Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 09, No. 2 (2020), hal 319 – 328.

BILANGAN TERHUBUNG TOTAL PELANGI PADA GRAF GARIS DAN *DOUBLE* GRAF GARIS DARI GRAF SIKAT

Dorotea Rahmawati, Helmi, Fransiskus Fran

INTISARI

Pewarnaan graf G merupakan pemetaan himpunan titik di G ke himpunan warna dengan titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Salah satu pengembangan dari pewarnaan graf yang sering dibahas adalah pewarnaan total pelangi. Misalkan $G = \big(V(G), E(G)\big)$ adalah graf terhubung tak trivial. Pewarnaan total graf G disebut terhubung total pelangi jika memiliki lintasan total pelangi antara setiap dua titik di G. Lintasan total pelangi merupakan lintasan dengan semua sisi dan titik internal pada lintasan tersebut memiliki warna yang berbeda. Bilangan terhubung total pelangi pada graf G dinotasikan dengan $trc\ (G)$ yaitu jumlah warna terkecil yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi terhubung total pelangi. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai $trc\ (G)$ dimana G adalah graf garis dari graf sikat dan double graf garis dari graf sikat. Graf sikat dinotasikan B_n dengan $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ merupakan graf dengan $2n$ titik dan $2n-1$ sisi. Graf garis dari graf sikat $\big(L(B_n)\big)$ adalah graf dengan himpunan titik pada $L(B_n)$ merupakan himpunan sisi pada B_n. Double graf garis dari graf sikat $\Big(D\big(L(B_n)\big)\Big)$ merupakan graf yang terdiri dari dua graf $L(B_n)$ yang mempunyai lintasan yang sama. Berdasarkan penelitian ini diperoleh bilangan terhubung total pelangi pada graf garis dari graf sikat adalah $trc\ L(B_n) = 2n-1$ dan double graf garis dari graf sikat adalah $trc\ D\big(L(B_n)\big) = 2n+1$.

Kata kunci: *pewarnaan total pelangi, terhubung total pelangi, lintasan total pelangi*

PENDAHULUAN

Pewarnaan graf G merupakan pemetaan himpunan titik di G ke himpunan warna dengan titik yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Pewarnaan graf berkembang menjadi pewarnaan pelangi. Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial dan didefinisikan pewarnaan $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$ pada sisi-sisi di G dimana sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu lintasan $u - v$ di G adalah lintasan pelangi jika tidak ada dua sisi yang berwarna sama pada lintasan tersebut. Graf G dikatakan terhubung pelangi jika G memiliki sebuah lintasan pelangi $u - v$ untuk setiap dua titik u dan v di G. Dalam kasus ini pewarnaan c disebut pewarnaan pelangi di G [1].

Pewarnaan pelangi juga berkembang menjadi pewarnaan titik pelangi. Pewarnaan titik pada graf G disebut terhubung titik pelangi (pewarnaan titik pelangi) jika setiap dua titik yang terhubung oleh sebuah lintasan dimana titik internal pada lintasan tersebut memiliki warna yang berbeda [2].

Seiring berjalannya waktu, pewarnaan pelangi juga berkembang lagi menjadi pewarnaan total pelangi. Pewarnaan total pelangi merupakan pewarnaan pada titik dan sisi pada graf G sehingga setiap pasang titik pada graf G mempunyai lintasan total pelangi. Topik yang sering dikaji dalam konsep pewarnaan total pelangi adalah bilangan terhubung total pelangi pada beberapa graf khusus, misalnya pada graf sikel, graf roda, dan graf lengkap bipartit [3]. Oleh karena itu, pada penelitian ini dianalisis bilangan terhubung total pelangi pada graf garis dan *double* graf garis dari graf sikat. Graf sikat dinotasikan B_n dengan $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ dengan $2n$ titik dan $2n-1$ sisi merupakan graf yang dikonstruksi dari graf lintasan P_n dan graf bintang S_n. Graf lintasan P_n merupakan graf dengan n titik dan hanya mempunyai 1 lintasan untuk setiap pasang titiknya. Sedangkan graf bintang S_n merupakan graf dengan satu titik yang bertetangga dengan n titik lainnya. Semua graf-graf tersebut merupakan graf sederhana terhubung dan tak berarah, termasuk graf garis dan *double* graf garis dari graf sikat.

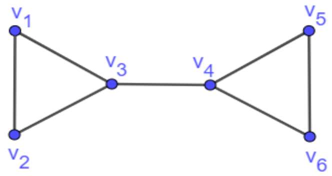
Langkah awal untuk menentukan bilangan terhubung total pelangi pada graf garis dan *double* graf garis dari graf sikat adalah membentuk graf garis dan *double* graf garis dari graf sikat. Setelah itu menentukan diameter dari masing-masing graf khusus, yang kemudian graf-graf ditentukan fungsi pewarnaan total pelangi c, dimana dari fungsi inilah diperoleh bilangan terhubung total pelangi, yaitu $trc\ (G)$.

BILANGAN TERHUBUNG TOTAL PELANGI

Pada bagian ini dibahas mengenai bilangan terhubung total pelangi. Namun sebelumnya diberikan definisi diameter dan lintasan total pelangi suatu graf G.

Definisi 1 [4]. Diameter suatu graf $\boldsymbol{G}$ adalah jarak terbesar untuk setiap dua titik pada graf $\boldsymbol{G}$. Diameter graf $\boldsymbol{G}$ dinotasikan dengan $\boldsymbol{diam\ (G)}$.

Sebagai ilustrasi dari Definisi 1, diberikan graf G_1 seperti Gambar 1.



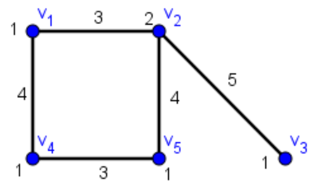
Gambar 1. Graf G_1

Berdasarkan Gambar 1, diperoleh bahwa jarak terbesar untuk setiap dua titik pada graf G_1 adalah 3, yaitu salah satunya dari titik v_1 ke v_5. Oleh karena itu, $diam\ (G_1) = 3$. Selanjutnya diberikan definisi mengenai lintasan total pelangi pada Definisi 2 dan terhubung total pelangi pada Definisi 3.

Definisi 2 [5]. Misalkan G graf terhubung dengan pewarnaan $c: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$. Sebuah lintasan P di G yang menghubungkan dua titik u dan v disebut lintasan total pelangi antara titik u dan v jika semua anggota di $V(P) \cup E(P)$, kecuali titik u dan v, diberi warna yang berbeda oleh c.

Definisi 3 [5]. Pewarnaan total pada suatu graf G merupakan terhubung total pelangi jika G memiliki lintasan total pelangi antara setiap dua titik di $V(G)$. Jumlah warna minimal yang dibutuhkan sehingga G bersifat terhubung total pelangi disebut bilangan terhubung total pelangi yang dinotasikan dengan $trc\ (G)$.

Sebagai ilustrasi Definisi 2 dan Definisi 3, diberikan graf G_2 seperti Gambar 2.



Gambar 2. Graf G_2

Berdasarkan Gambar 2, diperoleh setiap dua titik pada G_2 mempunyai lintasan total pelangi seperti yang disajikan pada Tabel 1. Oleh karena itu, G_2 dikatakan terhubung total pelangi.

Tabel 1 Lintasan Total Pelangi pada Graf $\boldsymbol{G_2}$

Lintasan total pelangi					
Titik	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	$-$	v_1, v_2	v_1, v_2, v_3	v_1, v_4	v_1, v_2, v_5
v_2	v_1, v_2	$-$	v_2, v_3	v_2, v_5, v_4	v_2, v_5
v_3	v_1, v_2, v_3	v_2, v_3	$-$	v_3, v_2, v_5, v_4	v_3, v_2, v_5
v_4	v_1, v_4	v_2, v_5, v_4	v_3, v_2, v_5, v_4	$-$	v_4, v_5
v_5	v_1, v_2, v_5	v_2, v_5	v_3, v_2, v_5	v_4, v_5	$-$

Pewarnaan total pelangi suatu graf G selalu dibutuhkan paling tidak $2\big(diam(G)\big)-1$ warna untuk mewarnai lintasan-lintasan setiap dua titik pada graf G. Oleh karena itu, diberikan proposisi berikut ini.

Proposisi 4 [3]. *Misalkan G graf terhubung tak trivial berdiameter $diam\,(G)$ maka $trc\,(G) \geq 2\,\big(diam\,(G)\big)-1$.*

Bilangan Terhubung Total Pelangi pada Graf Sikat B_n dan Graf Pembentuknya

Pada bagian ini, dibahas mengenai bilangan terhubung total pelangi pada graf sikat yang dinotasikan B_n. Namun sebelumnya dibahas mengenai bilangan terhubung total pelangi pada graf pembentuk dari graf sikat, yaitu graf lintasan P_n dan graf bintang S_n.

Teorema 5. *Graf lintasan P_n dengan n titik dan $n-1$ sisi, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Bilangan terhubung total pelangi pada graf P_n adalah $trc\,(P_n) = 2n-3$.*

Bukti. Dibentuk graf lintasan P_n dimana $u_i, v_j \in V(P_n)$, $i = 1, 2$ dan $j = 1, 2, \dots, n-2$, yang kemudian dilakukan pewarnaan total pada lintasan di diameter P_n. Graf P_n mempunyai n titik dan $n-1$ sisi, dimana titik-titik tersebut adalah titik u_1, u_2, dan v_i dengan $i = 1, 2, \dots, n-2$. Graf P_n mempunyai lintasan pada diameternya yaitu pada lintasan $u_1 - u_2$ dimana semua titik v_i merupakan titik internal pada lintasan tersebut dan graf P_n merupakan graf terhubung. Akibatnya, banyak sisi pada graf P_n juga merupakan diameternya. Jadi $diam\,(P_n) = n-1$ dengan titik internal P_n adalah $n-2$. Oleh karena itu, dengan menggunakan Proposisi 4 diperoleh:

$$trc\,(P_n) \geq 2\,\big(diam\,(P_n)\big) - 1$$
$$trc\,(P_n) \geq 2(n-1) - 1$$
$$trc\,(P_n) \geq 2n-3$$

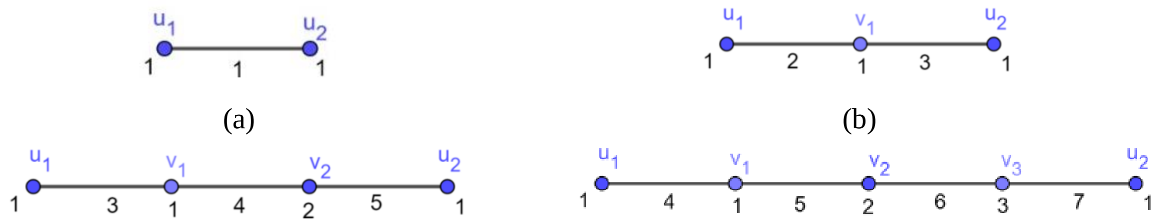
Banyak warna yang dibutuhkan untuk mewarnai lintasan di diameter P_n adalah $2n-3$ warna. Sebanyak $2n-3$ warna ini digunakan untuk mewarnai titik dan sisi yang lain, dengan setiap sisi dan titik pada graf P_n mempunyai warna yang berbeda, kecuali titik u_1, titik u_2, dan titik v_1. Akan tetapi titik u_1 dan titik u_2 bukan merupakan titik internal pada lintasan dua titik manapun, akibatnya setiap dua titik pada graf P_n mempunyai lintasan total pelangi. Lebih jelasnya, pewarnaan total tersebut dituliskan dalam bentuk fungsi pewarnaan total pelangi $c: V(P_n) \cup E(P_n) \to \{1, 2, \dots, 2n-3\}$ dimana:

$$\begin{aligned}
&c(u_i) = 1, && i = 1, 2\\
&c(v_i) = i, && i = 1, 2, \dots, n-2\\
&c(v_i v_{i+1}) = i + n - 1, && i = 1, 2, \dots, n-3\\
&c(u_1 v_1) = n-1 &&\\
&c(u_2 v_{n-2}) = 2n-3 &&
\end{aligned}$$

Bilangan terbesar yang dipetakan oleh fungsi c adalah $2n-3$. Sehingga dari konstruksi pewarnaan total pelangi c diperoleh $trc\,(P_n) \leq 2n-3$.

Oleh karena $trc\,(P_n) \geq 2n-3$ dan $trc\,(P_n) \leq 2n-3$, maka terbukti bahwa $trc\,(P_n) = 2n-3$. ■

Sebagai ilustrasi, diberikan graf lintasan P_n untuk $n = 2, 3, 4, 5$ dengan pewarnaan total pelangi.



(a) (b) (c) (d)

Gambar 3. (a) Graf P_2, (b) Graf P_3, (c) Graf P_4, (d) Graf P_5

Berdasarkan Gambar 3(a), diperoleh bahwa setiap dua titik pada graf P_2 memiliki lintasan total pelangi dan jumlah warna yang diperlukan untuk mewarnai P_2 sebanyak 1 warna, oleh karena itu $trc\ (P_2) = 1$. Begitu juga graf P_3 pada Gambar 3(b), graf P_4 pada Gambar 3(c), dan graf P_5 pada Gambar 3(d), dimana setiap dua pasang titik pada graf-graf tersebut mempunyai lintasan total pelangi, dan diperoleh $trc\ (P_3) = 3, trc\ (P_4) = 5,$ dan $trc\ (P_5) = 7$.

Teorema 6. *Misalkan G adalah graf bintang S_n dengan $n+1$ titik dan n sisi, $n \in \mathbb{N}$. Bilangan terhubung total pelangi pada graf bintang S_n adalah*

$$trc\ (S_n) = \begin{cases} 1, & jika\ n = 1 \\ n+1, & jika\ n \geq 2 \end{cases}$$

Bukti. Dibentuk graf bintang S_n dimana $u, v_i \in V(S_n),\ i = 1, 2, \dots, n,$ yang kemudian dilakukan pewarnaan total pada lintasan di diameter S_n, dimana $diam\,(S_n) = 2$ dengan titik internal dari diameter tersebut adalah 1. Oleh karena itu, warna yang diperlukan untuk mewarnai lintasan pada diameter graf S_n adalah sebanyak 3 warna. Artinya, paling tidak sebanyak 3 warna untuk mewarnai sisi dan titik lainnya. Setelah itu, diwarnai sisi maupun titik yang lain, dengan setiap sisi pada graf S_n memiliki warna yang berbeda, sedangkan semua titik S_n berwarna sama. Titik u bertetangga dengan semua titik v_i dengan $i = 1, 2, \dots, n$. Oleh karena itu, setiap lintasan $u - v_i$ jelas mempunyai lintasan total pelangi. Setiap lintasan $v_i - v_j$ dengan $i \neq j$ hanya mempunyai titik u sebagai titik internal, akibatnya setiap lintasan $v_i - v_j$ juga mempunyai lintasan total pelangi. Lebih jelasnya, pewarnaan total tersebut dituliskan dalam bentuk fungsi pewarnaan total pelangi $c: V(S_n) \cup E(S_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, n+1\}$ dimana:

$$\begin{aligned} &c(u) = 1 \\ &c(v_i) = 1, && i = 1,2, \dots, n \\ &c(uv_i) = i + 1, && i = 1,2, \dots, n \end{aligned}$$

(i) Kasus 1, untuk $n = 1$

Pada Teorema 5 telah dibuktikan bahwa $trc\ (P_n) = 2n - 3$, akibatnya $trc\ (P_2) = 1$. Graf S_1 sama dengan graf P_2, maka $trc\ (S_1) = 1$.

(ii) Kasus 2, untuk $n \geq 2$

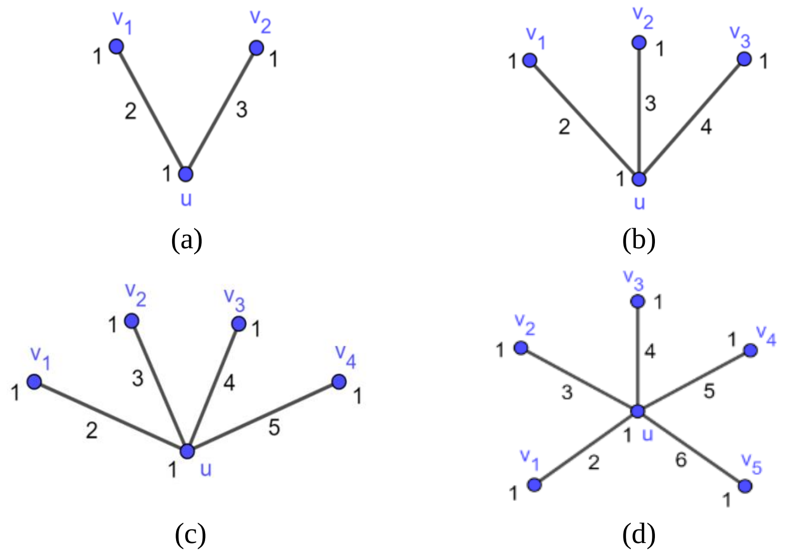
Bilangan terbesar yang dipetakan oleh fungsi c adalah $n+1$. Sehingga dari konstruksi pewarnaan total pelangi c diperoleh $trc\ (S_n) \leq n+1$.

Pada kasus 2, yaitu untuk $n \geq 2$, yang dibuktikan adalah $trc\ (S_n) = n+1$, dan dari fungsi c diperoleh bahwa $trc\ (S_n) \leq n+1$. Oleh karena itu, yang dibuktikan selanjutnya adalah $trc\ (S_n) \nless n+1$ dengan menggunakan pembuktian kontradiksi.

Andaikan $trc\ (S_n) < n+1$. Ambil sebanyak n warna atau $trc\ (S_n) = n$. Pada graf S_n, setiap lintasan dua titik, paling banyak memiliki 1 titik internal, yaitu titik u, sehingga warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik pada graf bintang S_n adalah sebanyak 1 warna dengan warna titik v_i dimana $i = 1, 2, \dots, n$ mempunyai warna yang sama dengan titik u. Oleh karena $trc\ (S_n) = n$, maka tersisa $n - 1$ warna untuk mewarnai sisi-sisi pada graf bintang S_n. Banyak sisi pada graf bintang S_n adalah sebanyak n, akibatnya ada satu 1 sisi yang memiliki warna yang sama dengan sisi yang lain. Misalkan terdapat $c(v_i u) = c(v_j u), i \neq j$ dengan c merupakan fungsi pewarnaan total pelangi. Setiap lintasan dua titik pada S_n hanya mempunyai satu lintasan, akibatnya lintasan $v_i - v_j$ yaitu v_i, u, v_j tidak mempunyai lintasan total pelangi. Oleh karena itu, pengandaian $trc\ (S_n) = n$ kontradiksi dengan definisi terhubung total pelangi. Sehingga terbukti bahwa $trc\ (S_n) \nless n+1$. Akibatnya, dikarenakan $trc\ (S_n) \leq n+1$ dan diperoleh $trc\ (S_n) \nless n+1$, maka $trc\ (S_n) = n+1$.

Jadi terbukti bahwa $trc\ (S_n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ n+1, & n \geq 2 \end{cases}$. ■

Sebagai ilustrasi, diberikan graf bintang S_n untuk $n = 2, 3, 4, 5$ dengan pewarnaan total pelangi.



Gambar 4. (a) Graf S_2, (b) Graf S_3, (c) Graf S_4, dan (d) Graf S_5

Berdasarkan Gambar 4(a), diperoleh bahwa setiap dua titik pada graf S_2 memiliki lintasan total pelangi dan jumlah warna yang diperlukan untuk mewarnai S_2 sebanyak 3 warna, oleh karena itu $trc\ (S_2) = 3$. Begitu juga graf S_3 pada Gambar 4(b), graf S_4 pada Gambar 4(c), dan graf S_5 pada Gambar 4(d), dimana setiap dua pasang titik pada graf-graf tersebut mempunyai lintasan total pelangi, dan diperoleh $trc\ (S_3) = 4, trc\ (S_4) = 5$, dan $trc\ (S_5) = 6$.

Teorema 7. *Graf sikat B_n dengan $2n$ titik dan $2n - 1$ sisi, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Bilangan terhubung total pelangi pada graf sikat B_n adalah $trc(B_n) = 3n - 1$.*

Bukti. Dibentuk graf sikat B_n dimana $u_i, v_i \in V(B_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, yang kemudian dilakukan pewarnaan total pada lintasan di diameter B_n, dimana $diam\ (B_n) = n + 1$ dengan titik internal dari lintasan di diameter tersebut adalah n. Oleh karena itu, warna yang diperlukan untuk mewarnai lintasan pada diameter graf B_n adalah sebanyak $2n + 1$ warna. Artinya, paling tidak sebanyak $2n + 1$ warna untuk mewarnai sisi dan titik lainnya. Setelah itu, diwarnai sisi maupun titik yang lain, dengan semua sisi dan titik diberi warna yang berbeda satu sama lain, kecuali titik u_i dengan $i = 1,2, \dots, n$ yang diberi warna yang sama dengan titik v_1. Oleh karena titik u_i bukan merupakan titik internal pada lintasan dua titik manapun, maka setiap pasang titik di B_n mempunyai lintasan total pelangi. Lebih jelasnya, pewarnaan total tersebut dituliskan dalam bentuk fungsi pewarnaan total pelangi $c: V(B_n) \cup E(B_n) \to \{1, 2, \dots, 3n - 1\}$ dimana:

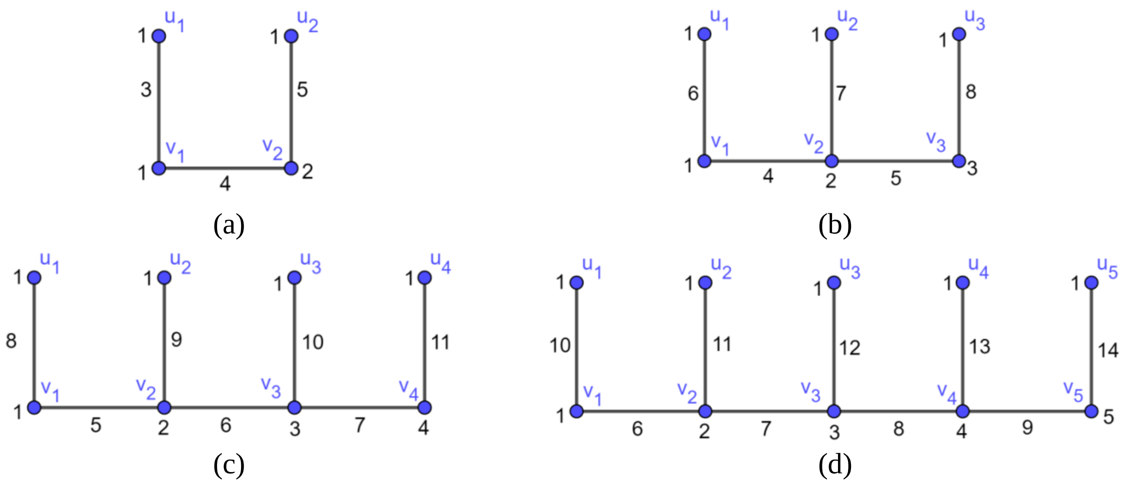
$$\begin{aligned}
c(u_i) &= 1, & i &= 1,2,\dots,n\\
c(v_i) &= i, & i &= 1,2,\dots,n\\
c(u_i v_i) &= 2n + i - 1, & i &= 1,2,\dots,n\\
c(v_i v_{i+1}) &= i + n, & i &= 1,2,\dots,n-1
\end{aligned}$$

Bilangan terbesar yang dipetakan oleh fungsi c adalah $3n - 1$. Sehingga dari konstruksi pewarnaan total pelangi c diperoleh $trc\ (B_n) \leq 3n - 1$.

Pada Teorema 7 yang dibuktikan adalah $trc\ (B_n) = 3n - 1$, dan dari fungsi c diperoleh $trc\ (B_n) \leq 3n - 1$. Oleh karena itu, yang dibuktikan selanjutnya adalah $trc\ (B_n) \nless 3n - 1$ dengan menggunakan pembuktian kontradiksi.

Andaikan $trc\ (B_n) < 3n - 1$. Ambil sebanyak $3n - 2$ warna atau $trc\ (B_n) = 3n - 2$. Titik u_i dengan $i = 1, 2, \dots, n$ bukan merupakan titik internal untuk lintasan setiap dua titik yang berbeda, akibatnya semua titik u_i dapat diberi warna yang sama satu sama lain. Sehingga warna yang dibutuhkan untuk mewarnai titik u_i adalah 1. Setiap titik v_i merupakan titik yang berada pada diameter B_n, jadi perlu penambahan $n-1$ warna lagi untuk mewarnai titik v_i, sedangkan 1 titik v_i yang belum terwarnai bisa diberi warna yang sama dengan titik yang bukan merupakan titik internal, yaitu titik u_i. Jadi warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik pada graf Sikat B_n adalah sebanyak n warna. Oleh karena $trc\ (B_n) = 3n-2$, maka tersisa $3n-2-n = 2n-2$ warna untuk mewarnai sisi-sisi pada graf sikat B_n, padahal banyak sisi pada graf sikat B_n adalah sebanyak $2n-1$. Akibatnya ada satu sisi yang akan memiliki warna yang sama dengan sisi yang lain. Misalkan $c(u_iv_i) = c(u_jv_j)$ dan c merupakan fungsi pewarnaan total pelangi, dengan B_n memiliki suatu lintasan $u_i - u_j$. Setiap lintasan dua titik pada B_n hanya mempunyai satu lintasan, akibatnya lintasan $u_i - v_j$ yaitu $u_i, v_i, \dots, v_j, u_j$ tidak mempunyai lintasan total pelangi. Begitu pula jika $c(u_iv_i) = c(v_{j-1}v_j)$, maka lintasan $u_i, v_i, \dots, v_{j-1}, v_j$ tidak mempunyai lintasan total pelangi. Ataupun jika $c(v_iv_{i+1}) = c(v_{j-1}v_j)$, maka lintasan $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j$ tidak mempunyai lintasan total pelangi. Oleh karena itu, pengandaian $trc\ (B_n) = 3n-2$ kontradiksi dengan definisi terhubung total pelangi. Sehingga terbukti bahwa $trc\ (B_n) \nless 3n-1$. Akibatnya, dikarenakan $trc\ (B_n) \leq 3n-1$ dan diperoleh $trc\ (B_n) \nless 3n-1$, maka $trc\ (B_n) = 3n-1$. ■

Sebagai ilustrasi, diberikan graf sikat B_n untuk $n = 2, 3, 4, 5$ dengan pewarnaan total pelangi.



Gambar 5. (a) Graf B_2, (b) Graf B_3, (c) Graf B_4, dan (d) Graf B_5

Berdasarkan Gambar 5(a), diperoleh bahwa setiap dua titik pada graf B_2 memiliki lintasan total pelangi dan jumlah warna yang diperlukan untuk mewarnai B_2 sebanyak 5 warna, oleh karena itu $trc\ (B_2) = 5$. Begitu juga graf B_3 pada Gambar 5(b), graf B_4 pada Gambar 5(c), dan graf B_5 pada Gambar 5(d), dimana setiap dua pasang titik pada graf-graf tersebut mempunyai lintasan total pelangi, dan diperoleh $trc\ (B_3) = 8, trc\ (B_4) = 11,$ dan $trc\ (B_5) = 14$.

Bilangan Terhubung Total Pelangi pada Graf Garis dari Graf Sikat $L(B_n)$

Pada bagian ini, dibahas mengenai bilangan terhubung total pelangi pada graf garis dari graf sikat yang dinotasikan $L(B_n)$.

Definisi 8 [5]. *Graf garis pada suatu graf G dinotasikan dengan $L(G)$ merupakan graf dengan himpunan titik-titiknya adalah $E(G)$, dimana dua titiknya bertetangga jika dan hanya jika sisi yang bersesuaian bertetangga di G.*

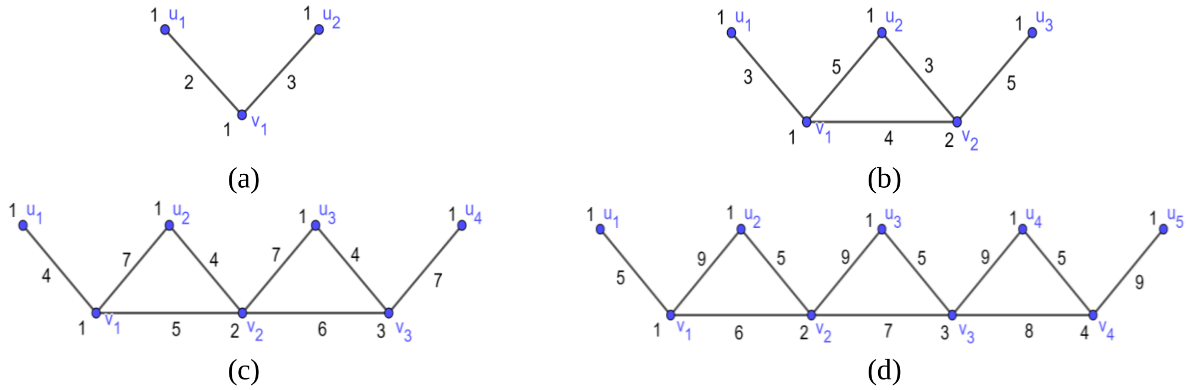
Teorema 9. *Graf garis dari graf sikat B_n yang dinotasikan $L(B_n)$ memiliki bilangan terhubung total pelangi yaitu $trc\ L(B_n) = 2n-1$.*

Bukti. Dibentuk graf garis dari graf sikat $L(B_n)$ dimana $u_i, v_j \in V(L(B_n))$, $i = 1, 2, \dots, n$, dan $j = 1, 2, \dots, n-1$, yang kemudian dilakukan pewarnaan total pada lintasan di diameter $L(B_n)$. Diameter dari graf $L(B_n)$ adalah panjang lintasan $u_1, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, u_n$, yang berarti ada sebanyak

$n+1$ titik dengan titik internal sebanyak $n-1$ dan n sisi pada lintasan di diameter $L(B_n)$, akibatnya $diam\ L(B_n) = n$. Dengan menggunakan Proposisi 4 diperoleh $trc\ \ L(B_n) \geq 2n-1$.
Oleh karena $diam\ L(B_n) = n$ dan titik internal pada lintasan di diameter $L(B_n)$ adalah $n-1$, maka sebanyak $2n-1$ warna untuk mewarnai diameter $L(B_n)$. Sehingga sebanyak $2n-1$ warna itu juga digunakan untuk mewarnai titik dan sisi lainnya, sehingga titik $u_i - u_j$ untuk $i \neq j$ mempunyai lintasan total pelangi pada lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, u_j$. Setiap titik v_k dengan $k = 1, 2, \dots, n-1$ merupakan titik internal pada lintasan $u_i - u_j$, akibatnya setiap lintasan $v_i - v_j$ juga mempunyai lintasan total pelangi. Lebih jelasnya, pewarnaan total tersebut dituliskan dalam bentuk fungsi pewarnaan total pelangi $c: V(L(B_n)) \cup E\big(L(B_n)\big) \to \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ dimana:

$$
\begin{array}{ll}
c(u_i) = 1, & i = 1,2, \dots, n \\
c(v_i) = i, & i = 1,2, \dots, n-1 \\
c(u_i v_i) = n, & i = 1,2, \dots, n-1 \\
c(u_{i+1} v_i) = 2n-1, & i = 1,2, \dots, n-1 \\
c(v_i v_{i+1}) = i+n, & i = 1,2, \dots, n-2
\end{array}
$$

Bilangan terbesar yang dipetakan oleh fungsi c adalah $2n-1$. Sehingga dari konstruksi pewarnaan total pelangi c diperoleh $trc\ L(B_n) \leq 2n-1$.
Oleh karena $trc\ L(B_n) \geq 2n-1$ dan $trc\ L(B_n) \leq 2n-1$, maka bilangan terhubung total yang memenuhi adalah $trc\ \ L(B_n) = 2n-1$. ■
Sebagai ilustrasi, diberikan graf garis dari graf sikat $L(B_n)$ untuk $n = 2, 3, 4, 5$ dengan pewarnaan total pelangi.



Gambar 6. (a) Graf $L(B_2)$, (b) Graf $L(B_3)$, (c) Graf $L(B_4)$, dan (d) Graf $L(B_5)$

Berdasarkan Gambar 6(a), diperoleh bahwa setiap dua titik pada graf $L(B_2)$ memiliki lintasan total pelangi dan jumlah warna yang diperlukan untuk mewarnai $L(B_2)$ sebanyak 3 warna, oleh karena itu $trc\ L(B_2) = 3$. Begitu juga graf $L(B_3)$ pada Gambar 6(b), graf $L(B_4)$ pada Gambar 6(c), dan graf $L(B_5)$ pada Gambar 6(d), dimana setiap dua pasang titik pada graf-graf tersebut mempunyai lintasan total pelangi, dan diperoleh $trc\ L(B_3) = 5, trc\ L(B_4) = 7$, dan $trc\ L(B_5) = 9$.

Bilangan Terhubung Total Pelangi pada *Double* Graf Garis dari Graf Sikat $D\big(L(B_n)\big)$

Pada bagian ini, dibahas mengenai bilangan terhubung total pelangi pada *double* graf garis dari graf sikat yang dinotasikan $D\big(L(B_n)\big)$.

Definisi 10 [6]. *Double graf garis dari graf sikat dinotasikan dengan $D\big(L(B_n)\big)$ yang terdiri dari dua graf garis dari graf sikat yang mempunyai sebuah lintasan yang sama.*

Teorema 11. *Double* graf garis dari graf sikat B_n yang dinotasikan $D\big(L(B_n)\big)$ memiliki bilangan terhubung total pelangi, yaitu $trc\ D\big(L(B_n)\big) = 2n+1$.

Bukti. Dibentuk graf garis dari graf sikat dengan $u_i, v_j, w_k \in V\left(D\big(L(B_n)\big)\right)$ dengan $i = 1, 2, \dots, n-1$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, n$, yang kemudian dilakukan pewarnaan total pada lintasan di diameter

$D\big(L(B_n)\big)$, dimana $diam\ D\big(L(B_n)\big) = n$ dengan titik internal dari lintasan di diameter tersebut adalah $n - 1$. Oleh karena itu, warna yang diperlukan untuk mewarnai lintasan pada diameter graf $D\big(L(B_n)\big)$ adalah sebanyak $2n - 1$ warna. Artinya, paling tidak sebanyak $2n - 1$ warna untuk mewarnai sisi dan titik lainnya, dengan titik $v_i - v_j$ untuk $i \neq j$ memiliki lintasan total pelangi yaitu pada lintasan $v_i, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, v_j$, dan titik $w_i - w_j$ untuk $i \neq j$ memiliki lintasan total pelangi yaitu pada lintasan $w_i, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, w_j$, serta titik $w_i - v_j$ untuk $i \neq j$ memiliki lintasan total pelangi yaitu pada lintasan $w_i, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, v_j$. Oleh karena itu, setiap titik u_i ke u_j juga memiliki lintasan total pelangi. Artinya setiap pasang titik di $D\big(L(B_n)\big)$ mempunyai lintasan total pelangi. Lebih jelasnya, pewarnaan total tersebut dituliskan dalam bentuk fungsi pewarnaan total pelangi $c: V\Big(D\big(L(B_n)\big)\Big) \cup E\Big(D\big(L(B_n)\big)\Big) \to \{1, 2, \dots, 2n+1\}$ dimana:

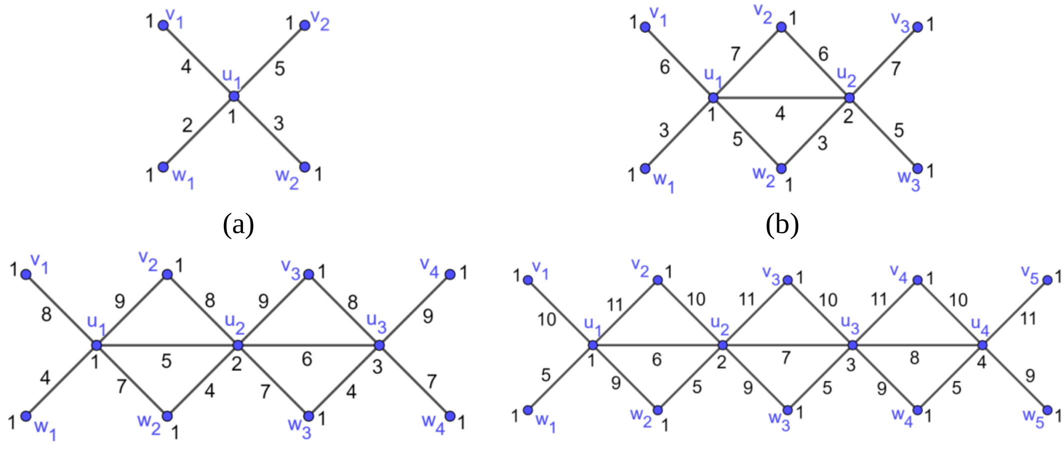
$$\begin{array}{ll}
c(u_i) = i, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\
c(v_i) = c(w_i) = 1, & i = 1, 2, \dots, n \\
c(u_i u_{i+1}) = i + n, & i = 1, 2, \dots, n-2 \\
c(u_i v_i) = 2n, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\
c(u_i v_{i+1}) = 2n + 1, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\
c(u_i w_i) = n, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\
c(v_i w_{i+1}) = 2n - 1, & i = 1, 2, \dots, n-1
\end{array}$$

Bilangan terbesar yang dipetakan oleh fungsi c adalah $2n + 1$. Sehingga dari konstruksi pewarnaan total pelangi c diperoleh $trc\ D\big(L(B_n)\big) \leq 2n + 1$.

Pada Teorema 11 yang dibuktikan adalah $trc\ D\big(L(B_n)\big) = 2n + 1$, dan dari fungsi c diperoleh $trc\ D\big(L(B_n)\big) \leq 2n + 1$. Oleh karena itu, yang dibuktikan selanjutnya adalah $trc\ D\big(L(B_n)\big) \nless 2n + 1$ dengan menggunakan pembuktian kontradiksi.

Andaikan $trc\ D\big(L(B_n)\big) < 2n + 1$. Ambil sebanyak $2n$ warna atau $trc\ D\big(L(B_n)\big) = 2n$. Graf $D\big(L(B_n)\big)$ mempunyai diameter sebanyak n, oleh karena itu setidaknya perlu $n - 1$ warna untuk mewarnai titik dari w_1 ke w_n atau dari v_1 ke v_n yang sama-sama merupakan diameter dari $D\big(L(B_n)\big)$. Pada konstruksi pewarnaan titik diperoleh warna yang perlukan untuk mewarnai semua titik pada $D\big(L(B_n)\big)$ sebanyak $n - 1$ warna juga. Sehingga jumlah warna untuk mewarnai semua titik pada graf $D\big(L(B_n)\big)$ cukup dengan $n - 1$ warna saja. Oleh karena $trc\ D\big(L(B_n)\big) = 2n$, maka warna yang tersisa setelah diwarnai semua titik pada $D\big(L(B_n)\big)$ adalah sebanyak $2n - (n - 1) = n + 1$ warna, dan sisa warna tersebut digunakan untuk mewarnai diameternya yaitu dari titik w_1 ke w_n atau dari v_1 ke v_n. Setelah diwarnai diameternya, maka warna yang tersisa adalah 1 warna. Pada $D\big(L(B_n)\big)$, lintasan dari titik w_1 dan v_1 ke titik lainnya harus melewai titik u_1 dan lintasan dari titik w_n dan v_n ke titik lainnya harus melewati titik u_{n-1}, akibatnya diperlukan 4 warna yang berbeda untuk mewarnai sisi $(u_1 w_1)$, sisi $(u_1 v_1)$, sisi $(u_{n-1} w_n)$, dan sisi $(u_{n-1} v_1)$. Jika diameter yang diwarnai sebelumnya adalah dari titik w_1 ke w_n, maka hanya perlu 2 warna berbeda yang digunakan untuk mewarnai sisi $(u_1 v_1)$ dan sisi $(u_{n-1} v_1)$ karena sisi $(u_1 w_1)$ dan sisi $(u_{n-1} w_n)$ sudah terwarnai dengan warna yang berbeda. Akan tetapi warna yang tersisa hanyalah 1 warna, akibatnya satu diantara sisi $(u_1 v_1)$ dan sisi $(u_{n-1} v_1)$ akan memiliki warna yang sama dengan sisi lainnya. Sehingga akan ada lintasan dari $w_1 - v_n$ yaitu $w_1, u_1, \dots, u_{n-1}, v_n$ atau $w_n - v_1$ yaitu $w_n, u_{n-1}, \dots, u_1, v_1$ yang tidak memiliki lintasan total pelangi, yang berarti pengandaian $trc\ D\big(L(B_n)\big) = 2n$ kontradiksi dengan definisi terhubung total pelangi. Sehingga terbukti bahwa $trc\ D\big(L(B_n)\big) \nless 2n + 1$. Akibatnya, dikarenakan $trc\ D\big(L(B_n)\big) \leq 2n + 1$ dan diperoleh $trc\ D\big(L(B_n)\big) \nless 2n + 1$, maka $trc\ D\big(L(B_n)\big) = 2n + 1$. ■

Sebagai ilustrasi, diberikan *double* graf garis dari graf sikat $D\big(L(B_n)\big)$ untuk $n = 2, 3, 4, 5$ dengan pewarnaan total pelangi.



(a) (b) (c) (d)

Gambar 7. (a) Graf $D\big(L(B_2)\big)$, (b) Graf $D\big(L(B_3)\big)$, (c) Graf $D\big(L(B_4)\big)$, dan (d) Graf $D\big(L(B_5)\big)$

Berdasarkan Gambar 7(a), diperoleh bahwa setiap dua titik pada graf $D\big(L(B_2)\big)$ memiliki lintasan total pelangi dan jumlah warna yang diperlukan untuk mewarnai $D\big(L(B_2)\big)$ sebanyak 5 warna, oleh karena itu $trc\ D\big(L(B_2)\big) = 5$. Begitu juga graf $D\big(L(B_3)\big)$ pada Gambar 7(b), graf $D\big(L(B_4)\big)$ pada Gambar 7(c), dan graf $D\big(L(B_5)\big)$ pada Gambar 7(d), dimana setiap dua pasang titik pada graf-graf tersebut mempunyai lintasan total pelangi, dan diperoleh $trc\ D\big(L(B_3)\big) = 7, trc\ D\big(L(B_4)\big) = 8$, dan $trc\ D\big(L(B_5)\big) = 11$.

KESIMPULAN

Bilangan terhubung total pelangi suatu graf G dinotasikan $trc\,(G)$ merupakan jumlah warna minimal yang digunakan sehingga graf G bersifat terhubung total pelangi. Nilai $trc\,(G)$ dapat ditentukan dengan mewarnai semua sisi dan titik pada graf G dengan jumlah warna seminimal mungkin, dimana dengan pewarnaan yang dilakukan membuat setiap pasang titik di G memiliki lintasan total pelangi. Berdasarkan penelitian yang dilakukan, diperoleh bahwa bilangan terhubung total pelangi pada graf garis dan *double* graf garis dari graf sikat beserta graf pembentuknya adalah sebagai berikut:

1. Bilangan terhubung pelangi pada graf lintasan adalah $trc\,(P_n) = 2n - 3$.
2. Bilangan terhubung total pelangi pada graf bintang adalah $trc\,(S_n) = 1$ untuk $n = 1$ dan $trc\,(S_n) = n + 1$ untuk $n \geq 2$.
3. Bilangan terhubung total pelangi pada graf sikat adalah $trc\,(B_n) = 3n - 1$.
4. Bilangan terhubung total pelangi pada graf garis dari graf sikat adalah $trc\ L(B_n) = 2n - 1$.
5. Bilangan terhubung total pelangi pada *double* graf garis dari graf sikat adalah $trc\ D\big(L(B_n)\big) = 2n + 1$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Chartrand G, Kalamazoo, Garry LJ, Valley S. Rainbow Connection in Graphs. *Mathematica Bohemica*.2008; 133:85-98.

[2]. Krivelevich M, Yuster R. The Rainbow Connection of a Graph Is (at Most) Reciprocal to Its Minimum Degree. *Journal of Graph Theory*.2009;185-191.

[3]. Liu H, Mestre A, Sousa T. Total Rainbow k-Connection in Graphs. *Discrete Applied Mathematics*.2014; 174:92-101.

[4]. Chartrand G dan Lesniak L. *Graphs and Digraph*. Bota Raton: Chapman and Hall; 1996.

[5]. Sun Y. On Rainbow Total-Coloring of a Graph. *Discrete Applied Mathematics*.2015; 194:171-177.

[6]. Alatif M, Rangaiah P, Nayaka SR. Boundary Domination of Line and Middle Graph of Wheel Graph Families. *International Journal of Computer Applications*.2016; 134:1-5.

[7]. Sandhya SS, Merly EER, Kavitha S. Super Stolarky-3 Mean Labeling of Quadrilateral Snake Graphs. *International Journal of Computational and Applied Mathematics*.2018; 13:1-7.

DOROTEA RAHMAWATI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, dorotearahmawati3@gmail.com

HELMI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, helmi@math.untan.ac.id

FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, fransiskusfran@math.untan.ac.id