. Dari definisi pewarnaan titik, maka setiap titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Akibatnya warna yang dibutuhkan ada 2 jenis. Dimisalkan pasangan 2 jenis warna adalah (1,2) dan (2,1). Banyaknya warna yang dapat diterapkan untuk pewarnaan lengkap suatu graf dinotasikan dengan w.

Berdasarkan Gambar 2 (a), $|E(G_2)| = 2$. Oleh karena pada pewarnaan lengkap, setiap pasangan warna harus muncul, maka kemungkinan banyaknya pasangan warna yaitu kombinasi 2 dari w (C_2^w) harus lebih kecil dari banyaknya sisi pada suatu graf tidak berarah atau $C_2^w \leq |E(G_2)|$. Didapat,

$$C_2^w \leq 2 \Leftrightarrow \frac{w(w-1)}{2} \leq 2$$
$$\Leftrightarrow w(w-1) \leq 4. \quad (1)$$

Jadi nilai w terbesar yang memenuhi Pertidaksamaan (1) adalah $w = 2$. Artinya graf pada Gambar 2 (a) hanya dapat diwarnai dengan pewarnaan lengkap oleh 2 warna.

Berdasarkan Gambar 2 (b), $|E(G_2)| = 2$. Oleh karena pada pewarnaan lengkap, setiap pasangan warna harus muncul, maka kemungkinan banyaknya pasangan warna yaitu permutasi 2 dari w (P_2^w) harus lebih kecil dari banyaknya sisi pada suatu graf berarah atau $P_2^w \leq |E(G_2)|$. Didapat,

$$P_2^w \leq 2$$
$$\Leftrightarrow w(w-1) \leq 2 \quad (2)$$

Jadi nilai w terbesar yang memenuhi Pertidaksamaan (2) adalah $w = 2$. Artinya graf pada Gambar 2 (b) hanya dapat diwarnai dengan pewarnaan lengkap oleh 2 warna.

Pengembangan dari bilangan *achromatic* yaitu bilangan *diachromatic*. Maksud dari pengembangannya yaitu dengan menambah orientasi arah pada graf yang akan dicari bilangan *achromatic*-nya. Penjelasan lebih lanjut diberikan definisi 5.

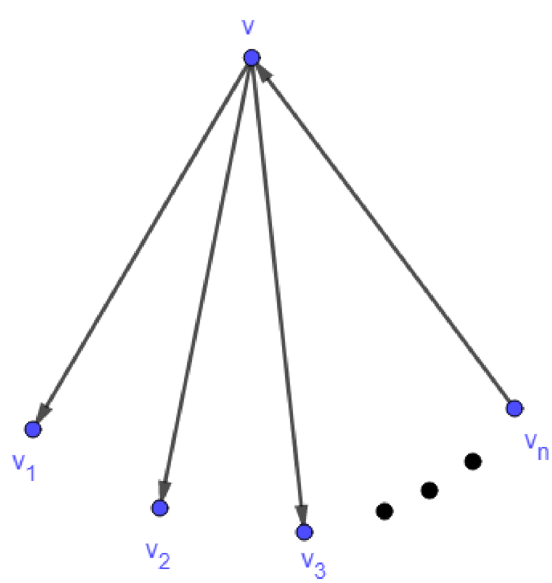
Definisi 5 [5] *Maksimum banyaknya warna yang digunakan dalam pewarnaan lengkap graf berarah G disebut bilangan diachromatic yang dilambangkan dengan $dac(G)$.*

Dari Definisi 5 dan berdasarkan Contoh 4 Gambar 2 (b) dapat ditentukan bilangan *diachromatic* pada graf tersebut. Sesuai definisi bilangan *diachromatic*, maka dicari w yang dapat diterapkan pada graf. Jadi didapatkanlah bilangan *diachromatic* pada Gambar 2 (b) adalah 2, dengan kata lain $dac(G_2) = 2$.

BILANGAN *DIACHROMATIC* PADA GRAF BINTANG BERARAH $K_{1,n}$

Graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf yang memuat $n+1$ titik dan n sisi. Artinya $V(K_{1,n}) = \{v, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan $E(K_{1,n}) = \{(v, v_i) | \ i = 1,2, \dots, n\}$, dengan v titik pusat graf berderajat n dan v_i merupakan daun. Suatu graf dikatakan graf berarah jika sisi-sisinya mempunyai orientasi arah. Sisi pada graf berarah disebut busur (*arc*). Banyaknya busur yang keluar dari suatu titik v disebut derajat keluar (*outdegree*), $d_{out}(v)$. Banyaknya busur yang masuk dari suatu titik v disebut derajat masuk (*indegree*), $d_{in}(v)$.

Graf bintang $K_{1,n}$ yang dikaji mempunyai orientasi arah. Akibatnya orientasi arah di dalam graf bintang $K_{1,n}$ mempunyai kemungkinan yaitu $d_{in}(v) = 0$ dan $d_{out}(v) \neq 0$ atau $d_{in}(v) \neq 0$ dan $d_{out}(v) = 0$ atau $d_{in}(v) \neq 0$ dan $d_{out}(v) \neq 0$. Oleh karena bilangan *diachromatic* berkaitan dengan pewarnaan lengkap yaitu didalamnya mensyaratkan setiap pasangan warna yang ada harus muncul dalam pewarnaan graf tersebut, maka akibatnya pada kondisi $d_{in}(v) = 0$ dan $d_{out}(v) \neq 0$ atau $d_{in}(v) \neq 0$ dan $d_{out}(v) = 0$ tidak mempunyai bilangan *diachromatic*. Oleh karena itu, orientasi arah sisi graf bintang $K_{1,n}$ yang dianalisis yaitu $d_{in}(v) \neq 0$ dan $d_{out}(v) \neq 0$. Graf bintang $K_{1,n}$ dapat direpresentasikan pada Gambar 3.



Gambar 3 Graf Bintang berarah $K_{1,n}$

Bilangan *diachromatic* pada graf bintang berarah $\mathrm{K}_{1,n}$ dapat dicari dengan terlebih dahulu menerapkan pewarnaan lengkap pada graf tersebut. Selanjutnya dicari maksimum banyaknya warna yang dapat diterapkan dalam graf bintang berarah $\mathrm{K}_{1,n}$.

Berdasarkan Definisi 3 dan Contoh 4 Gambar 1 (b), maka dapat diperoleh Lema 6.

Lema 6 *Banyaknya warna yang dapat digunakan dalam pewarnaan lengkap graf berarah G memenuhi $P_2^w \leq |E(G)|$.*

Bukti: Andaikan $P_2^w > |E(G)|$, dengan $|E(G)|$ adalah banyaknya sisi graf G dan w adalah banyaknya warna yang dapat diterapkan di graf berarah G dengan pewarnaan lengkap. Akibatnya ada pasangan warna yang mungkin tidak muncul pada sisi graf berarah G. Hal ini kontradiksi dengan definisi dari pewarnaan lengkap yaitu setiap pasangan warna harus muncul pada graf berarah G paling tidak satu kali. Jadi pengandaian awal salah, oleh karena itu Banyaknya warna yang dapat digunakan dalam pewarnaan lengkap graf berarah G memenuhi $\mathrm{P}_2^{\mathrm{w}} \leq |\mathrm{E}(G)|$. ■

Setelah diberikan Lema 6, selanjutnya diberikan Teorema 7 mengenai bilangan *diachromatic* pada graf bintang bearah $\mathrm{K}_{1,n}$.

Teorema 7 *Jika graf bintang $\mathrm{K}_{1,n}$ dengan $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ adalah graf berarah dan memiliki orientasi arah untuk titik pusat v memenuhi $d_{in}(v) \neq 0$ dan $d_{out}(v) \neq 0$, maka $dac(\mathrm{K}_{1,n}) = 2$.*

Bukti: Diberikan graf bintang $\mathrm{K}_{1,\mathrm{n}}$ dengan $\mathrm{n} \geq 2$, $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$. Orientasi arah graf $\mathrm{K}_{1,\mathrm{n}}$ untuk titik pusat v memenuhi $d_{in}(v) \neq 0$ dan $d_{out}(v) \neq 0$, akibatnya paling tidak graf $\mathrm{K}_{1,\mathrm{n}}$ dapat diwarnai dengan pewarnaan lengkap menggunakan 2 warna. Jadi $dac(K_{1,n}) \geq 2$. Selanjutnya, misalkan $N = \{1,2,3\}$ adalah himpunan warna yang dapat diterapkan pada graf bintang $\mathrm{K}_{1,n}$. Jika titik pusat graf $\mathrm{K}_{1,n}$ diwarnai dengan warna jenis 1. Hal tersebut mengakibatkan daun-daun graf bintang $\mathrm{K}_{1,n}$ yang berjumlah n titik diwarnai dengan warna jenis 2 ataupun 3. Karena setiap daun-daun yang ada pada graf $\mathrm{K}_{1,n}$ tidak saling bertetangga, mengakibatkan pasangan warna (2,3) ataupun (3,2) tidak dapat muncul. Jadi dapat disimpulkan bahwa graf bintang $\mathrm{K}_{1,n}$ tidak dapat diwarnai dengan 3 jenis warna. Oleh karena itu, $dac(K_{1,n}) \leq 2$. Karena $dac(K_{1,n}) \geq 2$ dan $dac(K_{1,n}) \leq 2$ maka mengakibatkan $dac(K_{1,n}) = 2$.■

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang dibahas dapat diperoleh beberapa kesimpulan,

1. Banyaknya warna yang dapat digunakan dalam pewarnaan lengkap graf berarah G adalah bilangan bulat terbesar yang memenuhi $\mathrm{P}_2^{\mathrm{w}} \leq |\mathrm{E}(G)|$.
2. Jika graf bintang $\mathrm{K}_{1,n}$ dengan $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ adalah graf berarah dan memiliki orientasi arah diberikan titik pusat v, $d_{in}(v) \neq 0$ dan $d_{out}(v) \neq 0$, maka $dac(\mathrm{K}_{1,n}) = 2$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Rahayuningsih, S. *Teori Graph dan Penerapannya*. Universitas Wisnuwardhana Press Malang (Unidha Press), Malang, Jawa Timur. 2018.

[2] Edwards, K.J. Achromatic Number of Collections of Paths and Cycles. *Discrete Math*.. 2013. 313:1856–1860.

[3] Neumann-Lara, V. The Dichromatic Number of a Digraph. *Journal Combinatorial Theory*. 1982. 33:265–270.

[4] Araujo-Pardo, G., Montellano-Ballesteros, J.J., Rubio-Montiel, C., Olsen, M. The diachromatic number of digraphs. *arXiv:1712.00495*. 2017. Accessed: Feb. 2, 2020.
[5] Harary, F. and Hedetniemi, S. The Achromatic Number of a Graph. *Journal Of Combinatorial Theory*., 1970, 8:154-161.
[6] Kaloko, I. and Ahyaningsih, F. Pelabelan Graceful pada Graf Superstar. *Karismatika*.. 2016. 2:20-28.
[7] Munir, R. *Matematika Diskret.* Ed ke-3, Informatika Bandung. Bandung. 2010.

RAVENTINO : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, raventino@student.untan.ac.id
NILAMSARI KUSUMASTUTI : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, nilamsari@math.untan.ac.id
FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, fransiskusfran@math.untan.ac.id