Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 02, No. 3 (2013), hal 197 – 204.

ANALISIS DINAMIKA MODEL KOMPETISI DUA POPULASI YANG HIDUP BERSAMA DI TITIK KESETIMBANGAN TIDAK TERDEFINISI

Eka Nila Lospayadi Nurhamiyawan, Bayu Prihandono, Helmi

INTISARI

Model kompetisi dua populasi merupakan suatu model matematika yang menggambarkan persaingan antar individu dalam satu populasi dan persaingan antar dua populasi untuk mendapatkan kebutuhan hidup yang sama. Model kompetisi dua populasi direpresentasikan dengan suatu sistem persamaan diferensial biasa nonlinear autonomus. Dinamika populasi erat kaitannya dengan pertumbuhan populasi, kesetimbangan populasi dan kestabilan. Dalam pemodelan matematika, suatu keadaan saat tidak terjadi perubahan jumlah populasi seiring berjalannya waktu diwakili oleh sebuah titik yang disebut titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan dalam model kompetisi dua populasi mewakili beberapa kondisi yaitu kondisi saat kedua populasi punah, kondisi saat hanya populasi pertama hidup, kondisi saat hanya populasi kedua hidup, dan kondisi saat populasi pertama dan kedua hidup bersama. Titik kesetimbangan dalam dinamika populasi digunakan pada proses linearisasi sistem persamaan diferensial nonlinear untuk mendapatkan informasi kestabilan dari suatu sistem. Dalam suatu kondisi memungkinkan adanya titik kesetimbangan tidak terdefinisi, akibatnya kestabilan dari titik kesetimbangan tidak dapat diketahui dengan proses linearisasi sehingga tidak dapat diketahui dinamika populasi yang terjadi. Penelitian ini menganalisis dinamika model kompetisi dua populasi yang hidup bersama di titik kesetimbangan tidak terdefinisi. Model kompetisi dua populasi dianalisis secara analitik untuk mendapatkan solusi berupa persamaan pertumbuhan populasi terhadap waktu. Solusi dan grafik dari pertumbuhan populasi terhadap waktu menunjukan dinamika populasi yang stabil dari model kompetisi dua populasi yang hidup bersama di titik kesetimbangan tidak terdefinisi.

Kata kunci*: model kompetisi, titik kesetimbangan,kestabilan dan tidak terdefinisi.*

PENDAHULUAN

Ekologi merupakan salah satu cabang ilmu biologi yang mempelajari makhluk hidup seperti manusia, hewan dan tumbuhan yang hidup bersama dan saling mempengaruhi di dalam lingkungannya. Makhluk hidup tunggal biasa disebut individu, dan populasi merupakan kumpulan individu sejenis yang berinteraksi pada tempat dan waktu yang sama. Berbagai populasi dari spesies yang berbeda dan hidup bersama disebut komunitas. Satu kelompok yang memiliki ciri khas tertentu dan terdiri dari beberapa komunitas yang berbeda dikenal dengan ekosistem. Bertambahnya anggota populasi menyebabkan kepadatan populasi bertambah sehingga antar individu harus bersaing untuk mencukupi kebutuhan hidup masing-masing. Kompetisi dalam suatu ekosistem merupakan salah satu bentuk interaksi antar individu yang bersaing memperebutkan kebutuhan hidup yang sama. Pada individu hewan, kebutuhan hidup yang sering diperebutkan antara lain adalah makanan, sumber air, tempat berlindung atau bersarang dan pasangan untuk kawin. Contoh kompetisi antar populasi hewan yaitu kambing dan sapi yang memakan rumput di wilayah yang sama atau harimau dan singa dalam berburu mangsa yang sama[1].

Model kompetisi dua populasi merupakan suatu model matematika yang menggambarkan persaingan antar individu dalam satu populasi dan persaingan antar dua populasi untuk mendapatkan kebutuhan hidupnya[2]. Model perkembangan populasi dari dua populasi yang saling berkompetisi direpresentasikan dalam suatu sistem persamaan diferensial nonlinear autonomus [3]. Kesetimbangan dalam populasi merupakan suatu keadaan saat tidak terjadi perubahan jumlah populasi seiring berjalannya waktu. Dalam pemodelan matematika kesetimbangan diwakili oleh sebuah titik yang disebut titik kesetimbangan[3]. Dalam suatu kondisi memungkinkan adanya titik kesetimbangan tidak terdefinisi, akibatnya kestabilan dari titik kesetimbangan tidak dapat dihitung sehingga tidak dapat diketahui dinamika populasi yang terjadi. Pada penelitian ini dianalisis dinamika populasi pada titik kesetimbangan tidak terdefinisi dan saat kedua populasi hidup bersama. Sehingga dapat diketahui dinamika populasi yang terjadi dan kemungkinan kedua populasi dapat hidup bersama.

Tujuan dari penelitian ini adalah menganalisis dinamika model kompetisi dua populasi yang hidup bersama di titik kesetimbangan tidak terdefinisi. Populasi yang dibicarakan dalam penelitian ini berupa populasi hewan. Jumlah populasi meningkat karena faktor kelahiran, dan jumlah populasi menurun karena faktor kematian yang diakibatkan oleh persaingan antar individu dalam populasi maupun persaingan antar dua populasi. Diasumsikan faktor-faktor seperti bencana alam, kematian alami, migrasi dan lain-lain tidak mempengaruhi model. Dalam ekosistem, interaksi yang terjadi hanya antar individu dalam populasi dan antar dua populasi dengan kebutuhan hidup yang diperebutkan yaitu sumber makanan yang terbatas.

Analisis dinamika model kompetisi dua populasi yang hidup bersama di titik kesetimbangan tidak terdefinisi dimulai dengan mencari titik-titik kesetimbangan dari sistem. Selanjutnya dipilih titik kesetimbangan yang mewakili kondisi hidup bersama untuk dilakukan linearisasi sistem dengan martriks Jacobian. Setelah itu, dicari nilai-nilai eigen dari matriks Jacobian sehingga didapat kestabilan dari sistem pada titik kesetimbangan yang mewakili kondisi hidup bersama. Pada titik kesetimbangan tidak terdefinisi, informasi kestabilan dengan proses linearisasi pada titik kesetimbangan tidak dapat dilakukan. Jadi, untuk mendapatkan informasi dinamika populasi dari model kompetisi dua populasi yang hidup bersama di titik kesetimbangan tidak terdefinisi dilakukan analisis secara analitik. Langkah-langkah analisis secara analitik yang dilakukan yaitu penyederhanaan sistem dengan sifat assosiatif, substitusi persamaan, reduksi sistem dan mengintegralkan sehingga didapatkan solusi berupa persamaan pertumbuhan populasi terhadap waktu. Solusi dan grafik dari pertumbuhan populasi terhadap waktu menunjukkan dinamika populasi yang terjadi dan informasi kestabilan dari model kompetisi dua populasi yang hidup bersama di titik kesetimbangan tidak terdefinisi.

MODEL KOMPETISI DUA POPULASI

Model kompetisi dua populasi merupakan suatu model matematika yang menggambarkan persaingan antar individu dalam satu populasi atau persaingan antara dua populasi untuk mendapatkan kebutuhan hidupnya. Model kompetisi dua populasi direpresentasikan dengan sistem persamaan diferensial biasa nonlinear autonomus berikut

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = N(a_1 - b_{11}N - b_{12}M), \\ \dfrac{dM}{dt} = M(a_2 - b_{21}N - b_{22}M). \end{cases} \tag{1}$$

Keterangan Variabel :

t	: Waktu
N	: Jumlah populasi pertama pada saat t
M	: Jumlah populasi kedua pada saat t

Keterangan Parameter :

a_1	: Tingkat kelahiran populasi pertama
a_2	: Tingkat kelahiran populasi kedua
b_{11}	: Tingkat kematian populasi pertama karena persaingan individu dalam populasi
b_{12}	: Tingkat kematian populasi pertama karena persaingan dengan populasi kedua
b_{21}	: Tingkat kematian populasi kedua karena persaingan dengan populasi pertama
b_{22}	: Tingkat kematian populasi kedua karena persaingan individu dalam populasi

Semua parameter diasumsikan positif. Sistem (1) memiliki solusi jika masing-masing persamaan deferensiabel dan kontinu[2]. Titik kesetimbangan pada Sistem (1) menggambarkan suatu posisi atau keadaan dari jumlah populasi yang tetap dan tidak terpengaruh oleh perubahan waktu. Titik–titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan $\frac{dN}{dt} = 0$ dan $\frac{dM}{dt} = 0$ [3], sehingga Sistem (1) menjadi

$$N(a_1 - b_{11}N - b_{12}M) = 0 \tag{2}$$

$$M(a_2 - b_{21}N - b_{22}M) = 0. \tag{3}$$

Untuk mendapatkan titik-titik kesetimbangan dari Sistem (1) maka dicari solusi-solusi dari Persamaan (2) dan (3) sehingga didapat 4 titik kesetimbangan $(\bar{N}, \bar{M})$yaitu

1. Titik kesetimbangan (0,0) mewakili kondisi saat populasi pertama ($\bar{N}$) dan kedua ($\bar{M}$) tidak ada atau punah.
2. Titik kesetimbangan $(0,\frac{a_2}{b_{22}})$ mewakili kondisi saat populasi pertama ($\bar{N}$) mati dan populasi kedua ($\bar{M}$) hidup.
3. Titik kesetimbangan $(\frac{a_1}{b_{11}},0)$ mewakili kondisi saat populasi pertama ($\bar{N}$) hidup dan populasi kedua ($\bar{M}$) punah.
4. Titik kesetimbangan $(\frac{a_1b_{22}-a_2b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}},\frac{a_2b_{11}-a_1b_{21}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}})$ mewakili kondisi saat populasi pertama ($\bar{N}$) dan kedua ($\bar{M}$) ada atau hidup bersama.

Titik kesetimbangan (0,0), $(0,\frac{a_2}{b_{22}})$ dan $(\frac{a_1}{b_{11}},0)$ merupakan titik-titik yang berada pada kuadran pertama. Karena populasi harus tidak negatif maka titik kesetimbangan keempat yaitu $\bar{N} = \frac{a_1b_{22}-a_2b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}$, $\bar{M} = \frac{a_2b_{11}-a_1b_{21}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}$ atau $(\frac{a_1b_{22}-a_2b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}},\frac{a_2b_{11}-a_1b_{21}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}})$ ada jika titik berada di kuadran pertama sehingga nilai $\bar{N}$, $\bar{M}$ harus positif. Penelitian ini menganalisis kondisi saat kedua populasi hidup bersama yaitu pada titik kesetimbangan ke-4 untuk mendapatkan informasi dinamika populasi yang terjadi dari kompetisi populasi pertama dan kedua.

Suatu populasi yang berada dalam keadaan stabil di titik kesetimbangan memiliki arti kondisi populasi yang jika mengalami gangguan akan kembali ke keadaan seimbang atau tidak menyimpang dari titik kesetimbangannya[5]. Analisis kestabilan dilakukan dengan melakukan proses linearisasi sistem persamaan diferensial melalui pendekatan pada titik-titik kesetimbangannya[6].

$$J(\bar{N},\bar{M}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N(t)}{\partial N} & \frac{\partial N(t)}{\partial M} \\ \frac{\partial M(t)}{\partial N} & \frac{\partial M(t)}{\partial M} \end{bmatrix}$$

$$J(\bar{N},\bar{M}) = \begin{bmatrix} a_1 - b_{11}2N - b_{12}M & -b_{12}N \\ -b_{21}M & a_2 - b_{21}N - b_{22}2M \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Persamaan (4) merupakan matriks Jacobian dari Sistem (1). Titik kesetimbangan yang mewakili kondisi saat populasi pertama dan kedua hidup bersama yaitu $(\frac{a_1b_{22}-a_2b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}},\frac{a_2b_{11}-a_1b_{21}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}})$ dengan $\bar{N} = \frac{a_1b_{22}-a_2b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}$dan $\bar{M} = \frac{a_2b_{11}-a_1b_{21}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}$ disubstitusikan ke matriks Jacobian $J(\bar{N},\bar{M})$ pada Persamaan (4) sehingga didapat

$$J(\bar{N},\bar{M}) = \begin{bmatrix} -b_{11}\bar{N} & -b_{12}\bar{N} \\ -b_{21}\bar{M} & -b_{22}\bar{M} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Sifat stabilitas dari sistem di titik kesetimbangan dapat diketahui melalui nilai-nilai eigen. Sistem stabil lokal asimtotik jika semua bagian real dari nilai-nilai eigen bernilai negatif dan sistem stabil lokal jika semua bagian real dari nilai-nilai eigen bernilai nol. Namun jika salah satu bagian real dari nilai-nilai eigen bernilai positif maka sistem tidak stabil[8]. Selanjutnya dicari nilai-nilai eigen dari matriks $J(\bar{N},\bar{M})$ pada Persamaan (5) dengan formulasi $\det(\lambda I - A) = 0$ [7]. Matriks A ialah matriks $J(\bar{N},\bar{M})$ pada Persamaan (5), sehingga diperoleh persamaan karakteristik yaitu

$$\lambda^2 + \lambda(b_{11}\bar{N} + b_{22}\bar{M}) + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\bar{N}\bar{M} = 0. \tag{6}$$

Nilai-nilai eigen dari Sistem (1) di titik kesetimbangan $(\frac{a_1b_{22}-a_2b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}, \frac{a_2b_{11}-a_1b_{21}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}})$ adalah solusi-solusi dari Persamaan (6) yaitu

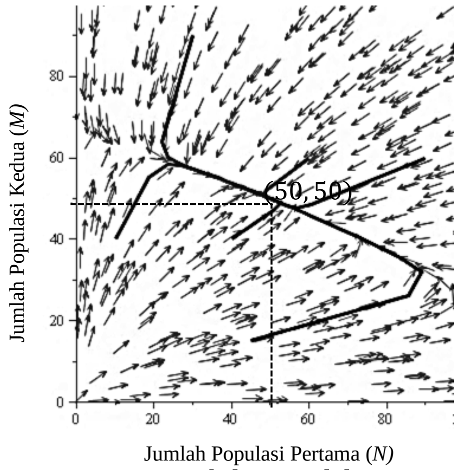
$$\lambda_{1,2} = \frac{-(b_{11}\bar{N} + b_{22}\bar{M}) \pm \sqrt{(b_{11}\bar{N} + b_{22}\bar{M})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\bar{N}\bar{M}}}{2} \tag{7}$$

Persamaan (7) memiliki solusi dengan beberapa kondisi yaitu:

i. Jika $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} < 0$ maka nilai akar yang berada dalam Persamaan (7) bernilai positif dan lebih besar dari $(b_{11}\bar{N} + b_{22}\bar{M})$. Sehingga nilai-nilai eigennya adalah real dan berlainan tanda. Akibatnya titik kesetimbangannya tidak stabil.

ii. Jika $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} > 0$ maka nilai akar yang berada dalam Persamaan (7) bernilai lebih kecil dari $(b_{11}\bar{N} + b_{22}\bar{M})$. Sehingga nilai-nilai eigennya adalah real, negatif, berbeda dan tidak kompleks. Akibatnya titik kesetimbangannya stabil asimtotik.

Sifat kestabilan dari Sistem (1) pada saat kedua spesies hidup bersama akan stabil asimtotik jika nilai-nilai eigennya bernilai negatif. Jadi, kondisi saat populasi pertama dan kedua hidup bersama diwakili oleh titik kesetimbangan $(\frac{a_1b_{22}-a_2b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}, \frac{a_2b_{11}-a_1b_{21}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}})$ akan stabil asimtotik jika kelipatan masing-masing tingkat kematian populasi akibat persaingan individu dalam populasi lebih besar dari kelipatan masing-masing tingkat kematian populasi akibat persaingan dengan populasi lain $(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} > 0)$. Informasi kestabilan dari titik kesetimbangan menjadi lebih mudah dipahami melalui potret fase.

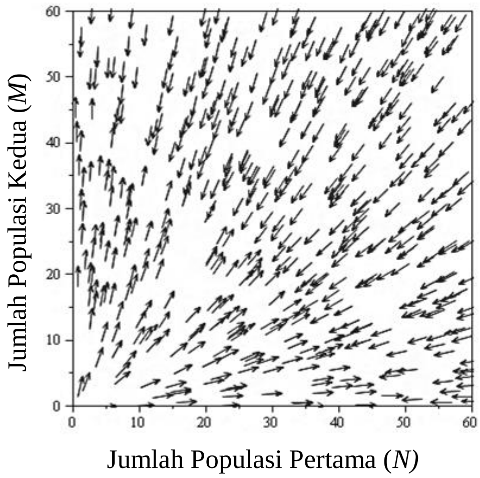


Gambar 1. Potret Fase Kestabilan Model Kompetisi Dua Populasi

Potret fase pada Gambar 1 dibentuk dari model kompetisi dua populasi dengan nilai parameter $a_1 = 0.3, a_2 = 0.2, b_{11} = 0.002, b_{12} = 0.004, b_{21} = 0.001, b_{22} = 0.003$ dan rentang waktu $t = 0 - 100$ tahun. Perhatikan garis-garis tebal berwarna hitam dan semua arah panah pada potret fase bergerak menuju titik kesetimbangan (50,50). Jadi, potret fase memperlihatkan dinamika model kompetisi dua populasi dengan titik kesetimbangan (50,50) stabil, artinya kedua populasi hidup bersama dengan jumlah populasi pertama dan kedua sama-sama 50 ekor pada $t = 100$ tahun.

KONDISI DUA POPULASI HIDUP BERSAMA DI TITIK TIDAK TERDEFINISI

Titik kesetimbangan tidak terdefinisi pada saat populasi pertama dan kedua hidup bersama terjadi karena selisih antara kelipatan tingkat kematian masing-masing akibat persaingan sesama populasi dengan kelipatan tingkat kematian masing-masing akibat persaingan dengan populasi lain adalah nol $(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0)$. Titik kesetimbangan tidak terdefinisi menyebabkan proses linearisasi sistem persamaan diferensial nonlinear melalui pendekatan pada titik kesetimbangan tidak dapat dilakukan, akibatnya kestabilan dari titik kesetimbangan tidak dapat dihitung sehingga tidak dapat diketahui dinamika populasi yang terjadi.



Gambar 2. Potret Fase Model Kompetisi Dua Populasi Hidup Bersama Di Titik Tidak Terdefinisi

Gambar 2 dibentuk dari model kompetisi dua populasi dengan nilai parameter $a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.3, b_{11} = 0.004, b_{12} = 0.004, b_{21} = 0.006, b_{22} = 0.006$ dengan kondisi saat populasi pertama dan kedua hidup bersama di titik tidak terdefinisi. Potret fase pada Gambar 2 tidak memberikan keterangan dinamika populasi yang terjadi dan arah-arah panah pada Gambar 2 tidak menuju pada satu titik yang sama, sehingga tidak diketahui kestabilan dari titik kesetimbangannya. Jadi, untuk mendapatkan informasi dinamika populasi dari model kompetisi dua populasi yang hidup bersama di titik kesetimbangan tidak terdefinisi dilakukan analisis secara analitik.

Kondisi kedua populasi yang hidup bersama di titik kesetimbangan tidak terdefinisi sama halnya dengan kondisi saat selisih antara kelipatan masing-masing tingkat kematian populasi akibat persaingan individu dalam populasi bernilai sama dengan kelipatan masing-masing tingkat kematian populasi akibat persaingan dengan populasi lain ($b_{11}b_{22} = b_{12}b_{21}$). Hal ini berakibat $\frac{b_{12}}{b_{11}} = \frac{b_{22}}{b_{21}}$. Pada Sistem (1), b_{12} disubsitusikan dengan $b_{12} = b_{11}\frac{b_{22}}{b_{21}}$ dan b_{22} disubstitusikan dengan $b_{22} = b_{21}\frac{b_{12}}{b_{11}}$ menjadi

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = N\left(a_1 - b_{11}N - b_{11}\dfrac{b_{22}}{b_{21}}M\right) \\ \dfrac{dM}{dt} = M\left(a_2 - b_{21}N - b_{21}\dfrac{b_{12}}{b_{11}}M\right). \end{cases} \tag{8}$$

Berdasarkan sifat distributif maka masing-masing persamaan menjadi

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = N\left(a_1 - b_{11}(N + \dfrac{b_{22}}{b_{21}}M)\right) \\ \dfrac{dM}{dt} = M\left(a_2 - b_{21}(N + \dfrac{b_{12}}{b_{11}}M)\right). \end{cases} \tag{9}$$

dimisalkan $\frac{b_{12}}{b_{11}} = \frac{b_{22}}{b_{21}} = p$, sehingga $\frac{b_{22}}{b_{21}}$ dan $\frac{b_{12}}{b_{11}}$ pada Sistem (9) disubstitusikan dengan p menjadi,

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = N(a_1 - b_{11}(N + pM)) \\ \dfrac{dM}{dt} = M\big(a_2 - b_{21}(N + pM)\big). \end{cases} \tag{10}$$

Sistem (10) akan direduksi dengan dimisalkan $K = N + pM$ sehingga Sistem (10) menjadi

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = N(a_1 - b_{11}K) & (11) \\ \dfrac{dM}{dt} = M(a_2 - b_{21}K). & (12) \end{cases}$$

Nilai K pada Persamaan (11) adalah

$$K = \frac{a_1}{b_{11}} - \frac{1}{b_{11}} \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}. \tag{13}$$

Substitusikan Persamaan (13) ke Persamaan (12) sehingga didapat reduksi Sistem (10) yaitu

$$b_{11} \frac{1}{M} \frac{dM}{dt} - b_{21} \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = a_2 b_{11} - a_1 b_{21}. \tag{14}$$

Asumsikan terdapat suatu keadaan saat besar populasi pada waktu awal yaitu t_0 dengan $t > t_0$ dan $t - t_0 = t$, sehingga Persamaan (14) diintegralkan menjadi

$$\int_{t_0}^{t} b_{11} \frac{1}{M} dM - \int_{t_0}^{t} b_{21} \frac{1}{N} dN = \int_{t_0}^{t} (a_2 b_{11} - a_1 b_{21}) dt. \tag{15}$$

Persamaan (15) diselesaikan untuk mendapatkan solusi berbentuk persamaan pertumbuhan populasi yaitu

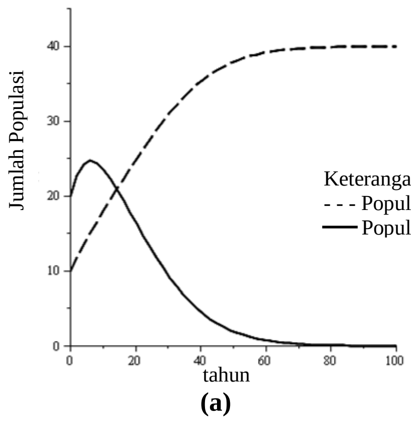
$$\left(\frac{N(t)}{N(t_0)}\right)^{b_{21}} = \left(\frac{M(t)}{M(t_0)}\right)^{b_{11}} e^{(a_1 b_{21} - a_2 b_{11})t}. \tag{16}$$

Persamaan (16) menghasilkan tiga kemungkinan dinamika populasi yang terjadi pada model kompetisi dua populasi yang hidup bersama di titik kesetimbangan tidak terdefinisi, yaitu:

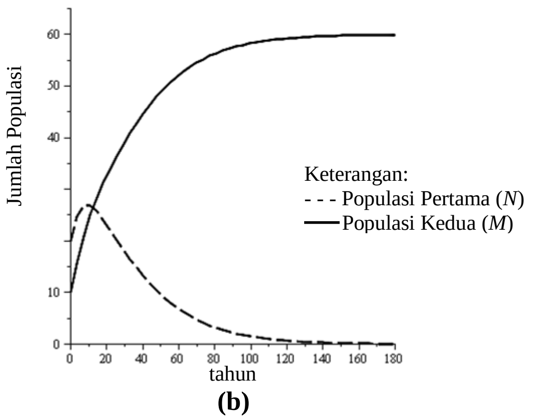
1) Jika $a_1 b_{21} > a_2 b_{11}$ maka $M(t) \to 0$ dengan $t \to \infty$. Artinya apabila kelipatan antara tingkat kelahiran populasi pertama dengan tingkat kematian populasi kedua akibat persaingan dengan populasi pertama lebih besar dari kelipatan antara tingkat kelahiran populasi kedua dengan tingkat kematian populasi pertama akibat persaingan individu dalam populasi pertama maka populasi kedua akan mengalami kepunahan pada waktu t menuju tidak hingga.

2) Jika $a_1 b_{21} < a_2 b_{11}$ maka $N(t) \to 0$ dengan $t \to \infty$. Artinya apabila kelipatan antara tingkat kelahiran populasi pertama dengan tingkat kematian populasi kedua akibat persaingan dengan populasi pertama lebih kecil dari kelipatan antara tingkat kelahiran populasi kedua dengan tingkat kematian populasi pertama akibat persaingan individu dalam populasi pertama maka populasi pertama akan mengalami kepunahan pada waktu t menuju tidak hingga.

3) Jika $a_1 b_{21} = a_2 b_{11}$ maka kedua populasi akan hidup bersama dengan $t \to \infty$. Artinya saat kelipatan antara tingkat kelahiran populasi pertama dengan tingkat kematian populasi kedua akibat persaingan dengan populasi pertama benilai sama dengan kelipatan antara tingkat kelahiran populasi kedua dengan tingkat kematian populasi pertama akibat persaingan individu dalam populasi pertama maka kedua populasi dapat hidup bersamaan dan tidak mengalami kepunahan pada waktu t menuju tidak hingga.



(a)

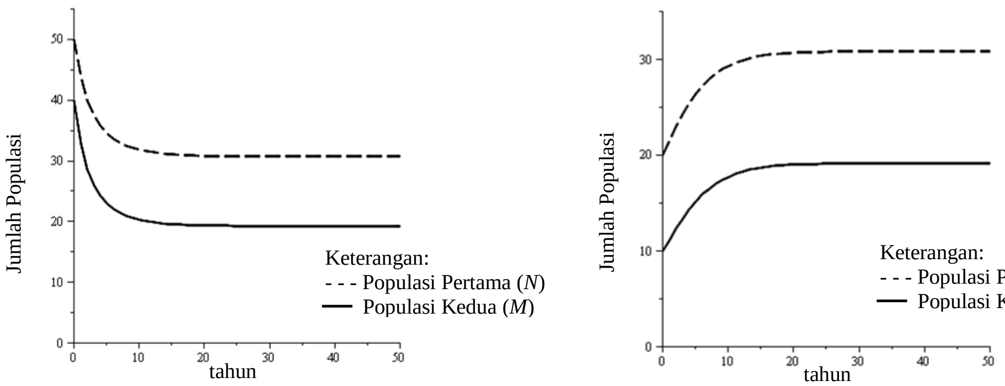


(b)

Gambar 3. Grafik Pertumbuhan Populasi (a) Jika $a_1 b_{21} > a_2 b_{11}$, (b) Jika $a_1 b_{21} < a_2 b_{11}$

Gambar 3 (a) merupakan grafik pertumbuhan populasi jika $a_1 b_{21} > a_2 b_{11}$ yaitu kelipatan antara tingkat kelahiran populasi pertama dengan tingkat kematian populasi kedua akibat persaingan dengan populasi pertama lebih besar dari kelipatan antara tingkat kelahiran populasi kedua dengan tingkat kematian populasi pertama akibat persaingan individu dalam populasi pertama. Gambar 3 (a) dibentuk dari model kompetisi dua populasi dengan nilai parameter $a_1 = 0.2, a_2 = 0.3, b_{11} = 0.005, b_{12} = 0.003, b_{21} = 0.01, b_{22} = 0.006$, jumlah populasi awal dari populasi pertama 10 ekor dan populasi kedua 20 ekor dalam rentang waktu $t = 0 - 100$ tahun. Terlihat pertumbuhan populasi pertama terus mengalami kenaikan jumlah populasi hingga tahun ke 85 dan konstan pada jumlah populasi sebanyak 40 ekor ditahun berikutnya. Sedangkan pertumbuhan populasi kedua, diawal pertumbuhan hingga tahun ke 8 mengalami kenaikan jumlah populasi hingga maksimal yaitu 25 ekor. Setelah itu pertumbuhan populasi kedua terus mengalami penurunan jumlah populasi hingga 0 atau mengalami kepunahan pada tahun ke 85. Gambar 3 (a) menunjukan model kompetisi dua populasi stabil pada saat jumlah populasi pertama 40 ekor dan jumlah populasi kedua 0.

Gambar 3 (b) merupakan grafik pertumbuhan populasi jika $a_1 b_{21} < a_2 b_{11}$ yaitu kelipatan antara tingkat kelahiran populasi pertama dengan tingkat kematian populasi kedua akibat persaingan dengan populasi pertama lebih kecil dari kelipatan antara tingkat kelahiran populasi kedua dengan tingkat kematian populasi pertama akibat persaingan individu dalam populasi pertama. Gambar 3 (b) dibentuk dari model kompetisi dua populasi dengan nilai parameter $a_1 = 0.2, a_2 = 0.3, b_{11} = 0.004, b_{12} = 0.004, b_{21} = 0.005, b_{22} = 0.005$, jumlah populasi awal dari populasi pertama 20 ekor dan populasi kedua 10 ekor dalam rentang waktu $t = 0 - 180$ tahun. Terlihat pertumbuhan populasi kedua terus mengalami kenaikan jumlah populasi hingga tahun ke 150 dan konstan pada jumlah populasi sebanyak 60 ekor ditahun berikutnya. Sedangkan pertumbuhan populasi pertama, diawal pertumbuhan hingga tahun ke 10 mengalami kenaikan jumlah populasi hingga maksimal yaitu 27 ekor. Setelah itu pertumbuhan populasi pertama terus mengalami penurunan jumlah populasi hingga 0 atau mengalami kepunahan pada tahun ke 150. Gambar 3 (b) menunjukan model kompetisi dua populasi stabil pada saat jumlah populasi pertama 0 dan jumlah populasi kedua 60 ekor.



(a) **(b)**

Gambar 4. Grafik Pertumbuhan Populasi Jika $a_1 b_{21} = a_2 b_{11}$

Gambar 4 merupakan grafik pertumbuhan populasi jika kelipatan antara tingkat kelahiran populasi pertama dengan tingkat kematian populasi kedua akibat persaingan dengan populasi pertama benilai sama dengan kelipatan antara tingkat kelahiran populasi kedua dengan tingkat kematian populasi pertama akibat persaingan individu dalam populasi pertama ($a_1 b_{21} = a_2 b_{11}$). Gambar 4 dibentuk dari model kompetisi dua populasi dengan nilai parameter $a_1 = 0.2, a_2 = 0.3, b_{11} = 0.004, b_{12} = 0.004, b_{21} = 0.006, b_{22} = 0.006$ dalam rentang waktu $t = 0 - 50$ tahun. Perbedaan antar Gambar 4 (a) dan (b) terletak pada jumlah populasi awal, yaitu (a) populasi pertama 50 ekor dan populasi kedua 40 ekor, sedangkan (b) populasi pertama 20 ekor dan populasi kedua 10 ekor. Pada Gambar 4 (a) terlihat pertumbuhan populasi pertama dan populasi kedua sama-sama mengalami penurunan jumlah populasi hingga tahun ke 25 dan konstan ditahun berikutnya. Populasi pertama konstan pada jumlah populasi sebanyak 31 ekor sedangkan populasi kedua konstan pada jumlah populasi sebanyak 19 ekor. Pada Gambar 4 (b) terlihat pertumbuhan populasi pertama dan populasi kedua sama-sama mengalami kenaikan jumlah populasi hingga tahun ke 25 dan konstan ditahun berikutnya. Populasi pertama konstan pada jumlah populasi sebanyak 31 ekor sedangkan populasi kedua konstan pada jumlah populasi sebanyak 19 ekor. Gambar 4 (a) dan (b) menunjukan bahwa walaupun jumlah populasi awal berbeda namun pertumbuhan populasi sama-sama konstan pada tahun ke 25 dengan populasi pertama konstan pada jumlah 31 ekor dan populasi kedua konstan pada jumlah 19 ekor. Gambar 4 menunjukan model kompetisi dua populasi stabil pada saat jumlah populasi pertama 31 ekor dan populasi kedua 19 ekor.

PENUTUP

Model kompetisi dua populasi yang hidup bersama di titik kesetimbangan tidak terdefinisi memiliki solusi dalam bentuk persamaan pertumbuhan populasi yaitu

$$\left(\frac{N(t)}{N(t_0)}\right)^{b_{11}} = \left(\frac{M(t)}{M(t_0)}\right)^{b_{21}} e^{(a_1 b_{21} - a_2 b_{11})t}.$$

Solusi menghasilkan 3 kemungkinan dinamika populasi yang terjadi pada model kompetisi dua populasi yang hidup bersama pada titik kesetimbangan tidak terdefinisi. Jika $a_1b_{21} > a_2b_{11}$ maka $M(t) \to 0$ dengan $t \to \infty$ yaitu populasi kedua akan mengalami kepunahan pada waktu t menuju tak hingga. Jika $a_1b_{21} < a_2b_{11}$ maka $N(t) \to 0$ dengan $t \to \infty$ yaitu populasi pertama akan mengalami kepunahan pada waktu t menuju tak hingga. Jika $a_1b_{21} = a_2b_{11}$ maka kedua populasi akan hidup bersamaan dan tidak mengalami kepunahan pada waktu t menuju tak hingga. Jadi, apabila kelipatan antara tingkat kelahiran populasi pertama dengan tingkat kematian populasi kedua akibat persaingan dengan populasi pertama benilai sama dengan kelipatan antara tingkat kelahiran populasi kedua dengan tingkat kematian populasi pertama akibat persaingan individu dalam populasi pertama ($a_1b_{21} = a_2b_{11}$) maka model kompetisi dua populasi yang hidup bersama di titik kesetimbangan tidak terdefinisi akan stabil.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Clarke GL. *Elements of Ecology*. Chapman & Hall: London; 1954.
[2]. Kapur JN. *Mathematical Models in Biology and Medicine*. Affiliated East-West Press Private Limited: New Delhi; 2000.
[3]. Arrowsmith DK, Place CM. *Dynamical System: Differential Equations. Maps and Chaotic Behavior*. Chapman & Hall: London;1992.
[4]. Murray JD. *Mathematical Biology. I. An Introduction. Third Edition.* Springer-Verlag: New York; 2002.
[5]. Olsder GJ, Van der Woude JW. *Mathematical System Theory*. *Second Edition.* Delft Univercity Press: Delft; 2003.
[6]. Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. *Third Edition.* Springer-Verlag: New York; 2001.
[7]. Anton H. *Aljabar Linear Elementer*. *Edisi Kelima.* Erlangga: Jakarta; 1987.
[8]. Boyce WE, DiPrima RC. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Seventh Edition.* John Wiley & Sons. Inc: New York;2001.

EKA N. LOSPAYADI N. : Jurusan Matematika, FMIPA UNTAN, Pontianak, awanlospayadi@gmail.com
BAYU PRIHANDONO : Jurusan Matematika, FMIPA UNTAN, Pontianak, beiprihandono@gmail.com
HELMI : Jurusan Matematika, FMIPA UNTAN, Pontianak, helmi132205@yahoo.co.id