Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 10, No. 2 (2021), hal 219 – 228.

PELABELAN *GRACEFUL* DAN SKOLEM *GRACEFUL* PADA GRAF U-BINTANG DAN GRAF $S_n, 3$

Muhammad Ilyas, Yundari, Meliana Pasaribu

INTISARI

Pelabelan pada graf adalah sebarang fungsi yang menghubungkan unsur-unsur pada graf (titik atau sisi) dengan suatu bilangan (biasanya bilangan bulat tak negatif). Diberikan graf G dengan jumlah titik sebanyak $|V(G)|$ dan jumlah sisi sebanyak $|E(G)|$. Pelabelan graceful pada graf $G = (V(G), E(G))$ adalah fungsi injektif f dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan $\{0,1,2,\ldots,|E(G)|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif f dari himpunan sisi $E(G)$ ke himpunan $\{1,2,\ldots,|E(G)|\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $uv \in E(G)$ dengan $u, v \in V(G)$ berlaku $f(uv) = |f(u) - f(v)|$. Sedangkan pelabelan skolem graceful merupakan modifikasi dari pelabelan graceful. Graf yang memiliki pelabelan graceful atau skolem graceful berturut-turut disebut graf graceful atau graf skolem graceful. Graf yang digunakan dalam penelitian ini yaitu graf U-bintang dan graf $S_n, 3$. Graf U-bintang diperoleh dari amalgamasi titik pada graf P_4 yang dimodifikasi sehingga membentuk graf U dengan dua graf bintang S_n dimana setiap titik berderajat satu pada graf U merupakan pusat graf bintang S_n. Tujuan dari penelitian ini yaitu mengkonstruksi pelabelan graceful dan skolem graceful pada graf U-bintang $(U(S_n))$ dan graf $S_n, 3$. Penelitian dimulai dengan membentuk graf U-bintang $(U(S_n))$ dan graf $S_n, 3$. Kemudian graf tersebut dilabeli dengan pelabelan graceful dan skolem graceful. Pada penelitian ini diperoleh bahwa graf U-bintang dan graf $S_n, 3$ merupakan graf graceful dan graf skolem graceful. Selain itu juga diperoleh pola pelabelan graceful dan skolem graceful pada graf U-bintang $(U(S_n))$ dan graf $S_n, 3$.

Kata kunci: *graf bintang, graceful dan skolem graceful*

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan topik penelitian yang saat ini mendapatkan banyak perhatian. Hal itu karena teori graf memiliki peranan yang cukup luas dalam berbagai sektor terutama sektor komunikasi, transportasi, pemancar frekuensi radio, penyimpanan data komputer dan lain sebagainya. Salah satu topik yang menarik dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan graf adalah sebarang fungsi yang menghubungkan unsur-unsur pada graf (titik atau sisi) dengan suatu bilangan (biasanya bilangan bulat tak negatif) [1]. Dalam penelitian ini, jenis pelabelan yang digunakan yaitu pelabelan *graceful* dan pelabelan skolem *graceful*. Pelabelan *graceful* pertama kali diperkenalkan oleh Rosa pada tahun 1967 dengan sebutan pelabelan β (β *labellings*). Kemudian pada tahun 1972, Golomb menamakan pelabelan tersebut dengan sebutan pelabelan *graceful* [2].

Pada [3] telah dibuktikan bahwa graf $S_n, 3$ memiliki pelabelan *graceful* dan skolem *graceful*. Namun pola pelabelan yang diperoleh masih bersifat khusus dan hanya berlaku untuk titik-titik tertentu. Oleh karena itu, peneliti mencoba mengeneralisasikannya menjadi pola yang bersifat lebih umum. Selain itu, pada [4] juga telah dikonstruksi pelabelan *graceful*, skolem *graceful* dan pelabelan *rho* topi pada kelas graf baru, yaitu graf A-bintang dan graf H-bintang. Graf A-bintang adalah suatu graf yang dibangun dari beberapa graf bintang S_n, kemudian diberikan graf berbentuk huruf A besar dimana untuk setiap titik berderajat satu pada graf A merupakan pusat dari graf bintang S_n. Sedangkan graf H-bintang adalah suatu graf yang dibangun dari beberapa graf bintang S_n, kemudian diberikan suatu graf berbentuk huruf H besar dimana untuk setiap titik berderajat satu pada graf H merupakan pusat dari graf bintang S_n.

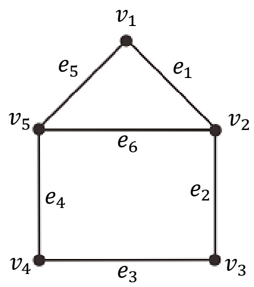
Graf yang digunakan dalam penelitian ini yaitu graf U-bintang $(U(S_n))$ dengan $n \geq 2$ dan graf $S_n, 3$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Graf U-bintang $(U(S_n))$ merupakan graf baru yang diperoleh dari hasil amalgamasi titik antara graf U dengan 2 graf bintang (S_n), dimana setiap titik berderajat satu pada graf U merupakan pusat dari graf bintang (S_n). Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksi pelabelan *graceful* dan skolem *graceful* pada graf U-bintang ($U(S_n)$) dan graf $S_n, 3$. Penelitian dimulai dengan mengkaji berbagai literatur yang menunjang penelitian ini. Kemudian, penelitian dilanjutkan dengan membentuk graf U-bintang ($U(S_n)$) dan graf $S_n, 3$ serta melabeli graf tersebut dengan pelabelan *graceful* dan skolem *graceful*.

DEFINISI DAN TERMINOLOGI GRAF

Sebelum membahas pelabelan *graceful* dan skolem *graceful*, terlebih dahulu diberikan definisi graf, orde, ukuran, *incident* (terkait langsung), *adjacent* (terhubung langsung) dan amalgamasi titik yang kemudian dijadikan dasar untuk pembahasan selanjutnya.

Definisi 1 [5] *Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ ditulis dengan notasi $G = (V(G), E(G))$, yang dalam hal ini $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (vertices atau node) dan $E(G)$ adalah himpunan sisi (edges) yang menghubungkan sepasang titik.*
Berdasarkan Definisi 1, diberikan contoh graf G sebagai berikut.

Contoh 2 Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_4$, $e_4 = v_4v_5$, $e_5 = v_1v_5$, $e_6 = v_2v_5$, sehingga diperoleh graf pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1 Graf G

Pembahasan selanjutnya adalah mengenai orde, ukuran, *adjacent*, *incident* dan amalgamasi titik yang dituangkan dalam Definisi 3, Definisi 4 dan Definisi 5 sebagai berikut.

Definisi 3 [6] *Diberikan graf G. Banyaknya titik pada graf G disebut orde dan banyaknya sisi pada graf G disebut ukuran. Orde dari graf G dinotasikan dengan $|V(G)|$ dan ukuran dari graf G dinotasikan dengan $|E(G)|$.*
Berdasarkan Gambar 1, diperoleh $|V(G)| = 5$ dan $|E(G)| = 6$.

Definisi 4 [7] *Diberikan dua titik v_i dan v_j dengan $i, j \in \mathbb{N}$. Dua titik v_i dan v_j dikatakan terhubung langsung (adjacent) jika titik v_i dan v_j dihubungkan oleh sebuah sisi e. Sedangkan sisi e dikatakan terkait langsung (incident) dengan titik v_i dan titik v_j jika e menghubungkan kedua titik tersebut, dengan kata lain $e = (v_iv_j)$.*
Berdasarkan Gambar 1, misalkan diambil titik v_1 dan v_2 dan diambil sisi e_1. Diperoleh bahwa titik v_1 dan v_2 disebut *adjacent*, sedangkan e_1 *incident* dengan titik v_1 dan v_2.

Definisi 5 [8] *Amalgamasi titik dari pasangan titik $u \in V(H)$ bersama titik $v \in V(I)$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan titik u dan v menjadi satu titik. Notasi yang digunakan untuk menyatakan operasi amalgamasi adalah* " $*$ ".
Operasi amalgamasi merupakan salah satu cara yang dapat dilakukan untuk membentuak sebuah graf baru.

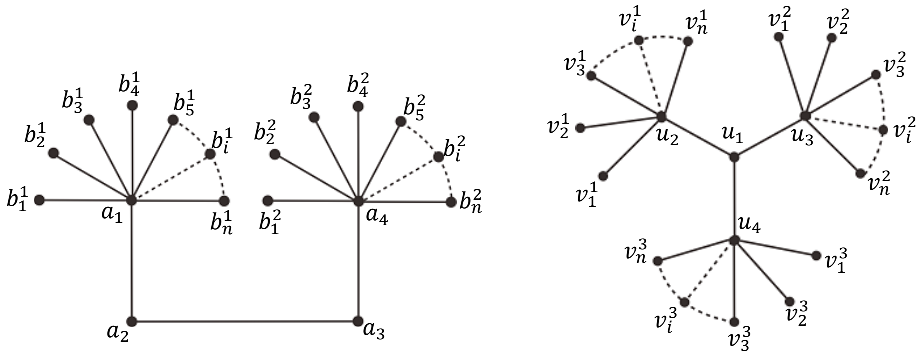
PELABELAN *GRACEFUL* DAN SKOLEM *GRACEFUL* PADA GRAF U-BINTANG DAN GRAF $S_n, 3$

Sebelum membahas pelabelan *graceful* dan skolem *graceful* pada graf U-bintang dan graf $S_n, 3$, terlebih dahulu diberikan definisi graf U-bintang, graf $S_n, 3$, pelabelan *graceful* dan pelabelan skolem *graceful* pada Definisi 6, Definisi 7, Definisi 8 dan Definisi 9 berikut.

Definisi 6 *Graf U-bintang adalah graf yang diperoleh dari amalgamasi titik graf P_4 yang dimodifikasi sehingga membentuk graf U dengan 2 graf bintang (S_n) dimana setiap titik berderajat satu pada graf U merupakan pusat dari graf bintang (S_n).*

Definisi 7 [3] *Graf $S_n, 3$ adalah suatu graf yang dibangun dari 3 graf bintang (S_n) kemudian diberikan titik u_1 disebut dengan titik pusat graf dan diberikan sisi yang menghubungkan setiap titik pada pusat graf bintang (S_n) dengan titik u_1.*

Bentuk graf U-bintang ($U(S_n)$) dan graf $S_n, 3$ secara berturut-turut dapat dilihat pada Gambar 2 berikut.



(a) (b)

Gambar 2 (a) Graf U-bintang ($U(S_n)$), (b) Graf $S_n, 3$

Berdasarkan Gambar 2, diperoleh bahwa graf U-bintang ($U(S_n)$) memiliki titik sebanyak $2n + 4$ dan sisi sebanyak $2n + 3$. Sedangkan graf $S_n, 3$ memiliki titik sebanyak $3n + 4$ dan sisi sebanyak $3n + 3$.

Definisi 8 [4] *Pelabelan graceful pada graf $G = (V(G), E(G))$ adalah fungsi injektif f dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan $\{0,1,2, \dots, |E(G)|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif f dari himpunan sisi $E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2, \dots, |E(G)|\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $uv \in E(G)$ dengan $u, v \in V(G)$ berlaku $f(uv) = |f(u) - f(v)|$.*

Sedangkan definisi pelabelan skolem *graceful* diberikan pada Definisi 9 berikut.

Definisi 9 [4] *Pelabelan skolem graceful adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif g dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |V(G)|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif g dari himpunan sisi $E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2, \dots, |E(G)|\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $uv \in E(G)$ dengan $u, v \in V(G)$ berlaku $g(uv) = |g(u) - g(v)|$.*

Berdasarkan Gambar 2, graf U-bintang ($U(S_n)$) dan graf $S_n, 3$ dapat dikonstruksi menjadi graf *graceful* dan graf skolem *graceful* yang dituangkan dalam teorema-teorema berikut.

Teorema 10 Graf U-bintang $\big(U(S_n)\big)$ dengan $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ adalah graf *graceful*.

Bukti Diberikan graf U-bintang $\big(U(S_n)\big)$ untuk $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Gambar 2, diketahui $V\big(U(S_n)\big) = \{a_j, b_i^1, b_i^2 | 1 \leq j \leq 4, 1 \leq i \leq n\}$ dan $E\big(U(S_n)\big) = \{a_m a_{m+1}, a_1 b_i^1, a_4 b_i^2 | 1 \leq m \leq 3, 1 \leq i \leq n\}$. Selain itu, diketahui bahwa graf U-bintang ($U(S_n)$) memiliki titik sebanyak $2n + 4$ dan sisi sebanyak $2n + 3$. Didefinisikan pola pelabelan *graceful* pada graf $U(S_n)$ sebagai berikut.

$f(a_1) = 0$
$f(a_2) = 2n + 2$

$f(a_3) = n$
$f(a_4) = 1$
$$f(b_i^1) = \begin{cases} 2n+3, & jika\ i = 1, i = 1,2,\dots,n \\ 2n+3-i, & jika\ i > 1, i = 1,2,\dots,n \end{cases}$$
$$f(b_i^2) = \begin{cases} n + \binom{2}{i}, & jika\ i \leq 2, i = 1,2,\dots,n \\ n-(i-2), & jika\ i > 2, i = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

1. Akan dibuktikan setiap $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, fungsi f memetakan $V\big(U(S_n)\big)$ ke $\{0, 1, 2, \dots, |E\big(U(S_n)\big)|\}$

a. Untuk titik a_1, a_2, a_3 dan a_4
Diketahui $f(a_1) = 0, f(a_2) = 2n+2, f(a_3) = n$ dan $f(a_4) = 1$ sehingga untuk setiap $n \geq 2$ maka titik a_1, a_2, a_3 dan a_4 selalu dipetakan pada salah satu elemen $\{0, 1, 2, \dots, 2n+3\}$.

b. Untuk titik b_i^1 dengan $i = 1, 2, \dots, n$
Diketahui $f\big(b_i^1\big) = 2n+3$ untuk $i = 1$ dan $f\big(b_i^1\big) = 2n+3-i$ untuk $i > 1$.
Kasus 1: $i = 1$
Karena $n \geq 2$, maka jelas titik b_i^1 selalu dipetakan ke $\{0, 1, 2, \dots, 2n+3\}$
Kasus 2: $i > 1$
Karena $i > 1$ dan $n \geq 2$, maka $2 \leq n < 2n+3-i < 2n+3$. Selain itu $0 < 2$, akibatnya $0 < 2n+3-i < 2n+3$. Sehingga diperoleh $0 < f\big(b_i^1\big) < 2n+3$.

c. Untuk titik b_i^2 dengan $i = 1, 2, \dots, n$
Diketahui $f\big(b_i^2\big) = n + \binom{2}{i}$ untuk $i \leq 2$ dan $f\big(b_i^2\big) = n-(i-2)$ untuk $i > 2$.
Kasus 1: $i \leq 2$
Karena $i \leq 2$ dan $n \geq 2$, maka $n \leq n + \binom{2}{i} \leq 2n$. Selain itu $0 < n$ dan $2n < 2n+3$, akibatnya $0 < n + \binom{2}{i} < 2n+3$. Sehingga diperoleh $0 < f\big(b_i^2\big) < 2n+3$.
Kasus 2: $i > 2$
Karena $i > 2$ dan $n \geq 2$, maka $2 \leq n-(i-2) < n$. Selain itu $0 < 2$ dan $n < 2n+3$, akibatnya $0 < n-(i-2) < 2n+3$. Sehingga diperoleh $0 < f\big(b_i^2\big) < 2n+3$.

Dengan demikian, terbukti bahwa fungsi f memetakan $V\big(U(S_n)\big)$ ke $\{0, 1, 2, \dots, |E\big(U(S_n)\big)|\}$.

2. Akan dibuktikan bahwa f merupakan fungsi injektif

a. Untuk titik a_2 dan a_3
Diketahui $f(a_2) = 2n+2$ dan $f(a_3) = n$ dengan $n \geq 2$. Berdasarkan pola pelabelan *graceful* yang didefinisikan pada titik a_2 dan a_3, maka terlihat bahwa titik a_2 dan a_3 memiliki tepat satu pasangan dalam $\{0, 1, 2, \dots, 2n+3\}$.

b. Untuk titik b_i^1
Diketahui $f\big(b_i^1\big) = 2n+3$ untuk $i = 1$ dan $f\big(b_i^1\big) = 2n+3-i$ untuk $i > 1$.
Kasus 1: $i = 1$
Berdasarkan pola pelabelan *graceful* yang didefinisikan pada titik b_1^1, maka terlihat bahwa titik b_1^1 memiliki tepat satu pasangan pada $\{0, 1, 2, \dots, 2n+3\}$
Kasus 2: $i > 1$
Ambil sebarang titik $b_i^1, b_k^1 \in V(U(S_n))$ dengan $f(b_i^1) = f(b_k^1)$. Definisikan $f(b_i^1) = 2n+3-i$ dan $f(b_k^1) = 2n+3-k$. Karena $f(b_i^1) = f(b_k^1)$ maka $2n+3-i = 2n+3-k$, akibatnya $i = k$. Karena $i = k$ maka dapat disimpulkan bahwa $b_i^1 = b_k^1$.

c. Untuk titik b_i^2

Diketahui $f\left(b_i^2\right) = n + \binom{2}{i}$ untuk $i \leq 2$ dan $f\left(b_i^2\right) = n - (i-2)$ untuk $i > 2$. Ambil sebarang titik $b_i^2, b_k^2 \in V(U(S_n))$ dengan $f(b_i^2) = f(b_k^2)$.

Kasus 1: $i \leq 2$

Definisikan $f(b_i^2) = n + \binom{2}{i}$ dan $f(b_k^2) = n + \binom{2}{k}$. Karena $f(b_i^2) = f(b_k^2)$ maka $n + \binom{2}{i} = n + \binom{2}{k}$, akibatnya diperoleh $i = k$. Karena $i = k$ maka dapat disimpulkan bahwa $b_i^2 = b_k^2$.

Kasus 2: $i > 2$

Definisikan $f(b_i^2) = n - (i-2)$ dan $f(b_k^2) = n - (k-2)$. Karena $f(b_i^2) = f(b_k^2)$ maka $n - (i-2) = n - (k-2)$, akibatnya diperoleh $i = k$. Karena $i = k$ maka dapat disimpulkan bahwa $b_i^2 = b_k^2$.

Berdasarkan a, b dan c maka terbukti bahwa f merupakan fungsi injektif.

3. Akan dibuktikan bahwa f merupakan fungsi bijektif

Diketahui bahwa sisi pada graf $U(S_n)$ adalah $a_m a_{m+1}$, $a_1 b_i^1$ dan $a_4 b_i^2$ dengan $m = 1, 2, 3$ dan $i = 1, 2, \ldots, n$. Selain itu diketahui bahwa himpunan sisi $E(U(S_n))$ dipetakan ke $\{1, 2, \ldots, 2n+3\}$. Untuk membuktikan bahwa f merupakan fungsi bijektif, maka perlu dibuktikan bahwa f merupakan fungsi injektif sekaligus fungsi surjektif.

a. Akan dibuktikan bahwa f merupakan fungsi injektif

1) Untuk sisi $a_m a_{m+1}$ dengan $m = 1, 2$ dan 3

Didefinisikan pelabelan *graceful* pada sisi $a_m a_{m+1}$ adalah $f(a_m a_{m+1}) = |f(a_m) - f(a_{m+1})|$ untuk setiap $m = 1, 2, 3$.

Kasus 1: $m = 1$

$$\begin{aligned} f(a_1a_2) &= |f(a_1) - f(a_2)| \\ &= |0 - (2n+2)| \\ &= 2n+2 \end{aligned}$$

Kasus 2: $m = 2$

$$\begin{aligned} f(a_2a_3) &= |f(a_2) - f(a_3)| \\ &= |(2n+2) - (n)| \\ &= n+2 \end{aligned}$$

Kasus 3: $m = 3$

$$\begin{aligned} f(a_3a_4) &= |f(a_3) - f(a_4)| \\ &= |(n) - 1| \\ &= n-1 \end{aligned}$$

Berdasarkan pola pelabelan yang didefinisikan pada sisi a_1a_2, a_2a_3 dan a_3a_4, maka terlihat bahwa sisi a_1a_2, a_2a_3 dan a_3a_4 memiliki tepat satu pasangan pada $\{1, 2, \ldots, 2n+3\}$.

2) Untuk sisi $a_1 b_i^1$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$

Didefinisikan pelabelan *graceful* pada sisi $a_1 b_i^1$ adalah $f\left(a_1 b_i^1\right) = \left|f(a_1) - f\left(b_i^1\right)\right|$.

Kasus 1: $i = 1$

$$\begin{aligned} f(a_1b_1^1) &= \left|f(a_1) - f(b_1^1)\right| \\ &= |0 - (2n+3)| \\ &= 2n+3 \end{aligned}$$

Berdasarkan pola pelabelan yang didefinisikan pada sisi $a_1b_1^1$, maka terlihat bahwa sisi $a_1b_1^1$ memiliki tepat satu pasangan pada $\{1, 2, \ldots, 2n+3\}$.

Kasus 2: $i > 1$

Diambil sebarang sisi $a_1b_i^1, a_1b_k^1 \in E(U(S_n))$ dengan $a_1, b_i^1, b_k^1 \in V(U(S_n))$ dan $i \neq k$. Didefinisikan bahwa $f\left(a_1b_i^1\right) = \left|f(a_1) - f\left(b_i^1\right)\right|$ dan $f\left(a_1b_i^1\right) = \left|f(a_1) - f\left(b_k^1\right)\right|$.

$$\begin{aligned} f\left(a_1b_i^1\right) &= \left|f(a_1) - f\left(b_i^1\right)\right| \\ &= |0 - (2n+3-i)| \\ &= 2n+3-i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(a_1b_k^1\right) &= \left|f(a_1) - f\left(b_k^1\right)\right| \\ &= |0 - (2n+3-k)| \\ &= 2n+3-k \end{aligned}$$

Karena $i \neq k$ maka $2n+3-i \neq 2n+3-k$. Akibatnya diperoleh bahwa $f\left(a_1b_i^1\right) \neq f\left(a_1b_k^1\right)$.

3) Untuk sisi $a_4b_i^2$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$
Diambil sebarang sisi $a_4b_i^2$, $a_4b_k^2 \in E(U(S_n))$ dengan a_4, b_i^2, $b_k^2 \in V(U(S_n))$ dan $i \neq k$. Didefinisikan bahwa $f\left(a_4b_i^2\right) = \left|f(a_4) - f\left(b_i^2\right)\right|$ dan $f\left(a_4b_k^2\right) = \left|f(a_4) - f\left(b_k^2\right)\right|$.
Kasus 1: $i \leq 2$

$$f\left(a_4b_i^2\right) = \left|f(a_4) - f\left(b_i^2\right)\right| = \left|1 - (n + \left(\frac{2}{i}\right)\right| = n + \left(\frac{2}{i}\right) - 1$$

$$f\left(a_4b_k^2\right) = \left|f(a_4) - f\left(b_k^2\right)\right| = \left|1 - (n + \left(\frac{2}{k}\right)\right| = n + \left(\frac{2}{k}\right) - 1$$

Karena $i \neq k$ maka $n + \left(\frac{2}{i}\right) - 1 \neq n + \left(\frac{2}{k}\right) - 1$, akibatnya diperoleh bahwa $f\left(a_4b_i^2\right) \neq f\left(a_4b_k^2\right)$.
Kasus 2: $i > 2$

$$f(a_4b_i^2) = \left|f(a_4) - f(b_i^2)\right| = |1 - (n - (i - 2)| = n - i + 1$$

$$f(a_4b_k^2) = |f(a_4) - f(b_k^2)| = |1 - (n - (k - 2)| = n - k + 1$$

Karena $i \neq k$ maka $n - i + 1 \neq n - k + 1$, akibatnya diperoleh bahwa $f\left(a_4b_i^2\right) \neq f\left(a_4b_k^2\right)$.
Berdasarkan 1), 2) dan 3) maka terbukti bahwa f merupakan fungsi injektif.

b. Akan dibuktikan bahwa f merupakan fungsi surjektif
Diketahui $\left|E\left(U(S_n)\right)\right| = 2n + 3$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Selain itu diketahui bahwa himpunan sisi $E(U(S_n))$ dipetakan ke himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E(U(S_n))|\}$, artinya terdapat sebanyak $|E(U(S_n))|$ bilangan untuk melabeli himpunan sisi $E(U(S_n))$. Karena $\left|E\left(U(S_n)\right)\right| = |\{1, 2, \dots, 2n + 3\}|$ dan f merupakan fungsi injektif maka dapat disimpulkan bahwa f merupakan fungsi surjektif.

Karena f merupakan fungsi injektif dan sekaligus fungsi surjektif, maka terbukti bahwa f merupakan fungsi bijektif.
Dengan demikian, berdasarkan 1, 2 dan 3 maka terbukti bahwa graf U-bintang $\left(U(S_n)\right)$ adalah graf *graceful* untuk $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$.■

Sedangkan pembahasan mengenai pelabelan skolem *graceful* pada graf U-bintang $\left(U(S_n)\right)$ dituangkan dalam Teorema 11 berikut.

Teorema 11 Graf U-bintang $\left(U(S_n)\right)$ dengan $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ adalah graf skolem *graceful*.

Bukti Diberikan graf U-bintang $\left(U(S_n)\right)$ dengan $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Gambar 2, diketahui $V\left(U(S_n)\right) = \{a_j, b_i^1, b_i^2 | 1 \leq j \leq 4, 1 \leq i \leq n\}$ dan $E\left(U(S_n)\right) = \{a_m a_{m+1}, a_1 b_i^1, a_4 b_i^2 | 1 \leq m \leq 3, 1 \leq i \leq n\}$. Didefinisikan pola fungsi pelabelan skolem *graceful* pada graf $U(S_n)$ sebagai berikut.

$$g(a_1) = 1$$
$$g(a_2) = 2n + 3$$
$$g(a_3) = n + 1$$
$$g(a_4) = 2$$
$$g(b_i^1) = \begin{cases} 2n + 4, & jika\ i = 1,\ i = 1, 2, \dots, n \\ 2n + 4 - i, & jika\ i > 1,\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$
$$g(b_i^2) = \begin{cases} n + \left(\frac{i+2}{i}\right), & jika\ i \leq 2,\ i = 1, 2, \dots, n \\ n - (i - 3), & jika\ i > 2,\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Dengan menggunakan langkah pembuktian yang sama seperti pada Teorema 10 maka terbukti bahwa fungsi g memetakan $V\left(U(S_n)\right)$ ke $\{1, 2, \dots, |V\left(U(S_n)\right)|\}$, g merupakan fungsi injektif dan g

merupakan fungsi bijektif. Dengan demikian, terbukti bahwa graf U-bintang $\left(U(S_n)\right)$ adalah graf skolem *graceful* untuk $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$.■

Pembahasan mengenai pelabelan *graceful* pada graf $S_n, 3$ dituangkan dalam Teorema 12 berikut.

Teorema 12 Graf $S_n, 3$ dengan $n \in \mathbb{N}$ adalah graf *graceful*.

Bukti Diberikan graf $S_n, 3$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Gambar 2, diketahui $V(S_n, 3) = \{u_x, v_i^1, v_i^2, v_i^3 | 1 \leq x \leq 4, 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(S_n, 3) = \{u_1 u_w, u_2 v_i^1, u_3 v_i^2, u_4 v_i^3 \,|\, 2 \leq w \leq 4, 1 \leq i \leq n\}$. Selain itu, diketahui graf $S_n, 3$ memiliki titik sebanyak $3n + 4$ dan sisi sebanyak $3n + 3$. Didefinisikan pola pelabelan *graceful* pada graf $S_n, 3$ sebagai berikut.

$f(u_1) = 2n + 3$
$f(u_2) = 0$
$f(u_3) = 1$
$f(u_4) = n + 2$
$f(v_i^j) = (4 - j)n + 5 - (i + j)$, dengan $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, 3$

1. Akan dibuktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, fungsi f memetakan $V(S_n, 3)$ ke $\{0, 1, 2, \ldots, |E(S_n, 3)|\}$

a. Untuk titik u_1, u_2, u_3 dan u_4

Diketahui $f(u_1) = 2n + 3, f(u_2) = 0, f(u_3) = 1$ dan $f(u_4) = n + 2$. Sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka titik u_1, u_2, u_3 dan u_4 dipetakan ke salah satu elemen himpunan $\{0, 1, 2, \ldots, |3n + 3|\}$.

b. Untuk titik v_i^j dengan $j = 1, 2, 3$ dan $i = 1, 2, \ldots, n$

Diketahui $f\left(v_i^j\right) = (4 - j)n + 5 - (i + j)$.

Kasus 1: $j = 1$

$f\left(v_i^1\right) = 3n + 4 - i$

Karena $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $n \in \mathbb{N}$ maka $2n + 4 \leq 3n + 4 - i \leq 3n + 3$. Selain itu $0 < 2n + 4$, akibatnya $0 < 3n + 4 - i \leq 3n + 3$. Sehingga diperoleh $0 < f\left(v_i^1\right) \leq 3n + 3$.

Kasus 2: $j = 2$

$f\left(v_i^2\right) = 2n + 3 - i$

Karena $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $n \in \mathbb{N}$ maka $n + 3 \leq 2n + 3 - i \leq 2n + 2$. Selain itu $0 < 3n + 3$ dan $2n + 2 < 3n + 3$, akibatnya $0 < 2n + 3 - i < 3n + 3$. Sehingga diperoleh $0 < f\left(v_i^2\right) < 3n + 3$.

Kasus 3: $j = 3$

$f\left(v_i^2\right) = n + 2 - i$

Karena $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $n \in \mathbb{N}$ maka $2 \leq n + 2 - i \leq n + 1$. Selain itu $0 < 2$ dan $n + 1 < 3n + 3$, akibatnya $0 < n + 2 - i < 3n + 3$. Sehingga diperoleh $0 < f\left(v_i^3\right) < 3n + 3$.

Berdasarkan Kasus 1, Kasus 2 dan Kasus 3, terbukti bahwa titik v_i^j dipetakan ke salah satu elemen $\{0, 1, 2, \ldots, |E(S_n, 3)|\}$ untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$, $j = 1, 2, 3$ dan $n \in \mathbb{N}$.

2. Akan dibuktikan bahwa f merupakan fungsi injektif

a. Untuk titik u_1 dan u_4

Diketahui $f(u_1) = 2n + 3$ dan $f(u_4) = n + 2$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan pola pelabelan *graceful* yang didefinisikan pada titik u_1 dan u_4, maka terlihat bahwa titik u_1 dan u_4 memiliki tepat satu pasangan dalam himpunan $\{0, 1, 2, \ldots, 3n + 3\}$.

b. Untuk titik v_i^j

Diketahui $f\left(v_i^j\right) = (4 - j)n + 5 - (i + j)$ dengan $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $n \in \mathbb{N}$. Diambil sebarang titik $v_i^j, v_k^j \in V(S_n, 3)$ dengan $f(v_i^j) = f(v_k^j)$.

Kasus 1: $j = 1$
Didefinisikan $f(v_i^1) = 3n + 4 - i$ dan $f(v_k^1) = 3n + 4 - k$. Karena $f(v_i^1) = f(v_k^1)$ maka $3n + 4 - i = 3n + 4 - k$, akibatnya $i = k$. Karena $i = k$ maka dapat disimpulkan bahwa $v_i^1 = v_k^1$.
Kasus 2: $j = 2$
Didefinisikan $f(v_i^2) = 2n + 3 - i$ dan $f(v_k^2) = 2n + 3 - k$. Karena $f(v_i^2) = f(v_k^2)$ maka $2n + 3 - i = 2n + 3 - k$, akibatnya $i = k$. Karena $i = k$ maka dapat disimpulkan bahwa $v_i^2 = v_k^2$.
Kasus 3: $j = 3$
Didefinisikan $f(v_i^3) = n + 2 - i$ dan $f(v_k^3) = n + 2 - k$. Karena $f(v_i^3) = f(v_k^3)$ maka $n + 2 - i = n + 2 - k$, akibatnya $i = k$. Karena $i = k$ maka dapat disimpulkan bahwa $v_i^3 = v_k^3$.
Berdasarkan a dan b, maka terbukti bahwa f merupakan fungsi injektif.

3. Akan dibuktikan bahwa f merupakan fungsi bijektif
Diketahui bahwa sisi pada graf $S_n, 3$ adalah $u_1u_w, u_2v_i^1, u_3v_i^2$ dan $u_4v_i^3$ dengan $w = 2, 3, 4$ dan $i = 1, 2, \ldots, n$. Selain itu diketahui bahwa $E(S_n, 3)$ dipetakan ke $\{1, 2, \ldots, 3n + 3\}$. Untuk membuktikan bahwa f merupakan fungsi bijektif, maka perlu dibuktikan bahwa f merupakan fungsi injektif sekaligus fungsi surjektif.

a. Akan dibuktikan bahwa f merupakan fungsi injektif

1) Untuk sisi u_1u_w dengan $w = 2, 3, 4$
Didefinisikan pelabelan *graceful* pada sisi u_1u_w adalah $f(u_1u_w) = |f(u_1) - f(u_w)|$.

Kasus 1: $w = 2$
$$f(u_1u_2) = |f(u_1) - f(u_2)| = |2n + 3 - 0| = 2n + 3$$
Kasus 2: $w = 3$
$$f(u_1u_3) = |f(u_1) - f(u_3)| = |2n + 3 - 1| = 2n + 2$$
Kasus 3: $w = 4$
$$f(u_1u_4) = |f(u_1) - f(u_4)| = |(2n + 3) - (n + 2| = n + 1$$

Berdasarkan pola pelabelan yang didefinisikan pada sisi u_1u_2, u_1u_3 dan u_1u_4, maka terlihat bahwa sisi u_1u_2, u_1u_3 dan u_1u_4 memiliki tepat satu pasangan dalam $\{1, 2, \ldots, 3n + 3\}$.

2) Untuk sisi $u_2v_i^1$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$
Diambil sebarang sisi $u_2v_i^1, u_2v_k^1 \in E(S_{n,}3)$ dengan $u_2, v_i^1, v_k^1 \in V(S_{n,}3)$ dan $i \neq k$. Didefinisikan bahwa $f(u_2v_i^1) = |f(u_2) - f(v_i^1)|$ dan $f(u_2v_k^1) = |f(u_2) - f(v_k^1)|$.
$$f(u_2v_i^1) = |f(u_2) - f(v_i^1)| = |0 - (3n + 4 - i)| = 3n + 4 - i$$
$$f(u_2v_k^1) = |f(u_2) - f(v_k^1)| = |0 - (3n + 4 - k)| = 3n + 4 - k$$
Karena $i \neq k$ maka $3n + 4 - i \neq 3n + 4 - k$. Akibatnya diperoleh bahwa $f(u_2v_i^1) \neq f(u_2v_k^1)$.

3) Untuk sisi $u_3v_i^2$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$
Diambil sebarang sisi $u_3v_i^2, u_3v_k^2 \in E(S_{n,}3)$ dengan $u_3, v_i^2, v_k^2 \in V(S_{n,}3)$ dan $i \neq k$. Didefinisikan bahwa $f(u_3v_i^2) = |f(u_3) - f(v_i^2)|$ dan $f(u_3v_k^2) = |f(u_3) - f(v_k^2)|$.
$$f(u_3v_i^2) = |f(u_3) - f(v_i^2)| = |1 - (2n + 3 - i| = 2n + 2 - i$$
$$f(u_3v_k^2) = |f(u_3) - f(v_k^2)| = |1 - (2n + 3 - k| = 2n + 2 - k$$
Karena $i \neq k$ maka $2n + 2 - i \neq 2n + 2 - k$. Akibatnya diperoleh bahwa $f(u_3v_i^2) \neq f(u_3v_k^2)$.

4) Untuk sisi $u_4v_i^3$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$
Diambil sebarang sisi $u_4v_i^3, u_4v_k^3 \in E(S_{n,}3)$ dengan $u_4, v_i^3, v_k^3 \in V(S_{n,}3)$ dan $i \neq k$. Didefinisikan bahwa $f(u_4v_i^3) = |f(u_4) - f(v_i^3)|$ dan $f(u_4v_k^3) = |f(u_4) - f(v_k^3)|$.

$$f(u_4 v_i^3) = |f(u_4) - f(v_i^3)| = |(n+2) - (n+2-i)| = i \qquad f(u_4 v_k^3) = |f(u_4) - f(v_k^3)| = |(n+2) - (n+2-k)| = k$$

Karena $i \neq k$ maka dapat disimpulkan bahwa $f(u_4 v_i^3) \neq f(u_4 v_k^3)$.

Berdasarkan 1), 2), 3) dan 4) maka terbukti bahwa f merupakan fungsi injektif.

b. Akan dibuktikan bahwa f merupakan fungsi surjektif

Diketahui $|E(S_n, 3)| = 3n + 3$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Selain itu diketahui bahwa himpunan sisi $E(S_n, 3)$ dipetakan ke himpunan bilangan $\{1, 2, \ldots, |E(S_n, 3)|\}$, artinya terdapat sebanyak $|E(S_n, 3)|$ bilangan untuk melabeli himpunan sisi $E(S_n, 3)$. Karena $|E(S_n, 3)| = |\{1, 2, \ldots, 3n + 3\}|$ dan f merupakan fungsi injektif maka dapat disimpulkan bahwa f merupakan fungsi surjektif.

Karena f merupakan fungsi injektif dan sekaligus fungsi surjektif, maka terbukti bahwa f merupakan fungsi bijektif.

Dengan demikian, berdasarkan 1, 2 dan 3 terbukti bahwa graf $S_n, 3$ adalah graf *graceful* untuk $n \in \mathbb{N}$.■

Sedangkan pembahasan mengenai pelabelan skolem *graceful* pada graf $S_n, 3$ dituangkan dalam Teorema 13 berikut.

Teorema 13 Graf $S_n, 3$ dengan $n \in \mathbb{N}$ adalah graf skolem *graceful*.

Bukti Diberikan graf $S_n, 3$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Gambar 2, diketahui $V(S_n, 3) = \{u_x, v_i^1, v_i^2, v_i^3 | 1 \leq x \leq 4, 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(S_n, 3) = \{u_1 u_w, u_2 v_i^1, u_3 v_i^2, u_4 v_i^3 | 2 \leq w \leq 4, 1 \leq i \leq n\}$. Selain itu, diketahui graf $S_n, 3$ memiliki titik sebanyak $3n + 4$ dan sisi sebanyak $3n + 3$. Didefinisikan pola fungsi pelabelan skolem *graceful* pada graf $S_n, 3$ sebagai berikut.

$g(u_1) = 2n + 4$

$g(u_2) = 1$

$g(u_3) = 2$

$g(u_4) = n + 3$

$g(v_i^j) = (4 - j)n + 6 - (i + j)$, dengan $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, 3$

Dengan menggunakan langkah pembuktian yang sama seperti pada Teorema 12 maka terbukti bahwa fungsi g memetakan $V(S_n, 3)$ ke $\{1, 2, \ldots, |V(S_n, 3)|\}$, g merupakan fungsi injektif dan g merupakan fungsi bijektif. Dengan demikian terbukti bahwa graf $S_n, 3$ adalah graf skolem *graceful* untuk $n \in \mathbb{N}$.■

KESIMPULAN

Pelabelan *graceful* pada graf $G = (V(G), E(G))$ adalah fungsi injektif f dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots,|E(G)|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif f dari himpunan sisi $E(G)$ ke himpunan bilangan $\{1,2,\ldots,|E(G)|\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $uv \in E(G)$ dengan $u, v \in V(G)$ berlaku $f(uv) = |f(u) - f(v)|$. Sedangkan pelabelan skolem *graceful* merupakan bentuk perluasan atau moodifikasi dari pelabelan *graceful*. Berdasarkan pembahasan diatas, maka dapat disimpulkan bahwa graf U-bintang ($U(S_n)$) dengan $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ merupakan graf *graceful* dan graf skolem *graceful*. Selain itu juga diperoleh bahwa graf $S_n, 3$ dengan $n \in \mathbb{N}$ juga merupakan graf *graceful* dan graf skolem *graceful*.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Sari DNI, Rahadjeng B. Pelabelan *Graceful* Sisi pada Graf Komplit Reguler K-Partit, Graf Roda, Graf Bisikel dan Graf Trisikel. *Jurusan Matematika FMIPA Unesa.* 2013

[2] Bantara JA, Sudarsana IW, Musdalifah S. Pelabelan *Graceful* Ganjil pada Graf Duplikasi dan Split Bintang. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan.* 2018; 15: 28-35.

[3] Amri Z, Ahmad M, Huda N, Supriadi, Sugeng KA. Pelabelan *Graceful*, Skolem *Graceful* dan Pelabelan $\hat{\rho}$ pada Graf $(S_n, 3)$. *Prosiding Seminar Nasional FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta*. 2011; M131-M136.
[4] Huda N, Amri Z. Pelabelan *Graceful*, Skolem *Graceful* dan Pelabelan $\hat{\rho}$ pada Graf H- bintang dan A-bintang. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*. 2012; 6(2): 30-37
[5] Munir R. *Matematika Diskrit Edisi Ke-3*. Bandung: Teknik Informatika; 2010.
[6] Chartrand G, Oellermann OR. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. New York: McGraw-Hill; 1993.
[7] Wijaya A. *Matematika Diskrit*. Bandung: Politeknik Telkom; 2009.
[8] Ardiansyah R, Darmaji. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits.* 2013; 2(1): 1-5.

MUHAMMAD ILYAS : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
mochilyasmuhammad@gmail.com
YUNDARI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
yundari@math.untan.ac.id
MELIANA PASARIBU : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
melianapasaribu@math.untan.ac.id