

STRUKTUR ALJABAR DALAM PEWARISAN GOLONGAN DARAH

Andriko, Mariatul Kiftiah, Fransiskus Fran

INTISARI

Genetika adalah cabang ilmu biologi yang mempelajari tentang pewarisan sifat (hereditas) secara ilmiah. Salah satu identitas genetik yang dapat diwariskan adalah golongan darah. Sistem golongan darah yang paling umum digunakan adalah sistem golongan darah ABO dan Rhesus. Pewarisan golongan darah ini dapat dianalisis dengan memanfaatkan masing-masing antigen pada sistem golongan darah, selanjutnya antigen tersebut digunakan sebagai basis bagi sebuah ruang vektor yang bekerja atas field \mathbb{R} . Didefinisikan sebuah operasi biner untuk masing-masing sistem golongan darah dan dianalisis menggunakan aljabar gamet dan aljabar zigot. Diperoleh persamaan-persamaan yang digunakan sebagai aksioma untuk membentuk struktur aljabar bagi masing-masing sistem golongan darah. Ketika telah diperoleh masing-masing aljabar untuk sistem golongan darah ABO dan Rhesus, maka didefinisikan sebuah operasi biner bagi sistem golongan darah ABO yang dilengkapi dengan sistem golongan darah Rhesus (ABO Rh). Operasi biner ini digunakan untuk mendapatkan persamaan-persamaan yang digunakan sebagai aksioma-aksioma untuk membentuk struktur aljabar dari sistem golongan darah ABO Rh.

Kata Kunci : , operasi biner, aljabar gamet, aljabar zigot

PENDAHULUAN

Genetika adalah sebuah ilmu yang mempelajari seluk beluk pewarisan sifat genetik dari generasi ke generasi [1]. Salah satu sifat genetik yang dapat diwariskan dalam pewarisan genetik adalah golongan darah. Istilah golongan darah mengacu kepada reaksi spesifik yang muncul saat uji antiserum terhadap antigen tertentu dari sebuah sistem golongan darah [2]. Saat dilakukan uji antiserum, antigen dalam darah akan bereaksi terhadap antiserum dengan membentuk gumpalan darah. Dengan kata lain golongan darah adalah pembedaan sifat pada darah berdasarkan ada atau tidak adanya antigen dan antibodi tertentu di dalam darah. Pada awal ditemukannya sistem golongan darah, golongan darah menjadi acuan dalam proses transfusi darah. Namun seiring berjalannya waktu, pemahaman tentang golongan darah tidak hanya mencakup tentang transfusi saja tetapi juga hubungan tentang penyakit-penyakit yang dapat menyerang golongan darah tertentu. Sejak pertama kali ditemukannya sistem golongan darah hingga sekarang setidaknya ada sekitar 33 macam sistem golongan darah yang telah ditemukan [2]. Beberapa di antaranya adalah ABO, MNS, Rhesus, Lutheran, Kell, Lewis, Duffy, Kidd, Diego, Yt, Xg, Dombrock, dan Colton [3]. Walaupun ada bermacam sistem golongan darah, namun hanya sistem golongan darah ABO dan Rhesus paling banyak digunakan. Sistem golongan darah lainnya jarang digunakan karena ada beberapa antigen yang hanya ditemukan pada ras tertentu seperti antigen Diego yang hanya ditemukan pada orang Indian dan orang Mongolia. Sistem golongan darah ABO dan Rhesuslah yang sering digunakan sehingga penting untuk mengetahui bentuk pewarisan golongan darah pada sistem golongan darah ABO dan Rhesus serta sistem golongan darah ABO Rh dimulai dengan mempelajari struktur aljabarnya.

Pada tahun 1939, Etherington mulai melakukan penelitian dalam bidang matematika genetik. Penelitian ini menghasilkan beberapa variasi aljabar, diantaranya aljabar genetik, aljabar gamet dan aljabar zigot. Sebelum itu, pada tahun 1866 Mendel mempublikasikan penelitiannya tentang hereditas

dan telah menggunakan simbol-simbol dalam penulisan operasi persilangan buaatannya [1]. Simbol-simbol ini berperan mirip operasi biner dalam aljabar abstrak.

Aljabar abstrak merupakan salah satu cabang ilmu aljabar yang mempelajari tentang struktur aljabar berupa himpunan yang dilengkapi dengan operasi biner beserta sifat-sifatnya. Salah satu jenis struktur aljabar yang dipelajari adalah ruang vektor. Ruang vektor menjadi salah satu struktur aljabar yang terbilang unik karena mempunyai basis sebagai pembentuknya sehingga dapat dibentuk ruang vektor berdasarkan basis-basis tertentu yang diinginkan. Struktur aljabar dalam pewarisan golongan darah sistem golongan darah ABO dapat dikaji dengan memanfaatkan macam-macam antigen darah yang dapat dipakai sebagai basis bagi sebuah ruang vektor.

SISTEM GOLONGAN DARAH

Salah satu identitas yang dapat diwariskan pada manusia adalah golongan darah. Secara harfiah setiap variasi atau beberapa fenotif yang terdeteksi dalam darah dapat dianggap sebagai golongan darah. Namun, istilah golongan darah biasanya merujuk pada antigen yang muncul dalam sel darah khususnya untuk antigen pada sel darah merah [3]. Istilah golongan darah mengacu pada seluruh sistem golongan darah yang terdiri dari antigen sel darah merah yang sifatnya dikendalikan oleh serangkaian gen yang terkait sangat erat pada kromosom yang sama [2]. Sebuah antigen akan memunculkan sifat tertentu pada darah yang akan direspon oleh antibodi tertentu pula. Dengan kata lain, golongan darah adalah pembedaan sifat pada darah berdasarkan ada atau tidak antigen dan antibodi tertentu di dalam darah. Antigen diartikan sebagai senyawa kimia yang dapat merangsang antibodi dalam tubuh, antibodi secara spesifik akan bereaksi terhadap antigen tertentu sehingga akan terjadi penggumpalan pada darah.

Sistem golongan darah ABO adalah sistem penggolongan darah yang disusun oleh antigen A dan B serta antibodi A dan B pula [4]. Golongan darah dalam sistem golongan darah ABO ditentukan dengan ada tidaknya antigen A atau B yang ditemukan pada sel darah merah dan aglutinin (antibodi darah) anti-A dan anti-B yang ditemukan dalam darah. Sistem ini mengelompokkan darah manusia menjadi 4 macam golongan yaitu A, B, AB dan O. Biasanya sistem golongan darah ABO digunakan bersama sistem golongan darah Rhesus. Sifat pada sistem golongan darah Rhesus dipengaruhi oleh setidaknya 44 antigen berbeda, namun secara klinis sifat fenotif yang paling mempengaruhi adalah karena ada atau tidaknya antigen D pada darah [5]. Sistem golongan Rhesus membagi golongan darah manusia menjadi dua, yaitu Rhesus positif (Rh +) dan Rhesus negatif (Rh -). Jika sel darah merahnya mengandung antigen D maka darah tersebut termasuk Rhesus positif (Rh +) dan jika tidak terdapat antigen D maka darah tersebut termasuk Rhesus negatif (Rh -).

ALJABAR

Aljabar adalah cara untuk menyatakan generalisasi dari bilangan, kuantitas, relasi dan fungsi [6]. Aljabar mempelajari konsep atau prinsip penyederhanaan serta pemecahan masalah dengan menggunakan simbol atau huruf tertentu. Aljabar memiliki banyak kategori salah satunya adalah aljabar abstrak. Aljabar abstrak adalah salah satu bidang matematika yang mempelajari tentang struktur aljabar seperti grup, ring, field dan ruang vektor. Struktur aljabar sendiri adalah sebuah himpunan yang dilengkapi dengan suatu operasi [7]. Salah satu struktur aljabar yang istimewa adalah ruang vektor karena dapat dibentuk ruang vektor tertentu dengan basis tertentu pula.

Definisi 1 [8] *Suatu himpunan V disebut ruang vektor atas field F jika V merupakan sebuah grup abelian atas operasi penjumlahan (+) dan untuk setiap $a \in F$ dan $v \in V$, terdapat sebuah elemen av pada V sedemikian rupa sehingga kondisi berikut berlaku untuk semua a, b di F dan semua u, v di V .*

i. $a(v + u) = av + au$

ii. $(a + b)v = av + bv$

iii. $a(bv) = (ab)v$

iv. $1v = v$

Salah satu contoh dari ruang vektor adalah himpunan bilangan rasional (\mathbb{Q}) terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Setiap anggota dari *field* adalah skalar dan setiap anggota dari ruang vektor adalah vektor. Perkalian antara skalar dan vektor disebut sebagai perkalian skalar. Perkalian skalar ini dapat dibentuk menjadi kombinasi linear dan menghasilkan sifat-sifat tertentu.

Definisi 2 [8] Misalkan S himpunan dari vektor-vektor, disebut bergantung linear terhadap *field* F jika terdapat vektor-vektor $v_1, v_2, \dots, v_n \in S$ dan elemen $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ sehingga $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$ dengan nilai a_1, a_2, \dots, a_n tidak semuanya nol. Sebuah himpunan yang tidak bergantung linear terhadap F disebut bebas linear terhadap F .

Dengan kata lain sebuah himpunan dari vektor-vektor bergantung linear terhadap F jika ada sebuah solusi nontrivial (ada nilai solusi yang tidak nol) sehingga $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$.

Definisi 3 [8] Misalkan V adalah sebuah ruang vektor terhadap F . Sebuah B subset (himpunan bagian) dari V disebut basis dari V jika B bebas linear terhadap F dan setiap elemen dari V adalah kombinasi linear dari elemen-elemen B .

Contoh 4 Misalkan suatu himpunan $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ merupakan sebuah ruang vektor atas \mathbb{R} . Akan ditunjukkan bahwa himpunan $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ adalah basis bagi ruang vektor V atas \mathbb{R} . Diambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & a \\ a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa $a = b = 0$ maka B bebas linear terhadap \mathbb{R} . Dapat dilihat pula bahwa semua anggota dari V dapat dibentuk dari B

$$\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Diperoleh bahwa elemen pada V dapat dibentuk dari kombinasi linear elemen-elemen dari B .

Jadi, terbukti bahwa B adalah basis dari V .

Definisi 5 [9] Misalkan A adalah suatu himpunan tak kosong, $(A, +, \cdot; F)$ adalah suatu aljabar atas *field* F jika $(A, +; F)$ suatu ruang vektor, $(A, +, \cdot)$ suatu gelanggang dan untuk setiap $a, b \in G, \alpha \in F$ berlaku $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

Contoh 6 Misalkan sebuah *field* \mathbb{Q} dan \mathbb{Q} ruang vektor atas *field* \mathbb{Q} . Diambil sebarang $a, b \in \mathbb{Q}$ yang merupakan *field* dengan $a = \frac{p}{q}, b = \frac{r}{s}; q, s \neq 0$ dan $\alpha \in \mathbb{Q}$ yang merupakan ruang vektor dengan $\alpha = \frac{t}{u}; u \neq 0$.

$$\begin{aligned} \alpha(ab) &= \frac{t}{u} \cdot \left(\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} \right) = \frac{t}{u} \cdot \left(\frac{pr}{qs} \right) = \frac{tpr}{uqs} \\ (\alpha a)b &= \left(\frac{t}{u} \cdot \frac{p}{q} \right) \cdot \frac{r}{s} = \left(\frac{tp}{uq} \right) \cdot \frac{r}{s} = \frac{tpr}{uqs} \\ a(\alpha b) &= \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{t}{u} \cdot \frac{r}{s} \right) = \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{tr}{us} \right) = \frac{ptr}{qus} = \frac{tpr}{uqs} \end{aligned}$$

Jadi, $(\mathbb{Q}, +, \cdot; \mathbb{Q})$ adalah suatu aljabar atas \mathbb{Q} .

ALJABAR NONASOSIATIF

Secara umum, suatu ring R adalah suatu grup abelian terhadap penjumlahan yang juga asosiatif terhadap perkalian serta memenuhi sifat distributif kiri dan kanan terhadap penjumlahan. Sedangkan pada aljabar A atas sebuah field F , A adalah sebuah ring dan juga merupakan sebuah ruang vektor atas F yang memenuhi sifat asosiatif terhadap perkalian. Meskipun begitu, sering kali sifat asosiatif terhadap perkalian tersebut tidak dapat dipenuhi oleh banyak kasus aljabar. Untuk kasus-kasus ini, digunakan istilah ring dan aljabar untuk sistem-sistem aljabar yang lebih umum. Didefinisikan sebuah ring R dengan operasi penjumlahan yang merupakan sebuah grup abelian dan tertutup terhadap perkalian serta memenuhi sifat distributif kiri dan kanan. Didefinisikan pula aljabar A atas field F yang merupakan sebuah ruang vektor atas F dengan operasi perkalian vektor dan skalar. Secara umum, sebuah aljabar disebut sebagai nonasosiatif aljabar dengan tujuan untuk menekankan bahwa sifat asosiatif pada ring tidak diperhitungkan. Istilah nonasosiatif ini tidak mengartikan bahwa sifat asosiatif gagal untuk dipenuhi tetapi lebih merujuk kepada sifat asosiatif ini tidak dimasukkan ke dalam perhitungan [10].

ALJABAR GAMET

Dimisalkan gamet-gamet dari suatu populasi makhluk hidup diploid sebagai a_1, a_2, \dots, a_n . Pasangan-pasangan gamet tersebut memiliki sifat yang berbeda satu sama lain. Jika terjadi suatu perkawinan acak antar individu dalam populasi, maka terjadi penggabungan gamet a_i dan a_j yang akan menghasilkan zigot $a_i a_j$ atau $a_j a_i$ (dalam kasus ini $a_i a_j = a_j a_i$). Zigot akan mengalami pembelahan secara mitosis untuk membentuk individu baru. Pembelahan mitosis merupakan pembelahan sel yang menghasilkan dua sel anakan yang masing-masing memiliki sifat dan jumlah kromosom sama dengan indukannya. Setiap individu baru akan menghasilkan gamet pada umur tertentu. Berdasarkan hukum Mendel, kemungkinan sebuah zigot $a_i a_j$ menjadi gamet baru adalah $a_i a_j = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$. Namun dalam beberapa kasus, hukum Mendel tersebut tidak berlaku, misalnya ketika terjadi mutasi gen maka dibutuhkan generalisasi dari hukum Mendel tersebut. Misalkan γ_{ij} merupakan peluang zigot $a_i a_j$ menghasilkan gamet baru a_k dan gamet a_1, a_2, \dots, a_n merupakan elemen basis dari sebuah ruang vektor atas \mathbb{R} yang berdimensi- n dengan operasi perkalian yang didefinisikan sebagai berikut [11].

$$a_i a_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} a_k \quad (1)$$

dengan $0 \leq \gamma_{ijk} \leq 1$, $i, j, k = 1, \dots, n$

$$\sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} = 1, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\gamma_{ijk} = \gamma_{jik} \quad i, j, k = 1, \dots, n$$

Persamaan (1) menjelaskan bahwa untuk setiap pasangan gamet $a_i a_j$ akan menghasilkan gamet a_k dengan masing-masing peluangnya γ_{ijk} untuk $k = 1 \dots n$. Sebuah aljabar yang memenuhi persamaan (1) disebut sebagai aljabar gamet [12].

ALJABAR ZIGOT

Misalkan terdapat pasangan gamet, $a_{ij} = a_i a_j$ dengan pengertian bahwa $a_{ij} = a_{ji}$ dengan $i < j$ untuk $i, j = 1, 2, \dots, n$. Perkawinan acak zigot a_{ij} dan a_{pq} akan menghasilkan zigot a_{ks} dengan peluang tertentu, dimisalkan sebagai $\gamma_{ij,pq,ks}$. Misalkan pasangan gamet merupakan basis dari ruang vektor atas \mathbb{R} dengan operasi perkalian didefinisikan sebagai berikut [11].

$$a_{ij} a_{pq} = \sum_{k \leq s} \gamma_{ij,pq,ks} a_{ks} \quad (2)$$

dengan $0 \leq \gamma_{ij,pq,ks} \leq 1$,

$$\sum_{k,s=1}^n \gamma_{ij,pq,ks} = 1,$$

$$\gamma_{ij,pq,ks} = \gamma_{pq,ij,ks}$$

Dimana $i \leq j, p \leq q$ dan $k \leq s$ untuk $i, j = 1, 2, \dots, n$. Persamaan (2) menjelaskan bahwa untuk setiap pasangan gamet (zigot) a_{ij} dan a_{pq} ketika mengalami perkawinan acak $a_{ij}a_{pq}$ akan menghasilkan zigot baru a_{ks} dengan masing-masing peluangnya adalah $\gamma_{ij,pq,ks}$ untuk $k \leq s; k, s = 1 \dots n$. Sebuah aljabar yang memenuhi persamaan (2) disebut sebagai aljabar zigot [12].

STRUKTUR ALJABAR DALAM SISTEM GOLONGAN DARAH ABO

Ada 2 faktor yang mempengaruhi penggolongan darah dalam sistem golongan darah ABO, yaitu ada atau tidaknya antigen pada darah dan ada atau tidaknya antibodi pada darah. Pada percobaan kali hanya akan diperhatikan ada tidaknya antigen pada darah. Dengan permisalan sebagai berikut :

- a. Alel **A** artinya alel tersebut mengandung antigen A
- b. Alel **B** artinya alel tersebut mengandung antigen B
- c. Alel **O** artinya alel tersebut tidak mengandung antigen

Dengan sifat **A** dominan terhadap **O**, **B** dominan terhadap **O** dan **A, B** saling kodominan maka akan dicari perhitungan bagi sistem golongan darah ABO menggunakan aljabar gamet berdimensi n dan aljabar zigot. Dilakukan perkalian silang antara pasangan alel **AA** dan **AA**. Didefinisikan operasi \times sebagai operasi perkalian pembentukan zigot. Diketahui bahwa **AA** memiliki peluang membentuk gamet **A** sehingga diperoleh

$$AA = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = A \tag{3}$$

Dari persamaan (3) maka diperoleh persamaan zigotnya sebagai berikut

$$AA \times AA = \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A\right) \times \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A\right) = AA$$

Jadi, diperoleh bahwa kombinasi dari zigot **AA** terhadap zigot **AA** akan menghasilkan zigot **AA** dengan peluang 1. Proses ini dilakukan berulang untuk semua kemungkinan pasangan alel sehingga didapatkan tabel perkalian pasangan alel sebagai berikut.

Tabel 1 Hasil Perkalian Silang Semua Kemungkinan Pasangan Alel ABO

Pasangan alel	Hasil kali silang	Pasangan alel	Hasil kali silang
AA × AA	AA	BB × BB	BB
AA × AO	$\frac{1}{2}(AA + AO)$	BB × BO	$\frac{1}{2}(BB + BO)$
AA × BB	AB	BB × AB	$\frac{1}{2}(AB + BB)$
AA × BO	$\frac{1}{2}(AB + AO)$	BB × OO	BO
AA × AB	$\frac{1}{2}(AA + AB)$	BO × BO	$\frac{1}{4}(BB + 2BO + OO)$
AA × OO	AO	BO × AB	$\frac{1}{4}(AB + AO + BB + BO)$
AO × AO	$\frac{1}{4}(AA + 2AO + OO)$	BO × OO	$\frac{1}{2}(BO + OO)$
AO × BB	$\frac{1}{2}(AB + BO)$	AB × AB	$\frac{1}{4}(AA + BB + 2AB)$
AO × BO	$\frac{1}{4}(AB + AO + BO + OO)$	AB × OO	$\frac{1}{2}(AO + BO)$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{AO} \times \mathbf{AB} \quad \frac{1}{4}(\mathbf{AA} + \mathbf{AO} + \mathbf{AB} + \mathbf{BO}) \qquad \mathbf{OO} \times \mathbf{OO} \qquad \mathbf{OO} \\
 \mathbf{AO} \times \mathbf{OO} \quad \frac{1}{2}(\mathbf{AO} + \mathbf{OO})
 \end{array}$$

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari Tabel 1 kemudian akan dikaji perkalian silang dari tiap kemungkinan pasangan golongan darah. Diasumsikan bahwa perkawinan terjadi secara acak dan orang tua memiliki peluang yang sama untuk mewariskan sifat genetiknya. Berdasarkan asumsi ini diperoleh bahwa orang tua yang memiliki golongan darah A dan B memiliki peluang yang sama untuk mewariskan alel **O** kepada keturunannya. Peluang munculnya gamet **O** dari orang tua yang bergolongan darah A dan B didefinisikan sebagai $p_{O|A} = p_{O|B} = \alpha$. Diasumsikan pula bahwa semua orang tua dengan golongan darah AB memiliki peluang yang sama untuk mewariskan alel **A** kepada keturunannya. Peluang pewarisan gamet **A** dari orang tua yang bergolongan darah AB didefinisikan dengan $p_{A|AB} = \beta$. Jika selama meiosis diasumsikan bahwa gamet dari masing-masing orangtua terpilih secara acak dan tidak saling terkait maka dalam golongan darah AB memiliki kemungkinan pasangan alel **AB** dan dalam golongan darah A memiliki kemungkinan pasangan alel **AA** dan **AO** diperoleh $\alpha = \frac{1}{4}$ dan $\beta = \frac{1}{2}$. Setelah mendapatkan hasil dari kombinasi antara dua pasangan alel maka selanjutnya hasil yang diperoleh digunakan untuk menentukan hasil perkalian silang zigot dari antara dua golongan darah. Didefinisikan operasi \circ sebagai operasi biner bagi pasangan golongan darah pada sistem golongan darah ABO. Persamaan-persamaan yang diperoleh adalah sebagai berikut.

- A1. $O \circ O = O$
 A2. $O \circ A = \alpha O + (1 - \alpha)A$
 A3. $O \circ B = \alpha O + (1 - \alpha)B$
 A4. $O \circ AB = \beta A + (1 - \beta)B$
 A5. $A \circ A = \alpha^2 O + (1 - \alpha^2)A$
 A6. $A \circ B = \alpha^2 O + \alpha(1 - \alpha)A + \alpha(1 - \alpha)B + (1 - \alpha)^2 AB$
 A7. $A \circ AB = \beta A + \alpha(1 - \beta)B + (1 - \alpha)(1 - \beta)AB$
 A8. $B \circ B = \alpha^2 O + (1 - \alpha^2)B$
 A9. $B \circ AB = (1 - \alpha)\beta AB + \alpha\beta A + (1 - \beta)B$
 A10. $AB \circ AB = 2\beta(1 - \beta)AB + \beta^2 A + (1 - \beta)^2 B$

Diketahui parameter $p_{O|A} = p_{O|B} = \alpha$ dan $p_{A|AB} = p_{B|AB} = \beta$. Dari persamaan-persamaan di atas diperoleh sebuah definisi sebagai berikut.

Definisi 7 [13] Sebuah aljabar komutatif berdimensi empat atas \mathbb{R} dengan basis $\{O, A, B, AB\}$ dan dengan operasi perkalian \circ yang memenuhi persamaan A1. – A10. pada bagian sebelumnya disebut generalisasi aljabar sistem golongan darah ABO dan dinotasikan dengan $B(\alpha, \beta)$.

Jika pada saat perkawinan diasumsikan bahwa perkawinan berlangsung acak dan tidak saling terkait maka diperoleh $\alpha = \frac{1}{4}$ dan $\beta = \frac{1}{2}$, sehingga diperoleh sebuah definisi kasus khusus sebagai berikut.

Definisi 8 [13] Generalisasi dari aljabar sistem golongan darah ABO, $B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ disebut aljabar sistem golongan darah ABO.

STRUKTUR ALJABAR DALAM SISTEM GOLONGAN DARAH RHESUS

Disimbolkan alel **R** adalah golongan darah dengan rhesus positif (ada antigen dalam darah) dan alel **r** adalah golongan darah dengan rhesus negatif (tidak ada antigen dalam darah) dan diasumsikan **R** dominan terhadap **r**. Dilakukan perkalian silang antara pasangan alel **RR** dan **RR**. Didefinisikan operasi \times sebagai operasi perkalian pembentukan zigot. Diketahui bahwa **RR** memiliki peluang membentuk gamet **R** sehingga diperoleh

$$\mathbf{RR} = \frac{1}{2}\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{R} = \mathbf{R} \quad (4)$$

Dari persamaan (4) maka diperoleh persamaan zigotnya sebagai berikut

$$\mathbf{RR} \otimes \mathbf{RR} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{R}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{R}\right) = \mathbf{RR}$$

Jadi, diperoleh bahwa kombinasi dari zigot \mathbf{RR} terhadap zigot \mathbf{RR} akan menghasilkan zigot \mathbf{RR} dengan peluang 1. Proses dilakukan berulang untuk semua kemungkinan perkalian silang pasangan alel dan diperoleh hasil perkalian silangnya sebagai berikut.

Tabel 2 Hasil Perkalian Silang Semua Kemungkinan Pasangan Alel Rhesus

Pasangan alel	Hasil kali silang
$\mathbf{RR} \times \mathbf{RR}$	\mathbf{RR}
$\mathbf{RR} \times \mathbf{Rr}$	$\frac{1}{2}(\mathbf{RR} + \mathbf{Rr})$
$\mathbf{RR} \times \mathbf{rr}$	\mathbf{Rr}
$\mathbf{Rr} \times \mathbf{Rr}$	$\frac{1}{4}(\mathbf{RR} + 2\mathbf{Rr} + \mathbf{rr})$
$\mathbf{Rr} \times \mathbf{rr}$	$\frac{1}{2}(\mathbf{Rr} + \mathbf{rr})$
$\mathbf{rr} \times \mathbf{rr}$	\mathbf{rr}

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari Tabel 2 kemudian akan dikaji perkalian silang dari tiap kemungkinan pasangan golongan darah. Diasumsikan bahwa perkawinan terjadi acak dan setiap orang tua memiliki peluang yang sama untuk mewariskan golongan darahnya. Dimisalkan bahwa \mathbf{R} adalah orang yang memiliki golongan darah Rhesus positif dan \mathbf{r} adalah orang yang memiliki golongan darah Rhesus negatif. Diasumsikan bahwa semua orang tua dengan golongan darah \mathbf{R} memiliki peluang yang sama untuk mewariskan alel \mathbf{r} kepada keturunannya. Peluang pewarisan gamet \mathbf{r} dari orang tua yang bergolongan darah \mathbf{R} didefinisikan dengan $p_{\mathbf{r}|\mathbf{R}}$. Jika selama meiosis diasumsikan bahwa gamet dari masing-masing orang tua terpilih secara acak dan tidak saling terkait maka dalam golongan darah \mathbf{R} memiliki kemungkinan pasangan alel \mathbf{RR} dan \mathbf{Rr} sehingga diperoleh $p_{\mathbf{r}|\mathbf{R}} = \frac{1}{4} = \gamma$. Didefinisikan operasi \odot sebagai operasi biner bagi pasangan golongan darah pada sistem golongan darah Rhesus. Selanjutnya akan dikaji hasil perkalian pada setiap kemungkinan golongan darahnya sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\text{B1. } \mathbf{R} \odot \mathbf{R} = (1 - \gamma^2)\mathbf{R} + \gamma^2\mathbf{r}$$

$$\text{B2. } \mathbf{R} \odot \mathbf{r} = (1 - \gamma)\mathbf{R} + \gamma\mathbf{r}$$

$$\text{B3. } \mathbf{r} \odot \mathbf{r} = \mathbf{r}$$

Jadi diperoleh struktur aljabar dari sistem golongan adalah sebuah ruang vektor dengan basis $\{\mathbf{R}, \mathbf{r}\}$ dengan operasi biner \odot dan memenuhi persamaan B1. sampai B2.

STRUKTUR ALJABAR DALAM SISTEM GOLONGAN DARAH ABO RH

Sistem golongan darah ABO sering kali digunakan bersama dengan sistem golongan darah Rhesus maka penting untuk mengetahui struktur aljabar ketika golongan darah ABO digunakan bersama sistem golongan darah Rhesus. Sistem ini sering disebut dengan nama sistem golongan darah ABO Rh. Setelah memperoleh struktur aljabar dari sistem golongan darah ABO dan Rhesus maka akan didefinisikan operasi biner untuk sistem golongan darah ABO Rh.

Definisi 9 Dimisalkan X adalah basis bagi sebuah ruang vektor Y dengan $X = \{\mathbf{OR}, \mathbf{AR}, \mathbf{BR}, \mathbf{ABR}, \mathbf{Or}, \mathbf{Ar}, \mathbf{Br}, \mathbf{ABr}\}$. Didefinisikan operasi $*$ sebagai operasi biner bagi sistem golongan darah ABO Rh sebagai berikut.

$$ac * bd = (a \circ b)(c \odot d)$$

Contoh 10 Misalkan terjadi perkawinan acak dengan masing-masing memiliki golongan darah OR dan OR. Maka hasil perkawinan dari kedua orang tersebut adalah sebagai berikut.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \text{OR} * \text{OR} &= (O \circ O)(R \odot R) \\ &= (O)((1 - \gamma^2)R + \gamma^2r) \\ &= O((1 - \gamma^2)R) + O(\gamma^2r) \end{aligned}$$

Jadi diperoleh bahwa hasil perkawinan acak dari dua orang yang masing-masing bergolongan darah OR dan OR adalah $(1 - \gamma^2)OR + \gamma^2Or$. Selanjutnya langkah ini diulang untuk semua peluang pasangan golongan darah ABO Rh sehingga diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut.

- C1. $\text{OR} * \text{OR} = (1 - \gamma^2)OR + \gamma^2Or$
 C2. $\text{OR} * \text{AR} = \alpha(1 - \gamma^2)OR + \alpha\gamma^2Or + (1 - \alpha)(1 - \gamma^2)AR + (1 - \alpha)\gamma^2Ar$
 C3. $\text{OR} * \text{BR} = \alpha(1 - \gamma^2)OR + \alpha\gamma^2Or + (1 - \alpha)(1 - \gamma^2)BR + (1 - \alpha)\gamma^2Br$
 C4. $\text{OR} * \text{ABR} = \beta(1 - \gamma^2)AR + \beta\gamma^2Ar + (1 - \beta)(1 - \gamma^2)BR + (1 - \beta)\gamma^2Br$
 C5. $\text{AR} * \text{AR} = \alpha^2(1 - \gamma^2)OR + \alpha^2\gamma^2Or + (1 - \alpha^2)(1 - \gamma^2)AR + (1 - \alpha^2)\gamma^2Ar$
 C6. $\text{AR} * \text{BR} = \alpha^2(1 - \gamma^2)OR + \alpha^2\gamma^2Or + \alpha(1 - \alpha)(1 - \gamma^2)AR + \alpha(1 - \alpha)\gamma^2Ar + \alpha(1 - \alpha)(1 - \gamma^2)BR + \alpha(1 - \alpha)\gamma^2Br + (1 - \alpha)^2(1 - \gamma^2)ABR + (1 - \alpha)^2\gamma^2ABr$
 C7. $\text{AR} * \text{ABR} = \beta(1 - \gamma^2)AR + \beta\gamma^2Ar + \alpha(1 - \beta)(1 - \gamma^2)BR + \alpha(1 - \beta)\gamma^2Br + (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma^2)ABR + (1 - \alpha)(1 - \beta)\gamma^2ABr$
 C8. $\text{BR} * \text{BR} = \alpha^2(1 - \gamma^2)OR + \alpha^2\gamma^2Or + (1 - \alpha^2)(1 - \gamma^2)BR + (1 - \alpha^2)\gamma^2Br$
 C9. $\text{BR} * \text{ABR} = (1 - \alpha)\beta(1 - \gamma^2)ABR + (1 - \alpha)\beta\gamma^2ABr + \alpha\beta(1 - \gamma^2)AR + \alpha\beta\gamma^2Ar + (1 - \beta)(1 - \gamma^2)BR + (1 - \beta)\gamma^2Br$
 C10. $\text{ABR} * \text{ABR} = 2\beta(1 - \beta)(1 - \gamma^2)ABR + 2\beta(1 - \beta)\gamma^2ABr + \beta^2(1 - \gamma^2)AR + \beta^2\gamma^2Ar + (1 - \beta)^2(1 - \gamma^2)BR + (1 - \beta)^2\gamma^2Br$
 C11. $\text{OR} * \text{Or} = (1 - \gamma)OR + \gamma Or$
 C12. $\text{OR} * \text{Ar} = \alpha(1 - \gamma)OR + \alpha\gamma Or + (1 - \alpha)(1 - \gamma)AR + (1 - \alpha)\gamma Ar$
 C13. $\text{OR} * \text{Br} = \alpha(1 - \gamma)OR + \alpha\gamma Or + (1 - \alpha)(1 - \gamma)BR + (1 - \alpha)\gamma Br$
 C14. $\text{OR} * \text{ABr} = \beta(1 - \gamma)AR + \beta\gamma Ar + (1 - \beta)(1 - \gamma)BR + (1 - \beta)\gamma Br$
 C15. $\text{AR} * \text{Ar} = \alpha^2(1 - \gamma)OR + \alpha^2\gamma Or + (1 - \alpha^2)(1 - \gamma)AR + (1 - \alpha^2)\gamma Ar$
 C16. $\text{AR} * \text{Br} = \alpha^2(1 - \gamma)OR + \alpha^2\gamma Or + \alpha(1 - \alpha)(1 - \gamma)AR + \alpha(1 - \alpha)\gamma Ar + \alpha(1 - \alpha)(1 - \gamma)BR + \alpha(1 - \alpha)\gamma Br + (1 - \alpha)^2(1 - \gamma)ABR + (1 - \alpha)^2\gamma ABr$
 C17. $\text{AR} * \text{ABr} = \beta(1 - \gamma)AR + \beta\gamma Ar + \alpha(1 - \beta)(1 - \gamma)BR + \alpha(1 - \beta)\gamma Br + (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)ABR + (1 - \alpha)(1 - \beta)\gamma ABr$
 C18. $\text{BR} * \text{Br} = \alpha^2(1 - \gamma)OR + \alpha^2\gamma Or + (1 - \alpha^2)(1 - \gamma)BR + (1 - \alpha^2)\gamma Br$
 C19. $\text{BR} * \text{ABr} = (1 - \alpha)\beta(1 - \gamma)ABR + (1 - \alpha)\beta\gamma ABr + \alpha\beta(1 - \gamma)AR + \alpha\beta\gamma Ar + (1 - \beta)(1 - \gamma)BR + (1 - \beta)\gamma Br$
 C20. $\text{ABR} * \text{ABr} = 2\beta(1 - \beta)(1 - \gamma)ABR + 2\beta(1 - \beta)\gamma ABr + \beta^2(1 - \gamma)AR + \beta^2\gamma Ar + (1 - \beta)^2(1 - \gamma)BR + (1 - \beta)^2\gamma Br$
 C21. $\text{Or} * \text{AR} = \alpha(1 - \gamma)OR + \alpha\gamma Or + (1 - \alpha)(1 - \gamma)AR + (1 - \alpha)\gamma Ar$
 C22. $\text{Or} * \text{BR} = \alpha(1 - \gamma)OR + \alpha\gamma Or + (1 - \alpha)(1 - \gamma)BR + (1 - \alpha)\gamma Br$
 C23. $\text{Or} * \text{ABR} = \beta(1 - \gamma)AR + \beta\gamma Ar + (1 - \beta)(1 - \gamma)BR + (1 - \beta)\gamma Br$
 C24. $\text{Ar} * \text{BR} = \alpha^2(1 - \gamma)OR + \alpha^2\gamma Or + \alpha(1 - \alpha)(1 - \gamma)AR + \alpha(1 - \alpha)\gamma Ar + \alpha(1 - \alpha)(1 - \gamma)BR + \alpha(1 - \alpha)\gamma Br + (1 - \alpha)^2(1 - \gamma)ABR + (1 - \alpha)^2\gamma ABr$
 C25. $\text{Ar} * \text{ABR} = \beta(1 - \gamma)AR + \beta\gamma Ar + \alpha(1 - \beta)(1 - \gamma)BR + \alpha(1 - \beta)\gamma Br + (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)ABR + (1 - \alpha)(1 - \beta)\gamma ABr$
-

$$C26. Br * ABr = (1 - \alpha)\beta(1 - \gamma)ABr + (1 - \alpha)\beta\gamma ABr + \alpha\beta(1 - \gamma)AR + \alpha\beta\gamma Ar + (1 - \beta)(1 - \gamma)BR + (1 - \beta)\gamma Br$$

$$C27. Or * Or = Or$$

$$C28. Or * Ar = \alpha Or + (1 - \alpha)Ar$$

$$C29. Or * Br = \alpha Or + (1 - \alpha)Br$$

$$C30. Or * ABr = \beta Ar + (1 - \beta)Br$$

$$C31. Ar * Ar = \alpha^2 Or + (1 - \alpha^2)Ar$$

$$C32. Ar * Br = \alpha^2 Or + \alpha(1 - \alpha)Ar + \alpha(1 - \alpha)Br + (1 - \alpha)^2 ABr$$

$$C33. Ar * ABr = \beta Ar + \alpha(1 - \beta)Br + (1 - \alpha)(1 - \beta)ABr$$

$$C34. Br * Br = \alpha^2 Or + (1 - \alpha^2)Br$$

$$C35. Br * ABr = (1 - \alpha)\beta ABr + \alpha\beta Ar + (1 - \beta)Br$$

$$C36. ABr * ABr = 2\beta(1 - \beta)ABr + \beta^2 Ar + (1 - \beta)^2 Br$$

Dari persamaan C1. sampai C36. diperoleh bahwa struktur aljabar dari sistem golongan darah ABO Rh adalah sebuah ruang vektor dengan basis {OR, AR, BR, ABR, Or, Ar, Br, ABr} yang bekerja atas field \mathbb{R} dilengkapi operasi biner * dan memenuhi persamaan C1. sampai C36.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pembahasan sebelumnya kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini adalah struktur aljabar dalam sistem golongan darah ABO tersebut adalah operasi biner yang memenuhi karakteristik sebagai berikut

$$A1. O \circ O = O$$

$$A2. O \circ A = \alpha O + (1 - \alpha)A$$

$$A3. O \circ B = \alpha O + (1 - \alpha)B$$

$$A4. O \circ AB = \beta A + (1 - \beta)B$$

$$A5. A \circ A = \alpha^2 O + (1 - \alpha^2)A$$

$$A6. A \circ B = \alpha^2 O + \alpha(1 - \alpha)A + \alpha(1 - \alpha)B + (1 - \alpha)^2 AB$$

$$A7. A \circ AB = \beta A + \alpha(1 - \beta)B + (1 - \alpha)(1 - \beta)AB$$

$$A8. B \circ B = \alpha^2 O + (1 - \alpha^2)B$$

$$A9. B \circ AB = (1 - \alpha)\beta AB + \alpha\beta A + (1 - \beta)B$$

$$A10. AB \circ AB = 2\beta(1 - \beta)AB + \beta^2 A + (1 - \beta)^2 B$$

dengan parameter $p_{O|A} = p_{O|B} = \alpha$ dan $p_{A|AB} = p_{B|AB} = \beta$. Persamaan-persamaan A1. sampai A10. dapat digunakan untuk menghitung peluang pewarisan golongan darah sistem golongan darah ABO dengan kasus perkawinan acak dan tidak saling terikat dengan $\alpha = \frac{1}{4}$ dan $\beta = \frac{1}{2}$.

Diperoleh 3 aksioma-aksioma pembentuk struktur aljabar pada sistem golongan darah Rhesus dengan operasi biner \odot . Didefinisikan pula sebuah operasi biner * yang menghasilkan 36 persamaan-persamaan yang digunakan sebagai aksioma pembentuk struktur aljabar dalam sistem golongan darah ABO Rh.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Susanto, A.H. *Genetika*. Yogyakarta: Graha Ilmu; 2011.
- [2] Mitra, R.; Mishra, N. dan Rath, G. P., Blood Groups Systems. *Indian Journal of Anaesthesia*. 2014; 58:524-528.
- [3] Daniels, G., *Human Blood Groups Ed ke-2*. Oxford: Blackwell Publishing Company; 2002
- [4] Yamamoto, F. Review: ABO blood group system--ABH oligosaccharide antigens, anti-A and anti-B, A and B glycosyltransferases, and ABO genes, *Immunohematology*. 2004; 20:3-22

- [5] Carritt, B.; Kemp, T.J. dan Poulter, M. Evolution of The Human RH (Rhesus) Blood Group Genes: A 50 Year Old Prediction (Partially) Fulfilled. *Human Molecular Genetics*. 1997; 6:843–850
- [6] Watson, A. *Key Understanding of Mathematics Learning. Paper 6: Algebraic Reasoning*. Nuffield Foundation; 2007
- [7] Arifin, A. *Aljabar Linier Ed Ke-2*. Bandung: Institut Teknologi Bandung; 2001
- [8] Gallian, J.A. *Contemporary Abstract Algebra, Ed ke-9*. Boston: Cengage Learning, 2015.
- [9] Simmons, G.F. *Introduction to Topology And Modern Analysis*. Florida: Robert E. Krieger Publishing Company; 1983.
- [10] Schafer, R.D. *An Introduction To Nonassociative Algebras*. , London: Academic Press Inc; 1966.
- [11] Fran, F. *Beberapa Struktur Aljabar Pada Pewarisan Genetik*. Bandung: Institut Teknologi Bandung, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam; 2015. (Tesis)
- [12] Reed, M.L. Algebraic Structure of Genetic Inheritance. *Bulletin of The American Mathematical Society*. 1997; 34:107-130
- [13] Casas, J.M.; Ladra, M., Omirov, B.A. dan Turdibaev, R. On Algebraic properties of ABO-Blood Type Inheritance Pattern, *Australia and New Zealand Industrial and Applied Mathematics (ANZIAM) Journal*. 2016 58:78-95

ANDRIKO : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
rikoandry@gmail.com

MARIATUL KIFTIAH : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
fransiskusfran@math.untan.ac.id
