Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 09, No. 2 (2020), hal 329-336.

BILANGAN KROMATIK LOKASI PADA GRAF BAYANGAN DAN GRAF *MIDDLE* DARI GRAF BINTANG

Novia Kristefany Kabang, Yundari, Fransiskus Fran

INTISARI

Pewarnaan graf merupakan cara untuk memberi warna pada semua titik atau sisi pada suatu graf, dengan syarat kedua titik atau sisi yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Salah satu pengembangan teori yang berhubungan dengan pewarnaan graf adalah pewarnaan lokasi dan bilangan kromatik lokasi. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf bintang (S_n), *graf bayangan dari graf bintang* $(D_2(S_n))$, *dan graf middle dari graf bintang* $(M(S_n))$ *dengan* $n \in \mathbb{N}$. *Bilangan kromatik lokasi dicari dengan menerapkan pewarnaan lokasi pada* S_n, $D_2(S_n)$ *dan* $M(S_n)$. *Selanjutnya, dicari kelas warna dan kode warna untuk semua titik di* S_n, $D_2(S_n)$ *dan* $M(S_n)$. *Jika setiap titik memiliki kode warna yang berbeda, maka graf tersebut dikatakan memenuhi pewarnaan lokasi. Bilangan kromatik lokasi untuk graf* G *dinotasikan dengan* $\chi_L(G)$. *Berdasarkan penelitian ini, diperoleh* $\chi_L(S_n) = n+1$, $\chi_L(D_2(S_n)) = 2n+2$, *dan* $\chi_L(M(S_n)) = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ n+1, & n \geq 2 \end{cases}$.

Kata kunci: *Pewarnaan lokasi, kelas warna, kode warna.*

PENDAHULUAN

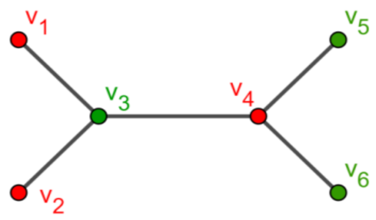
Pewarnaan graf merupakan salah satu materi yang ada pada teori graf. Pada tahun 2002, Chartrand dkk memperkenalkan konsep pewarnaan lokasi [1]. Pewarnaan lokasi merupakan pengembangan teori dan perpaduan dari konsep pewarnaan titik pada graf dan dimensi partisi [2]. Dalam pewarnaan lokasi, diperkenalkan juga jumlah warna minimum yang digunakan untuk memenuhi definisi pewarnaan lokasi yang disebut dengan bilangan kromatik lokasi. Suatu pewarnaan titik pada graf G dikatakan memenuhi pewarnaan lokasi jika setiap titik pada graf G memiliki kode warna yang berbeda.

Pewarnaan lokasi merupakan teori yang menarik untuk dikembangkan lebih lanjut. Dalam pewarnaan lokasi, tidak hanya menerapkan pewarnaan pada suatu graf, tetapi juga mencari jumlah warna minimum yang digunakan yang disebut dengan bilangan kromatik lokasi. Chartrand dkk pada tahun 2002 [1] telah menentukan batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi pada suatu graf. Beberapa peneliti lainnya juga telah menentukan bilangan kromatik lokasi untuk beberapa jenis graf, antara lain bilangan kromatik lokasi graf barbel [2], bilangan kromatik lokasi pada graf kembang api [3] dan graf amalgamasi bintang [4]. Oleh karena itu, dilakukan penelitian lebih lanjut untuk membahas bilangan kromatik lokasi pada graf lainnya.

Dalam penelitian ini, dicari bilangan kromatik lokasi pada graf bintang, graf bayangan dari graf bintang dan graf *middle* dari graf bintang. Graf bayangan dan graf *middle* dari graf bintang adalah suatu graf baru yang dibentuk dengan menggunakan konsep graf bayangan dan graf *middle*.

PEWARNAAN GRAF

Pewarnaan graf memiliki 3 macam jenis, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan wilayah. Sebelum membahas mengenai pewarnaan graf secara lebih rinci, dijelaskan terlebih dahulu mengenai definisi graf. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), dinotasi $G = (V, E)$



Gambar 1 Pewarnaan titik pada graf G

yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik [5]. Pewarnaan graf G merupakan pemetaan dari himpunan titik atau himpunan sisi ke himpunan k warna dengan $k \in \mathbb{N}$. Sehingga, setiap titik atau sisi yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Berikut ini, dijelaskan tentang definisi pewarnaan titik.

Definisi 1 [5] *Pewarnaan titik adalah pemberian warna titik-titik didalam graf sedemikian sehingga setiap dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda.*

Dalam pewarnaan titik, bukan hanya mewarnai setiap titik yang bertetangga dengan warna yang berbeda melainkan mencari jumlah warna minimum yang digunakan. Jumlah warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan titik pada graf disebut dengan bilangan kromatik. Berikut diberikan definisi untuk menjelaskan bilangan kromatik.

Definisi 2 [6] *Bilangan kromatik dari graf G, dinyatakan dengan $\chi(G)$ adalah minimum dari banyaknya warna yang digunakan untuk pewarnaan titik pada graf G.*

Dari Definisi 1 dan Definisi 2, diberikan contoh untuk menjelaskan pewarnaan titik dan bilangan kromatik pada suatu graf.

Contoh 3 Diberikan sebuah graf $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\})$ dengan pewarnaan titik seperti Gambar 1. Dapat dilihat bahwa warna yang digunakan untuk mewarnai semua titik pada graf G sebanyak 2 warna atau $\chi(G) = 2$.

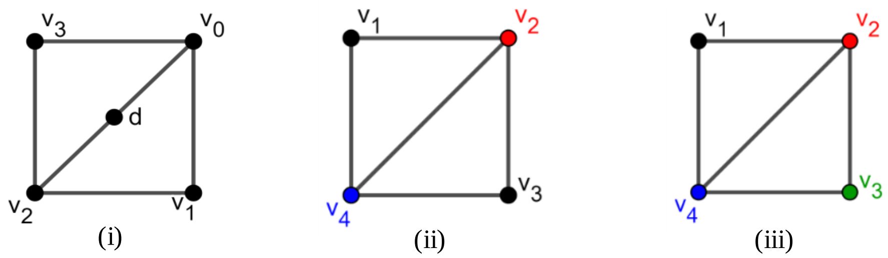
PEWARNAAN LOKASI

Dalam pewarnaan graf, terdapat juga pewarnaan yang disebut dengan pewarnaan lokasi. Pewarnaan lokasi merupakan pengembangan dari konsep partisi dan pewarnaan titik pada graf. Diberikan beberapa teorema dan definisi mengenai penjelasan dimensi partisi, pewarnaan lokasi dan bilangan kromatik lokasi sebagai berikut:

Definisi 4 [7] *Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G, R adalah subset dari $V(G)$ dan $v \in V(G)$, jarak dari v ke R dinotasikan dengan $d(v, R)$ didefiniskan sebagai $d(v, R) = min\{d(v, x) | x \in R\}$. Terdapat k buah partisi $\Pi = \{R_1, R_2, \cdots, R_k\}$ dari $V(G)$. Representasi dari v terhadap Π adalah k-vektor*

$$r(v|\Pi) = \big(d(v, R_1), d(v, R_2), \cdots, d(v, R_k)\big),$$

Partisi Π dinyatakan partisi pembeda, jika k-vektor $r(v|\Pi)$ untuk setiap $v \in V(G)$ berbeda. Nilai minimum k agar terdapat partisi pembeda dari $V(G)$ adalah dimensi partisi dari G yang dinotasikan $pd(G)$.



Gambar 2 (i) Graf M (ii) Graf G (iii) Graf G'

Tabel 1 Kode Warna $\boldsymbol{V(M)}$

$V(M)$ \ R_i	R_1	R_2	R_3	$r(v\|\Pi)$
c	0	2	1	(0,2,1)
v_0	0	1	1	(0,1,1)
v_1	1	0	1	(1,0,1)
v_2	1	1	0	(1,1,0)
v_3	1	2	0	(1,2,0)

Konsep dimensi partisi digunakan pada pewarnaan lokasi untuk mencari kode warna semua titik $v \in V(G)$. Berikut ini diberikan ilustrasi gambar yang menjelaskan konsep dimensi partisi pada graf seperti pada Gambar 2 bagian (i). Pada Gambar 2 bagian (i), misal terdapat 3 buah partisi yaitu R_1, R_2, R_3 sehingga $\Pi = \{R_1, R_2, R_3\}$. Dari hasil partisi tersebut diperoleh seperti pada Tabel 1, bahwa representasi semua titik di graf M terhadap Π berbeda, dan 3 merupakan kardinalitas minimum dikarenakan untuk semua kemungkinan 2 partisi pada graf M, titik-titik yang berada dalam 1 partisi akan memiliki representasi terhadap Π yang sama, akibatnya $pd(M) = 3$.

Pada pewarnaan lokasi, R disimbolkan dengan C_i yang disebut dengan kelas warna. Penjelasan tentang kelas warna pada pewarnaan lokasi dijelaskan seperti Definisi 5.

Definisi 5 [1] *Misalkan c merupakan pewarnaan pada sebuah graf terhubung G, sehingga $c(u) \neq c(v)$ untuk u yang bertetangga dengan v di graf G. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i yang disebut dengan kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$.*

Definisi 5 menjelaskan tentang kelas warna yang terdapat pada graf G. Selanjutnya, setiap titik pada kelas warna tersebut harus memiliki kode warna yang berbeda. Definisi kode warna dan pewarnaan lokasi dijelaskan pada Definisi 6.

Definisi 6 [1] *Kode warna $\boldsymbol{c}_\Pi(v)$ dari V adalah k-pasang terurut*

$$\boldsymbol{c}_\Pi(v) = \big(d(v, C_1), d(v, C_2), \cdots, d(v, C_k)\big),$$

dengan $d(v, C_i) = min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$, $i, k \in \mathbb{N}$. Jika untuk setiap titik yang berbeda di G mempunyai kode warna yang berbeda maka c disebut pewarnaan lokasi G.

Banyaknya komponen disetiap kode warna sama dengan banyaknya warna yang digunakan untuk pewarnaan lokasi pada suatu graf G. Jumlah warna minimum yang digunakan disebut bilangan kromatik lokasi seperti pada Definisi 7.

Definisi 7 [1] *Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi pada graf G disebut bilangan kromatik lokasi G dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.*

Pewarnaan lokasi merupakan salah satu pengembangan dari pewarnaan graf. Setiap pewarnaan lokasi juga merupakan pewarnaan titik, maka $\chi(G) \leq \chi_L(G)$. Diberikan ilustrasi seperti pada Gambar 2 bagian (ii) dan (iii) untuk menjelaskan Definisi 5, Definisi 6, dan Definisi 7.

Tabel 2 Kode Warna $\boldsymbol{V(G)}$

$V(G)$ \ C_i	C_1	C_2	C_3	$\boldsymbol{c}_\Pi(V(G))$
v_1	0	1	1	(0,1,1)
v_2	1	0	1	(1,0,1)
v_3	0	1	1	(0,1,1)
v_4	1	1	0	(1,1,0)

Tabel 3 Kode Warna Graf G'

$V(G')$ \ C_i	C_1	C_2	C_3	C_4	$c_\Pi(V(G'))$
v_1	0	1	2	1	(0,1,2,1)
v_2	1	0	1	1	(1,0,1,1)
v_3	2	1	0	1	(2,0,1,1)
v_4	1	1	1	0	(1,1,1,0)

Pada Gambar 2 bagian (ii), dapat dilihat bahwa graf G diwarnai dengan 3 warna sesuai dengan Definisi 1. Pada Gambar 2 (ii), diperoleh $\chi(\mathrm{G}) = 3$, karena $\chi(\mathrm{G}) \leq \chi_\mathrm{L}(\mathrm{G})$, akibatnya $\chi_\mathrm{L}(\mathrm{G}) \geq 3$. Berdasarkan Definisi 3, dibentuk kelas warna sebagai berikut: $C_1 = \{ v_1, v_3 \}$, $C_2 = \{ v_2 \}$, $C_3 = \{ v_4 \}$. Dari kelas warna tersebut, diperoleh kode warna untuk $V(G)$ seperti Tabel 2. Dari Tabel 2, dapat dilihat bahwa titik pada graf G yang berada dalam kelas warna yang sama akan memiliki kode warna yang sama. Sehingga, graf G dengan 3 warna tidak memenuhi pewarnaan lokasi.

Selanjutnya, dilakukan pewarnaan lokasi seperti Gambar 2 bagian (iii), sehingga diperoleh kelas warna pada graf G' sebagai berikut: $C_1 = \{v_1\}$, $C_2 = \{v_2\}, C_3 = \{v_3\}$, dan $C_4 = \{v_4\}$. Setelah diperoleh kelas warna untuk graf G', selanjutnya dicari kode warna untuk setiap $V(G')$. Kode warna tersebut dapat dilihat pada Tabel 3. Berdasarkan Tabel 3, setiap titik di graf G' memiliki kode warna yang berbeda, maka graf G' dengan 4 warna sudah memenuhi pewarnaan lokasi. Akibatnya, $\chi_L(G') = 4$.

Definisi 8 [8] *Persekitaran terbuka dari titik v dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan titik v atau $N(v) = \{x \in V(G) \mid vx \in E(G)\}$. Persekitaran tertutup dari titik v dinotasikan dengan $N[v]$ adalah himpunan $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.*

Teorema 9 [1] *Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehinga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u,v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sehingga $N(u) = N(v)$ maka $c(u) \neq c(v)$.*

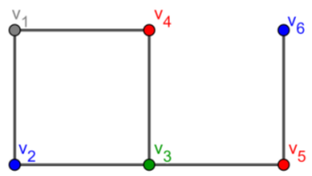
Teorema 8 ini memberikan suatu akibat yang dapat dilihat pada Akibat 10.

Akibat 10 [1] *Misalkan G adalah graf terhubung dengan satu titik yang bertetangga dengan n daun, maka $\chi_L(G) \geq n + 1$.*

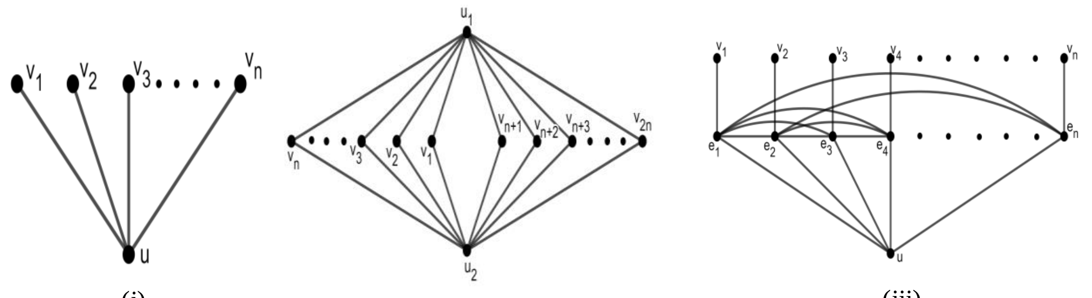
Akibat 10 dapat dijadikan sebagai batas bawah untuk menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf. Penjelasan Akibat 10 diilustrasikan seperti Gambar 3. Diberikan graf I dan dapat dilihat bahwa titik v_5 memiliki 1 daun yaitu v_6. Sehingga, berdasarkan Akibat 10 diperoleh $\chi_L(I) \geq 2$.

Graf yang dibahas adalah graf bintang, graf bayangan dari graf bintang dan graf *middle* dari graf bintang. Sebelum membahas tentang bilangan kromatik lokasi dari ketiga graf tersebut, terlebih dahulu diberikan definisi graf bayangan dan graf *middle* sebagai berikut.

Definisi 11 [9] *Graf bayangan dari graf terhubung G dinotasikan $D_2(G)$ adalah graf yang dibangun dengan menggabungkan dua salinan G, misalkan G' dan G''. Setiap titik di G' dan G'' akan saling bertetangga jika kedua titik tersebut bertetangga di graf G.*



Gambar 3 Graf *I*



Gambar 4 (i) Graf Bintang (S_2) (ii) Graf bayangan $(D_2(S_2))$ (iii) Graf *Middle* $(M(S_2))$

Definisi 12 [10] *Graf middle dari graf G dinotasikan $M(G)$ adalah graf yang himpunan titiknya adalah $V(M(G)) = V(G) \cup E(G) = \{v_1, .., v_{|V(G)|}, e_1 .., e_{|E(G)|}\}$. Dua titik dikatakan bertetangga di $M(G)$ jika dan hanya jika:*

(i) $e_a \in V(M(G))$ bertetangga dengan $e_b \in V(M(G))$ karena sisi $e_a = v_i v_j \in E(G)$ dan sisi $e_b = v_j v_l \in E(G)$ besisian pada titik yang sama di G dengan $i \neq j$ dimana $i, j = 1, .., |V(G)|$ dan $a \neq b$ dimana $a, b = 1, .., |E(G)|$

(ii) $v_i \in V(M(G))$ bertetangga dengan $e_a \in V(M(G))$ karena sisi $e_a = v_i v_j \in E(G)$ bersisian dengan titik $v_i \in V(G)$ dengan $i \neq j$ dimana $i, j = 1, .., |V(G)|$ dan $a \neq b$ dimana $a, b = 1, .., |E(G)|$.

Definisi 11 dan Definisi 12 diilustrasikan seperti Gambar 4. Gambar 4 merupakan ilustrasi dari graf bayangan dan graf *middle* dari graf bintang. Pada graf $D_2(S_n)$, dibangun oleh graf G' dan G'' yang di misalkan bahwa $V(G') = \{u_1, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dan $V(G'') = \{u_2, v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3}, \ldots, v_{2n}\}$. Selanjutnya, diterapkan pewarnaan lokasi pada graf bintang (S_n), bayangan graf bintang $D_2(S_n)$ dan *middle* graf bintang $M(S_n)$ yang dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 13 *Graf G adalah graf bintang S_n dengan 1 titik pusat dan n titik sebagai n daun untuk $n \in \mathbb{N}$. Bilangan kromatik lokasi pada Graf G adalah $\chi_L(S_n) = n + 1$.*

Bukti:

Graf bintang S_n memiliki n daun dengan $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Akibat 10, diperoleh $\chi_L(S_n) \geq n + 1$. Selanjutnya, ditentukan batas atas dari $\chi_L(S_n)$. Misalkan c adalah pewarnaan dari $V(S_n)$, berdasarkan Definisi 5, pada graf S_n diperoleh kelas warna sebagai berikut:

$$C_1 = \{u\} \quad (1)$$
$$C_i = \{v_{i-1}\}, \text{ untuk } i = 2, \ldots, n + 1 \quad (2)$$

Dari kelas warna (1) dan (2), diperoleh kode warna sebagai berikut:

$$\boldsymbol{c}_\Pi(u) = \begin{cases} 0, \text{komponen ke } 1 \\ 1, \text{komponen lainnya} \end{cases}$$
$$\boldsymbol{c}_\Pi(v_i) = \begin{cases} 1, \text{komponen ke } 1 \\ 0, \text{komponen ke } i + 1 \\ 2, \text{komponen lainnya} \end{cases}$$

Dapat dilihat bahwa kode warna untuk semua titik di graf S_n berbeda. Ini menunjukkan bahwa $\chi_L(S_n) \leq n + 1$, karena diperoleh batas atas dan batas bawah yang sama untuk bilangan kromatik lokasi pada graf S_n, maka dapat disimpulkan bahwa $\chi_L(S_n) = n + 1$ ■

Teorema 14 *Graf G adalah Shadow graf bintang $(D_2(S_n))$ dengan titik sebanyak $2n+2$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Bilangan kromatik lokasi pada Graf G adalah $\chi_L(D_2(S_n)) = 2n+2$.*

Bukti :

Pada graf $D_2(S_n)$, titik v_i dengan $i = 1,\ldots,2n$ merupakan titik yang tidak bertetangga tetapi memiliki persekitaran yang sama atau $N(v_1) = N(v_2) = N(v_3) = \cdots = N(v_{2n})$. Oleh karena semua titik v_i dengan $i = 1,\ldots,2n$ memiliki persekitaran yang sama, maka menurut Teorema 9 semua titik v_i harus memiliki warna yang berbeda. Akibatnya, untuk mewarnai semua titik v_i haruslah menggunakan $2n$ warna. Setelah mewarnai semua titik v_i, masih ada 2 titik yang belum mempunyai warna yaitu titik u_1 dan u_2. Titik u_1 dan u_2 bertetangga dengan titik v_i, oleh karena itu titik u_1 dan u_2 tidak boleh memiliki warna yang sama dengan titik v_i dan karena titik u_1 dan u_2 juga memiliki persekitaran yang sama atau $N(u_1) = N(u_2)$. Akibatnya, menurut Teorema 9 bahwa titik u_1 dan u_2 tidak boleh memiliki warna yang sama, sehingga diperlukan 2 warna untuk mewarnai titik u_1 dan u_2. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa warna yang yang digunakan untuk mewarnai semua titik di graf $D_2(S_n)$ agar memenuhi definisi pewarnaan lokasi adalah $2n+2$ warna. Sehingga diperoleh $\chi_L(D_2(S_n)) \geq 2n+2$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $\chi_L(D_2(S_n)) \leq 2n+2$. Berdasarkan perwarnaan lokasi yang diterapkan, selanjutnya dikonstruksi sehingga diperoleh kelas warna pada graf $D_2(S_n)$ sebagai berikut:

$$C_i = \{v_i\}, \text{ untuk } i = 1,\ldots,2n \tag{3}$$
$$C_{2n+i} = \{u_i\}, \text{ untuk } i = 1,2 \tag{4}$$

Dari kelas warna (3) dan (4), diperoleh kode warna sebagai berikut :

$$\boldsymbol{c}_\Pi(v_1) = \begin{cases} 0, & \text{komponen ke } i \\ 1, & \text{komponen ke } 2n+1 \text{ dan } 2n+2 \\ 2, & \text{komponen lainnya} \end{cases}$$
$$\boldsymbol{c}_\Pi(u_i) = \begin{cases} 0, & \text{komponen ke } 2n+i \\ 2, & \text{komponen ke } 2n+i, \text{ untuk } i \text{ lainnya} \\ 1, & \text{komponen lainnya} \end{cases}$$

Kode warna untuk semua titik di graf $D_2(S_n)$ tersebut menunjukkan bahwa $\chi_L(D_2(S_n)) \leq 2n+2$. Oleh karena diperoleh batas bawah dan batas atas yang sama untuk bilangan kromatik lokasi graf $D_2(S_n)$ yaitu $2n+2$, maka akibatnya $\chi_L(D_2(S_n)) = 2n+2$. ■

Teorema 14 *Graf G adalah middle graf bintang $M(S_n)$ dengan titik sebanyak $2n+1$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Bilangan kromatik lokasi pada graf G adalah:*

$$\chi_L(M(S_n)) = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ n+1, & n \geq 2 \end{cases}$$

Bukti :

(i) $\chi_L(M(S_n)) = 3$, untuk $n = 1$

Pada *middle* graf bintang $M(S_1)$ terdapat titik e_1 yang memiliki 2 daun yaitu u, v_1. Berdasarkan Akibat 10 diperoleh $\chi_L(M(S_1)) \geq 3$. Selanjutnya, dibuktikan $\chi_L(M(S_1)) \leq 3$. Berdasarkan perwarnaan lokasi yang diterapkan, selanjutnya dikonstruksi sehingga pada graf $M(S_1)$ diperoleh kelas warna sebagai berikut:

$$C_1 = \{e_1\} \tag{5}$$
$$C_2 = \{u\} \tag{6}$$
$$C_3 = \{v_1\} \tag{7}$$

Dari kelas warna (5), (6) dan (7), diperoleh kode warna sebagai berikut:

$$\boldsymbol{c}_\Pi(u_1) = (0,1,1)$$

$$\boldsymbol{c}_{\Pi}(v_1) = (1{,}0{,}2)$$
$$\boldsymbol{c}_{\Pi}(u) = (1{,}2{,}0)$$

Dapat dilihat bahwa kode warna untuk semua titik di graf $M(S_1)$ berbeda. Ini menunjukkan bahwa $\chi_L(M(S_1)) \leq 3$, karena diperoleh batas atas dan batas bawah yang sama untuk bilangan kromatik lokasi pada graf $M(S_1)$, maka dapat disimpulkan bahwa $\chi_L(M(S_1)) = 3$.

(ii) $\chi_L(M(S_n)) = n + 1$, untuk $n \geq 2$

Pertama, karena $\chi(G) \leq \chi_L(G)$ maka terlebih dahulu dilakukan pewarnaan titik pada $M(S_n)$. Graf $M(S_n)$ memiliki titik e_i dengan $i = 1,..,n$ dan semua titik e_i saling bertetangga, sehingga warna yang dibutuhkan untuk mewarnai semua e_i adalah n warna. Masih ada titik u yang juga bertetangga dengan semua titik e_i. Akibatnya, menurut Definisi 1 titik u harus mempunyai warna yang berbeda dengan e_i dengan $i = 1,..,n$. Jika titik u mempunyai warna yang sama dengan titik e_i, maka graf $M(S_n)$ tidak memenuhi definisi pewarnaan titik dan pewarnaan lokasi. Sehingga, diperoleh $\chi(M(S_n)) = n + 1$. Akibatnya, $\chi_L(M(S_n)) \geq n + 1$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $\chi_L(M(S_n)) \leq n + 1$. Berdasarkan Definisi 5 pada graf $M(S_n)$ diperoleh kelas warna sebagai berikut:

$$C_1 = \{u\} \tag{8}$$
$$C_i = \{v_{i-1}, e_i\},\ \text{untuk } i = 2,..,n \tag{9}$$
$$C_{n+1} = \{v_n, e_1\} \tag{10}$$

Dari kelas warna (8), (9) dan (10), diperoleh kode warna sebagai berikut:

$$\boldsymbol{c}_{\Pi}(u) = \begin{cases} 0, \text{komponen ke } 1 \\ 1, \text{komponen lainnya} \end{cases}$$
$$\boldsymbol{c}_{\Pi}(v_1) = \begin{cases} 0, \text{komponen ke } 2 \\ 1, \text{komponen ke } n+1 \\ 2, \text{komponen lainnya} \end{cases}$$
$$\boldsymbol{c}_{\Pi}(e_1) = \begin{cases} 0, \text{komponen ke } n+1 \\ 1, \text{komponen lainnya} \end{cases}$$
$$\boldsymbol{c}_{\Pi}(e_i) = \begin{cases} 0\text{ , komponen ke } i \\ 1, \text{komponen lainnya} \end{cases}$$
$$\boldsymbol{c}_{\Pi}(v_i) = \begin{cases} 1, \text{komponen ke } i \\ 0, \text{komponen ke } i+1 \\ 2, \text{komponen lainnya} \end{cases}$$

Kode warna untuk semua titik di graf $M(S_n)$ menunjukkan bahwa $\chi_L(M(S_n)) \leq n + 1$. Diperoleh batas bawah dan batas atas yang sama untuk bilangan kromatik lokasi pada graf $M(S_n)$ yaitu $n + 1$, akibatnya $\chi_L(M(S_n)) = n + 1$. ■

KESIMPULAN

Bilangan kromatik lokasi merupakan warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan lokasi. Bilangan kromatik lokasi ini diperoleh dengan menerapkan pewarnaan lokasi pada graf S_n, $D_2(S_n)$ dan $M(S_n)$. Berdasarkan pembahasan yang dilakukan, diperoleh $\chi_L(S_n) = n + 1$, $\chi_L(D_2(S_n)) = 2n + 2$ dan $\chi_L(M(S_n)) = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ n + 1, & n \geq 2 \end{cases}$, dengan $n \in \mathbb{N}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand, G.; Erwin, D.; Henning, M.A.; Slater, P.J & Zhang, P. *The Locating-Chromatic Number of a Graph*. Bull, Inst. Combin, 2002, Appl. 36, pp. 89-101.
[2] Asmiati.; Yana, K.S.G.; and Yulianti, L. On the Locating Chromatic Number of Certain Barbell Graph. *International Journal Mathematics and Mathematical Sciences.* 2018.
[3] Asmiati.; Assyiatun, H.; and Baskoro, E.T. The Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs. *Far East J. Math. Sci.* 2012; 63 (1): 11-23.
[4] Asmiati.; Assyiatun, H.; and Baskoro E.T. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars Graph. *ITB.J. Sci*. 2011; Vol 43A, No. 1:1-8.
[5] Munir, R. *Matematika Diskrit*, Ed ke-3, Bandung: Informatika Bandung. 2010.
[6] Chartrand, G. and Zhang, P. *Chromatic Graph Teory*, Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC Press Company. 2009.
[7] Chartrand, G.; Salehi, E.; and Zhang, P. The Partititon Dimension of a Graph, *Aequationes Math*. 2000; 59: 45-54.
[8] Harris, J.M.; Hirst, J.L and Mossinghoff, M.J, *Combinatorics and Graph Teory 2nd* ed. Spinger, New York. 2000.
[9] Ghosh, P.; Misha, S.N.; and Pal, A. Various Labelling on Bull Graph and some Related Graphs. *International Journal of Applications of Fuzzy Sets and Artifical Intelligence.* 2015;Vol 5:23-25.
[10] Havet, F. dan Yu, M. *(p-1)-Middle Labelling of Graph*, Discrete Mathematics. 2008; 308: 496-513.

NOVIA KRISTEFANY KABANG : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
noviakabang@gmail.com
YUNDARI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
yundari@math.untan.ac.id
FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
fransiskusfran@math.untan.ac.id