Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 02, No. 3 (2013), hal. 183 - 190

# DIAGONALISASI MATRIKS $n \times n$ ATAS RING KOMUTATIF DENGAN ELEMEN SATUAN

**Fidiah Kinanti, Nilamsari Kusumastuti, Evi Noviani**

## INTISARI

*Matriks atas ring komutatif adalah himpunan semua matriks yang entri-entrinya merupakan elemen dari ring komutatif. Matriks atas ring komutatif mempunyai struktur aljabar modul terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Pada teori modul, diketahui bahwa submodul yang dibangun oleh kolom-kolom matriks atas ring belum tentu memiliki basis. Selain itu, struktur dari himpunan matriks atas ring komutatif dengan elemen satuan berbeda dengan struktur dari himpunan matriks atas field. Pada penelitian ini akan dicari proses diagonalisasi matriks n x n atas ring komutatif dengan elemen satuan. Diagonalisasi dari matriks A yang berukuran n x n merupakan suatu proses untuk membentuk atau mencari matriks diagonal D yang similar dengan A. Suatu matriks A berukuran n x n atas ring komutatif dapat didiagonalkan jika dan hanya jika gabungan semua ruang eigen untuk setiap nilai eigen dari A yang bersesuaian memuat basis di $R^n$. Langkah pertama yang dilakukan dalam pengerjaan diagonalisasi matriks atas ring komutatif dengan elemen satuan adalah mencari polinomial karakteristik dari matriks. Lalu dari polinomial karakteristik didapat nilai-nilai eigen. Selanjutnya mencari ruang eigen dari nilai-nilai eigen tersebut. Matriks A dapat didiagonalkan jika dan hanya jika gabungan dari semua ruang eigen memuat suatu basis dari R-modul bebas. Kemudian dibentuk sebuah matriks baru yang merupakan gabungan basis dari R-modul bebas tersebut dan dicari inversnya. Selanjutnya didapatlah matriks diagonal $P^{-1}AP = D$.*

***Kata Kunci*** *: nilai eigen, ruang eigen, diagonalisasi matriks.*

**PENDAHULUAN**

Aljabar merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika. Secara umum, ilmu Aljabar membahas tentang himpunan beserta kelengkapannya dan sifat-sifat dari himpunan tersebut. Salah satu himpunan yang banyak dipelajari adalah himpunan semua matriks-matriks. Salah satu jenis himpunan matriks adalah himpunan matriks atas field, $M_{m\times n}(F)$. Selain himpunan matriks atas field, ada juga himpunan matriks yang entri-entrinya elemen ring komutatif, yang disebut dengan himpunan semua matriks atas ring komutatif, $M_{m\times n}(R)$ [1].

Ada perbedaan mendasar antara $M_{n\times n}(F)$ dan $M_{n\times n}(R)$,yaitu strukturnya, syarat invertibel, serta di dalam $M_{n\times n}(R)$ tidak selalu dapat menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan dalam hal mencari invers ataupun determinan karena tidak semua entri di $R$ memiliki invers terhadap operasi perkalian. Dalam $M_{n\times n}(R)$ tidak selalu termuat basis $R$-modul bebas untuk $R^n$ dari gabungan semua ruang eigennya. Sehingga harus diselidiki eksistensi basis $R$-modul bebas yang termuat di gabungan ruang eigen tersebut. Selain itu syarat suatu matriks $A$ invertibel pada $M_{n\times n}(F)$ adalah $\det(A) \neq 0$, sedangkan pada $M_{n\times n}(R)$ adalah $\det(A) \in U(R)$, dengan $U(R)$ adalah himpunan unit-unit di $R$ [2].

Matriks diagonal merupakan salah satu bentuk matriks dengan semua entrinya bernilai nol kecuali pada diagonal utama. Determinan dari matriks diagonal merupakan hasil kali dari entri-entri pada diagonal utamanya. Jika suatu matriks $A$ berbentuk diagonal, entri diagonal utama dari matriks $A$ adalah nilai-nilai eigen dari matriks $A$ [1].

Beberapa matriks yang bukan berbentuk matriks diagonal dapat diubah menjadi matriks diagonal dengan proses diagonalisasi. Diagonalisasi matriks merupakan suatu proses terhadap matriks $A$ untuk mencari matriks diagonal $D$ yang similar terhadap matriks $A$. Matriks $D$ dikatakan similar terhadap $A$ jika terdapat matriks invertibel $P$ sedemikian sehingga $A = PDP^{-1}$ [3]. Selain $A \in M_{n\times n}(F)$, $A \in M_{n\times n}(R)$ juga dapat didiagonalisasikan. $A \in M_{n\times n}(F)$ dapat didiagonalisasikan jika terdapat $n$ vektor eigen $A$ yang bebas linear. Syarat lain untuk menentukan $A \in M_{n\times n}(F)$ dapat didiagonalisasikan, yaitu multiplisitas aljabar dari nilai eigen $\lambda$ harus sama dengan multiplisitas geometri dari nilai eigen $\lambda$ [3].

Berdasarkan latar belakang dan perumusan masalah di atas, adapun tujuan penelitian ini adalah mengkaji syarat suatu matriks atas ring komutatif dapat didiagonalisasikan serta langkah untuk mendiagonalisasi matriks atas ring komutatif dengan elemen satuan.

Dalam mendiagonalisasi $A \in M_{n\times n}(R)$, ada beberapa langkah yang harus dilakukan. Langkah pertama dihitung polinomial karakteristik $\mathbb{C}_A(\lambda)$ dari matriks. Lalu periksalah apakah ada nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan $\mathbb{C}_A(\lambda) = 0$. Jika tidak ada maka matriks tidak dapat didiagonalisasikan. Jika ada, dilanjutkan dengan mencari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen. Kemudian gabungkanlah semua ruang eigen yang didapat, lalu diselidiki apakah termuat basis $R$-modul bebas di $R^n$. Selanjutnya dibentuk sebuah matriks baru $P$ yang kolom-kolomnya terdiri dari basis $R$-modul yang didapat. Kemudian dicari invers dari matriks tersebut, setelah itu hitunglah $P^{-1}AP = D$, dengan $D$ merupakan matriks diagonal dan similar dengan $A$.

## MATRIKS ATAS RING KOMUTATIF DENGAN ELEMEN SATUAN

Salah satu himpunan yang dipelajari di dalam ilmu Aljabar adalah ring. Suatu ring $(R, +,\cdot)$ adalah himpunan dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian. $(R, +)$ merupakan suatu grup abelian dan $(R,\cdot)$ merupakan semigrup serta memenuhi sifat distributif kiri dan kanan perkalian terhadap penjumlahan. Jika operasi pergandaan skalar pada $R$ bersifat komutatif, yaitu $ab = ba$, untuk setiap $a, b \in R$, maka $R$ disebut sebagai ring komutatif. Suatu ring yang komutatif dan setiap anggota-anggota yang tidak nol memiliki invers disebut field. Di dalam ring, terdapat elemen-elemen yang dinamakan pembagi nol, unit dan unity atau elemen satuan. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ adalah elemen-elemen dari $R$ sedemikian sehingga $ab = 0$ maka $a$ dan $b$ disebut pembagi-pembagi nol pada ring $R$. Jika $R$ memiliki elemen identitas terhadap operasi pergandaan, maka ring $R$ dinamakan ring dengan elemen satuan. Sedangkan unit adalah elemen yang memiliki invers terhadap operasi perkalian [3].

Himpunan matriks atas ring komutatif dengan elemen satuan merupakan suatu himpunan matriks yang memiliki struktur aljabar modul. Modul merupakan salah satu himpunan yang dipelajari di struktur aljabar. Adapun definisi modul dapat dilihat pada Definisi 1 berikut ini.

**Definisi 1** [3] *Diberikan suatu ring $R$ dengan elemen identitas (tidak harus komutatif) dan suatu grup abelian $M$ dengan sebuah pergandaan skalar. Suatu $R$- modul kiri atau modul kiri atas $R$ di definisikan sebagai berikut*

$$\cdot : R \times M \to M$$

*dan memenuhi aksioma M1 sampai M4 di bawah ini:*
*Untuk setiap $a, b \in R$ dan $m, n \in M$, berlaku*

M1. $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$
M2. $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$
M3. $(a \cdot b) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$
M4. $1 \cdot m = m$, *dengan* $1 \in R$

Sedangkan modul kanan adalah suatu modul dengan pergandaan skalarnya dibentuk dari sebelah kanan, yaitu $* : M \times R \to M$ serta analog dengan aksioma M1 sampai M4. Modul atas ring dinotasikan dengan $M : R$- modul.

Matriks atas ring komutatif dengan elemen satuan merupakan salah satu contoh dari modul. Adapun operasi-operasi pada $M_{n\times n}(R)$ antara lain penjumlahan matriks, pengurangan matriks dan perkalian matriks. Diberikan dua buah matriks yaitu $A,B \in M_{n\times n}(R)$, yang memiliki ukuran yang sama, maka jumlah atau selisih dari kedua matriks tersebut dapat diperoleh dengan menjumlahkan atau mengurangkan semua entri-entri yang bersesuaian pada matriks dalam kedua matriks tersebut. Matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan. Sedangkan pada perkalian skalar, jika $r \in R$, dengan $R$ adalah ring komutatif, maka $rA$ perkalian skalar $r$ dengan entri-entri matriks $A$ yaitu $[rA]_{ij} = r[A]_{ij}$ [4].

Ada beberapa jenis matriks di dalam matriks atas ring komutatif dengan elemen satuan, yaitu matriks nol, matriks identitas dan matriks unit. Sedangkan matriks identitas atas ring komutatif didefinisikan sebagai:

$$[E]_{pq} = \begin{cases} 1\ jika\ (p, q) = (i, j) \\ 0\ jika\ (p, q) \neq (i, j) \end{cases} \quad \text{untuk setiap } i = 1, \dots, m \text{ dan } j = 1, \dots, n.$$

Dari perumusan di atas, indeks $p$ memiliki batasan dari 1 hingga $m$ dan indeks $q$ memiliki batasan dari 1 hingga $n$. $E_{ij}$ adalah suatu matriks $m \times n$ pada $M_{m\times n}(R)$ yang hanya memiliki nilai 1 pada entri $ij$ dan sisanya berentrikan nol. Himpunan $\Gamma = \{E_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ disebut matriks unit dari $M_{m\times n}(R)$ ketika $m = n$ [4].

Matriks atas ring komutatif dengan elemen satuan juga dapat dicari nilai determinan dan inversnya. Adapun lebih jelasnya dapat dilihat dari Definisi 2 berikut ini.

**Definisi 2** [4] *Diberikan $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(R)$. Determinan dari $A$, yang dinotasikan dengan $det(A)$, adalah elemen dari R berikut ini:*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}\,(\sigma) a_{1\sigma(1)}\ a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Dengan σ adalah suatu permutasi dan $S_n$ adalah himpunan semua permutasi dari $n$ elemen serta sgn (σ) menotasikan tanda dari σ. Jika permutasi genap atau σ genap, maka sgn $(\sigma) = 1$. Jika permutasi ganjil atau σ ganjil, maka sgn $(\sigma) = -1$.

Suatu matriks $A \in M_{n\times n}(R)$ memiliki invers $B$ jika memenuhi $AB = BA = I$ [4]. Adapun pada matriks atas field, syarat matriks $A$ dikatakan invertibel adalah jika $\det(A) \neq 0$, namun syarat ini tidak berlaku untuk matriks atas ring komutatif.

**Lemma 3** [4] *Diberikan $A \in M_{n\times n}(R)$. Matriks $A$ invertibel jika dan hanya jika $det(A) \in U(R)$, dengan $U(R)$ adalah himpunan unit-unit pada $R$.*

Bukti :

($\Longrightarrow$) Jika $A$ invertibel maka $A \in U(M_{n\times n}(R))$. Misalkan $A$ invertibel, maka terdapat $B \in M_{n\times n}(R)$ sedemikian sehingga $AB = BA = I$.

$$\begin{aligned} 1 &= \det(I) \\ &= \det(AB) \\ &= \det(A)\det(B) \end{aligned}$$

Sehingga $\det(A) \in U(R)$.

($\Longleftarrow$) Jika $\det(A) \in U(R)$, maka dapat dibentuk menjadi :

$$A[(\det(A))^{-1} adj(A)] = [(\det(A))^{-1} adj(A)]A = I$$

Sehingga $A$ invertibel. ■

Sebagaimana dengan $M_{n\times n}(F)$, $M_{n\times n}(R)$ juga memiliki rank. Definisi dari rank dapat dilihat dari Definisi 4 dan 5 berikut.

**Definisi 4** [4] *Diberikan $A \in M_{m\times n}(R)$. Untuk setiap $t = 1,2,\dots, r = min\{m, n\}$, notasi $I_t(A)$ menyatakan ideal dari R yang dibangun oleh semua minor dari matriks A yang berukuran $t \times t$.*

**Definisi 5** [4] *Diberikan matriks $A \in M_{n\times n}(R)$, $rank(A)$ didefinisikan sebagai $maks\,\{t | \text{Ann}_R(I_t(A)) = \{0\}\}$.*

Notasi $\text{Ann}_R(I_t(A))$ menyatakan himpunan annihilator dari $(I_t(A)) = \{r \in R | r.i = 0, \forall i \in I\}$ [4].

## NILAI EIGEN $M_{n\times n}(R)$

Untuk mendiagonalisasikan matriks yang entri-entrinya berasal dari ring komutatif, diperlukan pemahaman terlebih dahulu dalam mencari nilai eigen dari matriks, vektor-vektor eigen, serta hubungannya dalam mendiagonalisasikan matriks tersebut. Adapun definisi nilai eigen dan vektor eigen dapat dilihat dari definisi di bawah ini.

**Definisi 6** [4] *Diberikan matriks $A \in M_{n\times n}(R)$, maka suatu $\lambda \in R$ disebut nilai eigen dari matriks A jika memenuhi persamaan $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ untuk suatu vektor tak nol $\boldsymbol{v} \in R^n$ dan $\boldsymbol{v}$ disebut sebagai vektor eigen yang bersesuaian untuk suatu $\lambda \in R$.*

Polinomial karakteristik merupakan salah satu cara mencari nilai eigen. Adapun definisi dari polinomial karakteristik dapat dilihat pada Definisi 7 berikut:

**Definisi 7** [4] *Diberikan matriks $A \in M_{n\times n}(R)$, polinomial karakteristik dari $A$, dinotasikan dengan $\mathbb{C}_A(\lambda)$ didefinisikan sebagai $\mathbb{C}_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.*

Dari Definisi 7 diketahui bahwa untuk mencari nilai eigen dari suatu matriks dapat dicari dengan polinomial karakteristiknya. Untuk mengetahui solusi dari $\mathbb{C}_A(\lambda)$, tahap selanjutnya diperlukan Lemma 8 berikut.

**Lemma 8** [4] *Nilai eigen $\lambda$ adalah nilai eigen $A$ jika dan hanya jika nilai $\mathbb{C}_A(\lambda) \in Z(R)$, dengan $Z(R)$ merupakan himpunan semua pembagi nol kiri dan pembagi nol kanan dalam $R$.*

Bukti :

($\Longrightarrow$)Diketahui $\lambda$ merupakan nilai eigen akan dibuktikan $\mathbb{C}_A(\lambda) \in Z(R)$, dengan $Z(R)$ adalah himpunan semua pembagi nol di $R$. Karena $\lambda$ adalah nilai eigen, maka berlaku $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$.

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$
$$A\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$
$$A\boldsymbol{v} - \lambda I\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$
$$(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

Karena $\lambda$ adalah nilai eigen, $\lambda$ merupakan solusi taktrivial dari Persamaan (1). Persamaan (1) memiliki solusi taktrivial jika dan hanya jika :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Ambil sebarang $\boldsymbol{v} \in M$, sedemikian sehingga

$$\det(A - \lambda I)\,\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v}$$
$$\det(A - \lambda I)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$
$$\mathbb{C}_A(\lambda)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{v}\mathbb{C}_A(\lambda) = \boldsymbol{0}$$

Didapat $\mathbb{C}_A(\lambda)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ untuk sebarang $\boldsymbol{v} \in M$, sehingga $\mathbb{C}_A(\lambda)$ adalah pembagi nol di $R$, dengan kata lain, $\mathbb{C}_A(\lambda) \in Z(R)$.

($\Longleftarrow$) Diketahui $\mathbb{C}_A(\lambda) \in Z(R)$, akan dibuktikan bahwa $\lambda$ adalah nilai eigen.

$\mathbb{C}_A(\lambda) \in Z(R)$, ambil sebarang $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ sedemikian sehingga $\mathbb{C}_A(\lambda)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ .

sesuai definisi pembagi nol untuk suatu $x$ maka terdapat $m$ sedemikian sehingga $mx = 0$ dan $xm = 0$.

$\mathbb{C}_A(\lambda)$ merupakan suatu polinomial karakteristik dengan nilainya sama dengan $\det(\lambda I - A)$

$$\mathbb{C}_A(\lambda)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$
$$\det(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

Persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$ merupakan cara untuk mendapatkan solusi taktrivial dari :

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$
$$\lambda I\boldsymbol{v} - A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$
$$\lambda\boldsymbol{v} - A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$
$$\lambda\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v}$$
$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

Dapat diihat dari Definisi 6, $\lambda$ adalah nilai eigen jika memenuhi persamaan $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ untuk suatu vektor tak nol $\boldsymbol{v}$. ■

Nilai eigen $\lambda$ dari $A$ dapat dicari dengan menyelidiki nilai-nilai di dalam $R$ yang memenuhi $rank(\lambda I - A) < n$. Karena suatu Sistem Persamaan Linear Homogen atas ring komutatif memiliki solusi taktrivial jika dan hanya jika $rank(A) < n$ [4].

**Definisi 9** [4] *Diberikan matriks $A \in M_{n\times n}(R)$, spektrum dari matriks $A$ yang dilambangkan dengan $\psi(A)$ yaitu himpunan semua nilai eigen yang terdapat pada matriks $A$ dan misalkan $\lambda$ adalah elemen spektrum $A$, vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda$ adalah vektor-vektor taknol di dalam ruang solusi $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Ruang solusi ini disebut ruang eigen, yang dinotasikan dengan $E(\lambda)$.*

Ruang solusi $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ disebut ruang eigen dari matriks $A$ yang bersesuaian dengan $\lambda$ dan dirumuskan dengan $E(\lambda) = NS\,(\lambda I - A)$. $NS$ (Null Space) merupakan ruang nul dari matriks $(\lambda I - A)$. Adapun ruang nul dari matriks $(\lambda I - A)$ dapat diselesaikan dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan linear homogen atas ring komutatif.

**Definisi 10** [4] *Diberikan matriks $A \in M_{n\times n}(R)$, dengan $M_{n\times n}(R)$ adalah matriks yang entri-entrinya berasal dari ring komutatif, $\wp(A) = \{\lambda \in R | \mathbb{C}_A(\lambda) = 0\}$ disebut himpunan akar-akar $\mathbb{C}_A(\lambda)$ di $R$.*

**Lemma 11** [4] *Diberikan $\lambda \in \psi(A)$, dan $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ untuk suatu vektor tak nol $\boldsymbol{v} \in R^n$. Jika himpunan dari vektor tak nol tersebut bebas linear atas $R$, maka $\mathbb{C}_A(\lambda) = 0$*

Bukti : Diketahui bahwa $\boldsymbol{v}$ merupakan suatu vektor tak nol, maka

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_A(\lambda)\boldsymbol{v} &= \mathbb{C}_A(\lambda)I\boldsymbol{v}\\ &= (\lambda I - A)\boldsymbol{v}\\ &= \boldsymbol{O}\end{aligned}$$

dengan $\boldsymbol{O}$ himpunan vektor nol. Sehingga dapat disimpulkan $\mathbb{C}_A(\lambda) = 0$, karena himpunan dari $\boldsymbol{v}$ dikatakan bebas linear atas $R$ jika terdapat skalar $k = 0$ sedemikian sehingga $k\boldsymbol{v} = \boldsymbol{O}$. ■
Dari Definisi 10 dan Lemma 11, $\wp(A)$ merupakan himpunan akar-akar dari $\mathbb{C}_A(\lambda)$ di $R$. Oleh karena itu yang diselidiki apakah basisnya ada atau tidak hanyalah $E(\lambda)$ dimana $\lambda \in \wp(A)$, karena syarat dari suatu basis adalah bebas linear. Sehingga $\wp(A)$ kemudian akan menjadi syarat apakah sebuah matriks dengan entri-entri dari ring komutatif dapat didiagonalkan atau tidak.

## DIAGONALISASI $\boldsymbol{M_{n\times n}(R)}$ DENGAN ELEMEN SATUAN

Adapun definisi dari diagonalisasi dapat dilihat pada Definisi 12 berikut ini:

**Definisi 12** [4] *Diberikan matriks $A \in M_{n\times n}(R)$. Matriks $A$ dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks $P$ yang merupakan sebuah matriks yang invertibel, sedemikian sehingga $P^{-1}AP = D$. $D$ merupakan matriks hasil diagonalisasi dari $A$ dan $D$ dikatakan similar dengan matriks $A$.*

**Teorema 13** (Syarat Keterdiagonalan Matriks) [4] :
*Diberikan matriks $A \in M_{n\times n}(R)$ dan similar ke sebuah matriks diagonal. Matriks $A$ dapat didiagonalkan jika dan hanya jika $\bigcup_{\lambda\in\wp(A)} E(\lambda)$ memuat suatu basis dari R-modul bebas di $R^n$*

Bukti: ($\Leftarrow$) Akan dibuktikan A dapat didiagonalkan. Berarti akan ditunjukkan adanya matriks diagonal yang similar dengan matriks $A$, misalkan $D$. Diketahui bahwa $\bigcup_{\lambda\in\wp(\mathrm{A})} \mathrm{E}(\lambda)$ memuat suatu basis dari R-modul bebas di $R^n$. $\bigcup_{\lambda\in\wp(\mathrm{A})} \mathrm{E}(\lambda)$ merupakan gabungan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda \in \wp(\mathrm{A})$ yang memiliki basis misalkan $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ bebas linear dan membangun di $R^n$.
Berarti, $Aa_i = \lambda a_i$, dengan $i = 1,2, \dots, n$. Misalkan terdapat matriks $P = (a_1 a_2 \dots a_n)$, karena kolom-kolom $P$ terbentuk dari basis-basis R-modul di $\mathrm{R}^\mathrm{n}$, maka $P$ invertibel.

$AP = A(a_1\ a_2 \dots a_n)$

Dengan menggunakan hukum distribusi kanan didapat

$= (Aa_1\ Aa_2 \dots Aa_n)$

Karena $Aa_i = \lambda a_i$, maka

$= (\lambda_1 a_1\ \lambda_2 a_2 \dots \lambda_n a_n)$
$= (a_1\ a_2 \dots a_n)\ \mathrm{diag}\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$
$= AD$

$AP = PD \iff P^{-1}AP = D$
Karena terdapat $P^{-1}$, maka diperoleh $P^{-1}AP = D$ sehingga matriks $A$ dapat didiagonalkan.
($\Rightarrow$) Akan dibuktikan jika $\bigcup_{\lambda\in\wp(\mathrm{A})} \mathrm{E}(\lambda)$ memuat suatu basis dari R-modul bebas di $R^n$.
Diketahui bahwa $A$ dapat didiagonalkan, maka terdapat matriks invertibel $P$ sedemikian sehingga $P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$, dengan matriks $P = (a_1\ a_2 \dots a_n)$. Didapat $AP = A(a_1\ a_2 \dots a_n) = (Aa_1\ Aa_2 \dots Aa_n)$ serta $PD = (\lambda_1 a_1\ \lambda_2 a_2 \dots \lambda_n a_n)$ . Jika $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ merupakan R-Modul bebas, maka $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ dapat dibentuk basis atas $R^n$ sedemikian sehingga $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ bebas linear dan membangun. Misalkan $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n) \in \wp(A)$ , dengan $\wp(A)$ adalah himpunan $\mathbb{C}_A(\lambda) = 0$ dan $\{a_i\}$ bebas linear serta $a_i \in E(\lambda_i)$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$. Didapat $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} \subseteq \bigcup_{\lambda\in\wp(\mathrm{A})} \mathrm{E}(\lambda)$. Karena $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ bebas linear dan membangun maka $\bigcup_{\lambda\in\wp(\mathrm{A})} \mathrm{E}(\lambda)$ juga bebas linear dan membangun sehingga $\bigcup_{\lambda\in\wp(\mathrm{A})} \mathrm{E}(\lambda)$ memuat suatu basis di $R^n$. ■

Berbeda dengan Definisi 12, Teorema 13 memberikan syarat yang berbeda untuk memutuskan apakah sebuah matriks dapat didiagonalkan atau tidak. Dari Teorema 13 cukup dengan menyelidiki ruang-ruang eigen matriks tersebut yang bersesuaian dengan semua akar-akar polinomial karakteristiknya. Jika dari gabungan ruang eigen tidak memuat basis di $R^n$, maka matriks tidak dapat didiagonalkan.

**Contoh 13** Tunjukkan apakah matriks berikut ini dapat didiagonalisasikan serta temukan matriks diagonal $D$ yang similar dengan matriks berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(Z_6)$$
$$Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$$

Penyelesaian :

a. Dicari polinomial karakteristik $C_A(\lambda)$ dari $A$

$$\begin{aligned} C_A(\lambda) &= |\lambda I - A| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

b. Dicari nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan $C_A(\lambda)$
pembagi nol dari $Z_6$ yaitu $Z(Z_6) = \{0,2,3,4\}$

$$\begin{aligned} C_A(\lambda) &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$
$\lambda - 1 = 0 \iff \lambda = 1$
$\lambda - 2 = 0 \iff \lambda = 2$
$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 2 \cdot 3$
$(\lambda - 1) = 2 \iff \lambda = 3$ $\quad$ $(\lambda - 1) = 3 \iff \lambda = 4$
$(\lambda - 2) = 3 \iff \lambda = 5$ $\quad$ $(\lambda - 2) = 2 \iff \lambda = 4$
$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 3 \cdot 4$
$(\lambda - 1) = 3 \iff \lambda = 4$ $\quad$ $(\lambda - 1) = 4 \iff \lambda = 5$
$(\lambda - 2) = 4 \iff \lambda = 0$ $\quad$ $(\lambda - 2) = 3 \iff \lambda = 5$

Didapat $\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3, \lambda = 4, \lambda = 5$ sehingga $\psi(A) = \{0,1,2,3,4,5\}$, $\wp(A) = \{1,2,4,5\}$, sehingga yang perlu dicari dalam perhitungan ruang eigen hanyalah $E(1), E(2), E(4), E(5)$.

c. Dicari ruang eigen dari nilai eigen yang bersesuaian.

Untuk $\lambda = 1$, diperoleh $E(1) = NS\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$I_2\big(E(1)\big) = 0$$
$$I_1\big(E(1)\big) = 0R + 2R + 5R = R = Z_6$$
$$Ann_R\Big(I_2\big(E(1)\big)\Big) = Z_6$$
$$Ann_R\Big(I_1\big(E(1)\big)\Big) = \{0\}$$
$$rank\ E(1) = maks\ \Big\{t|\mathrm{Ann}_R\Big(I_t\big(E(1)\big)\Big) = \{0\}\Big\}$$
$$rank\ E(1) = 1$$

Karena $rank\ A < n$ maka sistem persamaan ini memiliki solusi taktrivial.

$I_2\big(E(1)\big) = 0$ maka $Ann_R\Big(I_2\big(E(1)\big)\Big) = Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$

Ambil $a \neq 0 \in Ann_R\Big(I_2\big(E(1)\big)\Big)$, misalkan $a = 1$

Ambil minor dari matriks $E(1)$, misalkan $\Delta_{21} = 2$ sehingga $a \cdot \Delta_{21} = 2 \cdot 1 = 2 \neq 0$

Karena $i_1 = 2 \neq 1$ maka diambil matriks invertibel $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga

$PE(1)Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Didapat $C' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dari $C'$ didapat $d_1 = cof_{21} = 1$ dan $d_2 = cof_{22} = 2$, sehingga $NS\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.d_1 \\ a.d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e_1}$

Untuk $a = 0$ maka $\begin{bmatrix} a.d_1 \\ a.d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e_2}$

Untuk $a = 2$ maka $\begin{bmatrix} a.d_1 \\ a.d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e_3}$

Untuk $a = 3$ maka $\begin{bmatrix} a.d_1 \\ a.d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e_4}$

Untuk $a = 4$ maka $\begin{bmatrix} a.d_1 \\ a.d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e_5}$

Untuk $a = 5$ maka $\begin{bmatrix} a.d_1 \\ a.d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e_6}$

$$NS\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = span\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}, \boldsymbol{e_5}, \boldsymbol{e_6}\}$$

Untuk mencari ruang nul pada $\lambda = 2,4,5$ dapat menggunakan cara yang sama dengan $\lambda = 1$ di atas.

Untuk $\lambda = 2$, dicari $E(2) = NS\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

diperoleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{f_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{f_2}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{f_3}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{f_4}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{f_5}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{f_6}$

$$NS\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = span\{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{f_4}, \boldsymbol{f_5}, \boldsymbol{f_6}\}$$

Untuk $\lambda = 4$, dicari $E(4) = NS\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

diperoleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{g_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{g_2}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{g_3}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{g_4}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{g_5}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{g_6}$

$$NS\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = span\{\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2}, \boldsymbol{g_3}, \boldsymbol{g_4}, \boldsymbol{g_5}, \boldsymbol{g_6}\}$$

Untuk $\lambda = 5$, dicari $E(5) = NS\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

diperoleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{h_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{h_2}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{h_3}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{h_4}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{h_5}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{h_6}$

$$NS\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = span\{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}, \boldsymbol{h_5}, \boldsymbol{h_6}\}$$

d. Gabungkan semua ruang eigen yang didapat, lalu periksa apakah termuat basis dari gabungan semua ruang eigen.

$$\bigcup_{\lambda \in \wp(\mathrm{A})} \mathrm{E}(\lambda) = span\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}, \boldsymbol{e_5}, \boldsymbol{e_6}\} \cup span\{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{f_4}, \boldsymbol{f_5}, \boldsymbol{f_6}\}$$
$$\cup\, span\{\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2}, \boldsymbol{g_3}, \boldsymbol{g_4}, \boldsymbol{g_5}, \boldsymbol{g_6}\} \cup span\{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}, \boldsymbol{h_4}, \boldsymbol{h_5}, \boldsymbol{h_6}\}$$

e. $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ dari $Z_6$ ini yang merupakan unit adalah 1 dan 5

Didapat $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka $P^{-1} = \frac{1}{1-0}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= D_1 \end{aligned}$$

f. Didapat $S = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka $S^{-1} = \frac{1}{4-3}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Sehingga $S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= D_2$$

Sehingga matriks $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan $D_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ similar terhadap matriks $A$.

**PENUTUP**

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan, dapat disimpulkan bahwa suatu matriks bujur sangkar $A$ atas suatu ring komutatif $R$ dapat didiagonalisasikan jika dan hanya jika gabungan semua ruang eigen memuat suatu basis dari $R$-modul bebas.

Adapun langkah-langkah untuk mencari matriks atas ring komutatif, yaitu mencari polinomial karakteristik $\mathbb{C}_A(\lambda)$ dari matriks, kemudian dari polinomial karakteristik $\mathbb{C}_A(\lambda)$, dicari nilai-nilai eigen $\lambda$ yang bersesuaian dengan $\mathbb{C}_A(\lambda) = 0$. Carilah ruang eigen $E(\lambda) = NS(\lambda I - A)$. Kemudian gabungkanlah semua ruang eigen yang didapat, lalu diselidiki dari gabungan tersebut apakah termuat basis dari $R$-modul bebas. Matriks $A$ dapat didiagonalkan jika dan hanya jika gabungan dari semua ruang eigen memuat suatu basis dari $R$-modul bebas. Dibentuk sebuah matriks baru yang merupakan gabungan dari basis $R$-modul bebas tersebut. Selanjutnya dicari invers dari matriks baru tersebut. Kemudian didapatlah matriks diagonal $P^{-1}AP = D =$ diag $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$.

**DAFTAR PUSTAKA**


[1]. Anton H. *Aljabar Linear Elementer* [Silaban, Susila,trans]. 5th ed. Hutauruk R, editor. Jakarta: Erlangga; 1987.

[2]. Adkins AW. *Algebra: An Approach via Module Theory*. New York: Springer-Verlag Inc; 1992.

[3]. Anton H, Rorres CW. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi* [Indriasari R, trans]. 8th ed. Safitri A, editor. Jakarta: Erlangga; 2004.

[4]. Brown CW. *Matrices Over Commutative Rings*. New York: Marcel Dekker Inc; 1992.



FIDIAH KINANTI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, kinantifidiah@gmail.com

NILAMSARI KUSUMASTUTI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, uminilam@yahoo.com

EVI NOVIANI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, evi_noviani@mipa.untan.ac.id