Buletin Ilmiah Math. Stat. Dan Terapannya (Bimaster)
Volume 02, No. 3 (2013), hal 163 - 172

APLIKASI MATRIKS LESLIE UNTUK MEMPREDIKSI JUMLAH DAN LAJU PERTUMBUHAN SUATU POPULASI

Yudha Pratama, Bayu Prihandono, Nilamsari Kusumastuti

INTISARI

Matriks Leslie merupakan suatu matriks yang digunakan untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi. Beberapa faktor yang berpengaruh dalam pertumbuhan populasi adalah tingkat kesuburan, tingkat ketahanan hidup, dan rentang umur dari populasi. Langkah- langkah yang dilakukan untuk memprediksi jumlah populasi p tahun berikutnya dengan matriks Leslie yang pertama adalah dibentuk sebuah vektor kolom $\mathbf{n}(t)$ *yang entrinya merupakan jumlah awal populasi tiap kelas umur. Kedua, dicari* $\mathbf{n}(t+p)$ *yang merupakan jumlah populasi untuk p tahun berikutnya menggunakan rumus* $\mathbf{n}(t+p)=A^p\mathbf{n}(t)$ *dengan A merupakan matriks Leslie. Selanjutnya, untuk memprediksi laju pertumbuhan populasi dengan matriks Leslie adalah dengan mencari nilai eigen dari matriks A. Selanjutnya dari nilai-nilai eigen dicari nilai eigen dominan yaitu nilai eigen yang memiliki nilai harga mutlak paling besar. Jika nilai eigen dominan bernilai lebih dari 1 maka laju pertumbuhan populasi cenderung meningkat. Jika nilai eigen dominan bernilai kurang dari 1 maka laju pertumbuhan populasi cenderung menurun. Jika nilai eigen dominan bernilai sama dengan 1 maka laju pertumbuhan populasi cenderung tetap.*

***Kata Kunci** : matriks Leslie, pertumbuhan populasi, nilai eigen*

PENDAHULUAN

Perubahan jumlah pada suatu populasi dipengaruhi oleh keadaan internal dari populasi, yaitu kelahiran, kematian, dan ketahanan hidup. Adanya perubahan jumlah dari suatu populasi disebut pertumbuhan populasi. Pertumbuhan populasi dapat memberikan informasi apakah perubahan jumlah populasi untuk tahun berikutnya selalu meningkat, menurun atau tetap. Oleh karena itu digunakan matriks Leslie sebagai model pertumbuhan populasi untuk mengetahui prediksi jumlah dan prediksi laju pertumbuhan dari suatu populasi untuk tahun berikutnya.

Salah satu manfaat dari pemodelan dengan matriks Leslie adalah bagi peternak hewan yaitu untuk mengetahui pertumbuhan populasi dari hewan ternaknya. Matriks Leslie memiliki bentuk yang unik yaitu matriks Leslie berbentuk matriks persegi dengan entri baris pertama dari matriks Leslie terdiri dari tingkat kesuburan betina, sub diagonalnya berisi tingkat ketahanan hidup betina dan entri yang lain bernilai nol. Matriks Leslie ditemukan oleh seorang pakar Ekologi bernama P. H Leslie pada tahun 1945 [1]. Populasi yang digunakan pada perhitungan dengan matriks Leslie adalah populasi betina dari populasi tersebut. Faktor-faktor yang digunakan pada perhitungan dengan matriks Leslie adalah batas umur hidup akhir dari suatu betina, faktor tingkat kesuburan betina, dan tingkat ketahanan hidup betina.

Adapun tujuan penelitian ini adalah mengkaji karakteristik dari matriks Leslie, dan mengkaji langkah-langkah dalam memprediksi jumlah serta memprediksi laju pertumbuhan pada suatu populasi betina untuk tahun berikutnya. Batasan masalah pada penelitian ini adalah pada proses memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan populasi hanya dipengaruhi oleh tingkat kesuburan betina, tingkat ketahanan hidup betina dan batas umur hidup betina dari populasi hewan pada suatu populasi. Dalam penelitian ini juga diasumsikan bahwa paling sedikit terdapat satu kelas umur dari tingkat kesuburan yang bernilai positif, dan tingkat ketahanan hidup tidak boleh sama dengan nol, serta diasumsikan tidak adanya migrasi pada populasi tersebut.

Data populasi betina dari suatu populasi hewan yang diperlukan adalah batas umur akhir dari betina, tingkat kesuburan betina, dan tingkat ketahanan hidup betina, digunakan untuk mengetahui prediksi jumlah populasi untuk tahun berikunya. Untuk memprediksi laju pertumbuhan suatu populasi dapat menggunakan nilai eigen dominan yang diperoleh dari nilai-nilai eigen pada matriks Leslienya.

MATRIKS LESLIE

Pada populasi hewan, menghitung prediksi jumlah populasi dengan matriks Leslie untuk tahun berikutnya dipengaruhi oleh tingkat kesuburan dan tingkat ketahanan hidup betina dari suatu populasi [2]. Didefinisikan a_i sebagai tingkat kesuburan betina yaitu rata-rata jumlah anak betina yang lahir dari kelompok umur i saat waktu ke t. Didefinisikan b_i sebagai tingkat ketahanan hidup betina yaitu peluang betina yang dapat bertahan hidup dari kelas umur ke i sampai $i+1$ saat waktu ke t [1].

$$a_i \geq 0, \text{ untuk } i = 1,2,\dots,n$$
$$0 < b_i \leq 1 \text{ untuk } i = 1,2,\dots,n-1.$$

Berdasarkan batasan masalah diketahui bahwa paling sedikit satu kelas umur dari $a_i > 0$, karena jika $a_i = 0, \forall i$, maka pada kelas tersebut tidak ada kelahiran yang terjadi. Kelas umur yang memiliki nilai $a_i > 0$, disebut **kelas umur kesuburan.** Diketahui $b_i \neq 0$, karena jika $b_i = 0$ maka tidak ada betina yang dapat bertahan hidup kekelas berikutnya [2].

Jika terdapat batas umur hidup dari betina pada suatu populasi adalah A tahun, dan populasi dibagi menjadi i kelas umur, maka masing-masing kelas umur memiliki rentang umur A/i tahun [1]. Sebagai contoh dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1 Penentuan Kelas Umur

Kelas umur	Rentang umur
1	$[0, \frac{A}{i})$
2	$[\frac{A}{i}, \frac{2A}{i})$
3	$[\frac{2A}{i}, \frac{3A}{i})$
$\vdots$	$\vdots$
$i-1$	$[\frac{(i-2)A}{i}, \frac{(i-1)A}{i})$
i	$[\frac{(i-1)A}{i}, A]$

Diketahui jumlah populasi betina pada masing-masing kelas umur pada saat $t = 0$, dan dimisalkan $n_1(t)$ adalah jumlah betina di kelas umur pertama, $n_2(t)$ adalah jumlah betina di kelas umur kedua, dan seterusnya sampai $n_i(t)$ adalah jumlah betina dikelas umur i, maka jumlah keseluruhan populasi betina adalah

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t) + n_3(t) + \cdots + n_i(t).$$

Jumlah betina pada masing-masing kelas umur saat t dapat ditulis

$$\mathbf{n}(t) = \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_i(t) \end{bmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{n}(t)$ dinamakan **vektor distribusi umur awal** [3].

Untuk waktu $t+1$ dengan $n_1(t+1)$ adalah jumlah betina di kelas umur pertama, $n_2(t+1)$ adalah jumlah betina di kelas umur kedua, dan seterusnya sampai $n_i(t+1)$ adalah jumlah betina di kelas umur ke i, maka jumlah keseluruhan populasi betina adalah

$$n(t+1) = n_1(t+1) + n_2(t+1) + n_3(t+1) + \cdots + n_i(t+1).$$

Vektor distribusi umur $\mathbf{n}$ saat waktu $\mathrm{t}+1$ dapat ditulis

$$\mathbf{n}(t+1)=\begin{bmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ \vdots \\ n_i(t+1) \end{bmatrix}.$$

Didefinisikan pada waktu $t+1$, populasi pada kelas umur ke 1 adalah

$$n_1(t+1)=a_1n_1(t)+a_2n_2(t)+\cdots+a_in_i(t).$$

Jika jumlah populasi betina pada saat ke t untuk setiap kelas umurnya mencapai tahun ke $t+1$, maka untuk kelas umur pertama pada populasi saat $t+1$ adalah semua jumlah populasi betina yang dilahirkan dan berada saat ke t.

Didefinisikan jumlah betina pada kelas umur ke $i+1$ dengan $i=1,2,\dots,n-1$ saat waktu $t+1$ adalah rata-rata jumlah betina pada kelas umur ke i pada waktu ke t yang bertahan hidup saat waktu $t+1$. Sehingga dapat ditulis:

$$n_{i+1}(t+1)=b_in_i(t),\ \ i=1,2,\dots,i-1.$$

Populasi betina pada kelas umur kedua saat $t+1$ adalah populasi betina yang berada pada kelas umur pertama saat t yang dapat bertahan hidup hingga saat $t+1$. Populasi betina pada kelas umur ketiga saat $t+1$ adalah betina yang berada pada kelas umur kedua saat t yang dapat bertahan hidup hingga saat $t+1$. Dan seterusnya hingga populasi betina pada kelas umur ke i saat $t+1$. Sehingga dapat dibentuk model pertumbuhan populasi:

$$\begin{bmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ \vdots \\ n_i(t+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{i-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_i(t) \end{bmatrix}.$$

Atau model pertumbuhan populasi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{n}(t+1)=A\mathbf{n}(t) \tag{1}$$

dengan $\mathbf{n}(t+1)$ merupakan vektor populasi betina yang berisi prediksi jumlah populasi betina pada kelas umur saat $t+1$. A merupakan sebuah matriks Leslie berukuran $n\times n$, dan $\mathbf{n}(t)$ merupakan vektor populasi yang berisi jumlah populasi betina pada kelas umur saat t. Baris pertama pada matriks Leslie berisikan entri-entri dari tingkat kesuburan, sedangkan subdiagonal dari matriks Leslie berisikan entri-entri dari tingkat ketahanan hidup. Entri-entri yang lain dari matriks Leslie bernilai nol [1].

Model pertumbuhan populasi pada Persamaan (1) digunakan untuk memprediksi jumlah populasi 1 tahun berikutnya. Untuk mengetahui prediksi jumlah pertumbuhan populasi hingga p tahun berikutnya dilakukan beberapa pengembangan. Dari Persamaan (1) diperoleh

$$\begin{gathered}\mathbf{n}(t+1)=A\mathbf{n}(t)\\ \mathbf{n}(t+2)=A\mathbf{n}(t+1)=AA\mathbf{n}(t)=A^2\mathbf{n}(t)\\ \mathbf{n}(t+3)=A\mathbf{n}(t+2)=AA^2\mathbf{n}(t)=A^3\mathbf{n}(t)\\ \vdots\\ \mathbf{n}(t+p)=A\mathbf{n}\big(t+(p-1)\big)=AA^{p-1}\mathbf{n}(t)=A^p\mathbf{n}(t).\end{gathered}$$

Sehingga untuk p tahun berikutnya, model pertumbuhan populasi menjadi

$$\mathbf{n}(t+p)=A^p\mathbf{n}(t) \tag{2}$$

Contoh 1 :

Tuan Takur adalah seorang peternak domba di New Zealand. Dia ingin mengetahui apakah pertumbuhan populasi dari domba betinanya akan mengalami pertumbuhan meningkat secara drastis setelah 2 tahun kedepan. Jika mengalami pertumbuhan yang meningkat secara drastis, maka kebutuhan pangan untuk domba betina juga akan meningkat dan tuan Takur akan mengurangi jumlah dombanya. Diketahui jumlah awal domba betina yang dimiliki tuan Takur adalah 10 ekor dari setiap kelas umurnya.

Diketahui data

Tingkat Kesuburan dan Ketahanan Hidup Domba Betina di New Zealand

Umur(tahun)	Tingkat Kesuburan	Tingkat Ketahanan Hidup
0-1	0,000	0,845
1-2	0,045	0,975
2-3	0,391	0,965
3-4	0,472	0,950
4-5	0,484	0,926
5-6	0,546	0,000

Sumber : https://www.math.duke.edu//education/ccp/materials/linalg/leslie/lesl1.html

Penyelesaian :

Diketahui usia maksimal domba betina adalah 6 tahun. Dari data populasi domba betina diperoleh jumlah populasi awal domba betina adalah

$$\mathbf{n}(1)=\begin{bmatrix} n_1(1)\\ n_2(1)\\ n_3(1)\\ n_4(1)\\ n_5(1)\\ n_6(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\10\\10\\10\\10\\10\end{bmatrix}.$$

Jumlah total populasi awal dari domba betina adalah 60 ekor. Dari data populasi domba betina diperoleh tingkat ketahanan hidup betina, untuk kelas pertama adalah 0,845, dan untuk kelas kedua adalah 0,975, dan seterusnya. Tingkat kesuburan dari populasi bebek betina untuk kelas pertama adalah 0, kelas kedua adalah 0,045, dan seterusnya. Sehingga dibentuk matriks Leslie A sebagai berikut

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0{,}045 & 0{,}391 & 0{,}472 & 0{,}484 & 0{,}546\\ 0{,}845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}975 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}965 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}950 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}926 & 0\end{bmatrix}$$

Sehingga untuk jumlah domba betina 2 tahun berikutnya ($\mathbf{n}(3)$) dengan $p=2$ adalah

$\mathbf{n}(1+2)=A^2\mathbf{n}(1)$

$$\mathbf{n}(3)=\begin{bmatrix} 0 & 0{,}045 & 0{,}391 & 0{,}472 & 0{,}484 & 0{,}546\\ 0{,}845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}975 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}965 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}950 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}926 & 0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}10\\10\\10\\10\\10\\10\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}(3)=\begin{bmatrix} 0{,}038 & 0{,}381 & 0{,}455 & 0{,}459 & 0{,}505 & 0\\ 0 & 0{,}0038 & 0{,}330 & 0{,}398 & 0{,}408 & 0{,}461\\ 0{,}823 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}940 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}916 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}879 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\10\\10\\10\\10\\10\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}(3)=\begin{bmatrix}18{,}4\\16{,}3\\8{,}2\\9{,}4\\9{,}1\\8{,}7\end{bmatrix}.$$

Diperoleh prediksi jumlah populasi domba betina 2 tahun berikutnya adalah $18 + 16 + 8 + 9 + 9 + 8 = 68$ ekor. Diperoleh pertumbuhan populasi domba betina milik tuan Takur untuk 2 tahun berikutnya diprediksi naik hingga 68 ekor. Diprediksi pertumbuhan populasi dari domba betina milik tuan Takur tidak mengalami pertumbuhan yang begitu drastis, sehingga tuan Takur tidak perlu mengurangi jumlah dari dombanya.

NILAI EIGEN MATRIKS LESLIE

Rumus pada Persamaan (2) digunakan untuk mengetahui perkiraan jumlah populasi betina dari suatu populasi saat ke $t + p$. Untuk mengetahui prediksi laju pertumbuhan populasi dapat dilakukan dengan penyelidikan lebih lanjut tentang nilai eigen dari matriks Leslie. Nilai eigen dari matriks Leslie dapat menunjukkan laju pertumbuhan populasi cenderung meningkat, menurun, atau tetap.

Teorema 2 [1] *Sebuah matriks Leslie memiliki sebuah nilai eigen positif yang tunggal λ_1, nilai eigen ini memiliki multiplisitas satu dan sebuah vektor eigen $\mathbf{x_1}$ yang seluruh entri-entrinya adalah positif.*

Bukti:

Nilai eigen dari matriks Leslie A adalah akar-akar dari persamaan polinomial karakteristik matriks Leslie. Persamaan karakteristik dari matriks A dapat ditulis sebagai berikut:

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$$

$$\left|\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i\\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & b_2 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & b_{i-1} & 0\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i\\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & b_2 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & b_{i-1} & 0\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \cdots - a_ib_1b_2 \ldots b_{i-1} = 0 \tag{3}$$

Persamaan (3) dibagi dengan λ^n, maka diperoleh persaman:

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \cdots - a_ib_1b_2 \ldots b_{i-1}}{\lambda^n} = \frac{0}{\lambda^n}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{a_1}{\lambda} - \frac{a_2b_1}{\lambda^2} - \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} - \cdots - \frac{a_ib_1b_2 \ldots b_{i-1}}{\lambda^n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{a_ib_1b_2 \ldots b_{i-1}}{\lambda^n} = 1 \tag{4}$$

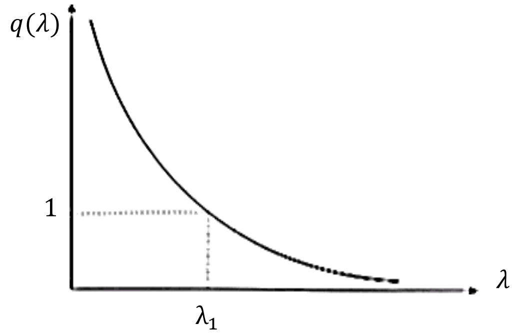
dimisalkan sebuah persamaan polinomial

$$q(\lambda) = a_1\lambda^{-1} + a_2b_1\lambda^{-2} + a_3b_1b_2\lambda^{-3} + \cdots + a_ib_1b_2 \ldots b_{i-1}\lambda^{-n} \tag{5}$$

sehingga diperoleh

$$q(\lambda) = 1 \tag{6}$$

Diketahui a_i, b_i bernilai positif. Jika nilai-nilai eigen dari matriks Leslie λ_i disubstitusikan ke Persamaan (5), dimisalkan λ_i bernilai positif dari 0 sampai ∞, maka nilai-nilai dari $q(\lambda_i)$ akan menuju nol dan monoton turun.



Gambar 1. Grafik Fungsi $q(\lambda)$

Dari Gambar 1 diperoleh nilai dari masing-masing nilai eigen λ_i memiliki tepat satu nilai solusi di $q(\lambda_i)$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai-nilai eigen dari matriks Leslie berbeda antara satu dan lainnya dan terdapat λ yang positif bersifat tunggal misalkan $\lambda = \lambda_1$ dan $q(\lambda_1) = 1$. Diperoleh juga λ_1 memiliki multiplisitas aljabar sama dengan satu.

Diberikan $\mathbf{x_1}$ merupakan suatu vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ_1 yang memenuhi

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{x_1} = 0.$$

Dimisalkan

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{i-1} & 0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{x_1} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{i-1} & -a_i \\ -b_1 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -b_{i-1} & \lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{x_1} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{i-1} & -a_i \\ -b_1 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -b_{i-1} & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} (\lambda_1 - a_1)x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - \cdots - a_{i-1}x_{n-1} - a_ix_n \\ -b_1x_1 + \lambda_1 x_2 \\ -b_2x_2 + \lambda_1 x_3 \\ \vdots \\ -b_{i-1}x_{n-1} + \lambda_1 x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh

$$(\lambda_1 - a_1)x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - \cdots - a_{i-1}x_{n-1} - a_ix_n = 0 \tag{7}$$

$$-b_1x_1 + \lambda_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{b_1x_1}{\lambda_1} \tag{8}$$

$$-b_2x_2 + \lambda_1 x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = \frac{b_2x_2}{\lambda_1} \Leftrightarrow x_3 = \frac{b_1b_2x_1}{\lambda_1^{\,2}} \tag{9}$$

$$\vdots$$

$$-b_{i-2}x_{n-2} + \lambda_1 x_{n-1} = 0 \Leftrightarrow x_{n-1} = \frac{b_{i-2}x_{n-2}}{\lambda_1} \Leftrightarrow x_{n-1} = \frac{b_1b_2 \ldots b_{i-2}x_1}{\lambda_1^{\,n-2}} \tag{10}$$

$$-b_{i-1}x_{n-1} + \lambda_1 x_n = 0 \Leftrightarrow x_n = \frac{b_{i-1}x_{n-1}}{\lambda_1} \Leftrightarrow x_n = \frac{b_1b_2 \ldots b_{i-1}x_1}{\lambda_1^{\,n-1}} \tag{11}$$

substitusi Persamaan (8), (9), (10), (11) ke Persamaan (7)

$$\lambda_1 x_1 - a_1x_1 - a_2\frac{b_1x_1}{\lambda_1} - a_3\frac{b_1b_2x_1}{\lambda_1^{\,2}} - \cdots - a_{n-1}\frac{b_1b_2 \ldots b_{i-2}x_1}{\lambda_1^{\,n-2}} - a_n\frac{b_1b_2 \ldots b_{i-1}x_1}{\lambda_1^{\,n-1}} = 0$$

$$x_1\left(\lambda_1 - a_1 - a_2\frac{b_1}{\lambda_1} - a_3\frac{b_1b_2}{\lambda_1^{\,2}} - \cdots - a_{n-1}\frac{b_1b_2 \ldots b_{i-2}}{\lambda_1^{\,n-2}} - a_n\frac{b_1b_2 \ldots b_{i-1}}{\lambda_1^{\,n-1}}\right) = 0$$

Diperoleh

$$x_1 = 0 \tag{12}$$

Diketahui $\mathbf{x_1}$ merupakan vektor tak nol yang bersesuaian dengan λ_1. Dari Persamaan (12), jika $x_1 = 0$, maka vektor eigen $\mathbf{x_1}$ yang bersesuaian dengan λ_1 merupakan vektor nol. Sedemikian sehingga dimisalkan $x_1 = t$, diperoleh

$$x_2 = \frac{b_1 t}{\lambda_1}$$
$$x_3 = \frac{b_1 b_2 t}{{\lambda_1}^2}$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} = \frac{b_1 b_2 \dots b_{i-2} t}{{\lambda_1}^{n-2}}$$
$$x_n = \frac{b_1 b_2 \dots b_{i-1} t}{{\lambda_1}^{n-1}}$$

Sehingga diperoleh vektor eigen $\mathbf{x_1}$ yang bersesuian dengan λ_1 berbentuk

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_{i-2}}{{\lambda_1}^{n-2}} \\ \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_{i-1}}{{\lambda_1}^{n-1}} \end{bmatrix} t \qquad (13)$$

dengan $t \in R - \{0\}$.
Berdasarkan Persamaan (13) diperoleh bahwa ruang eigen dari $\mathbf{x_1}$ memiliki dimensi satu, sehingga dapat disimpulkan multiplisitas geometrinya sama dengan satu serta diperoleh elemen-elemen dari vektor eigen $\mathbf{x_1}$ merupakan bilangan positif.■

Teorema 3 [1] *Jika* λ_1 *adalah suatu nilai eigen positif yang tunggal dari sebuah matiks Leslie dan* λ_k *adalah sebarang nilai eigen bilangan real atau bilangan kompleks dari matriks Leslie tersebut, maka* $|\lambda_k| \leq \lambda_1$.

Bukti:
Ambil sebarang

$$\lambda_k = re^{i\theta}$$

dengan

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

sehingga

$$\lambda_k = r\cos\theta + ir\sin\theta.$$

Akan ditunjukkan bahwa $r < \lambda_1$.
Dari Persamaan (6) diketahui $q(\lambda) = 1$
sehingga diperoleh

$$q(\lambda_k) = q(\lambda_1) = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{r\cos\theta + ir\sin\theta} + \frac{a_2 b_1}{(r\cos\theta + ir\sin\theta)^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{(r\cos\theta + ir\sin\theta)^3} + \cdots + \frac{a_i b_1 b_2 \dots b_{i-1}}{(r\cos\theta + ir\sin\theta)^n}$$
$$= \frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2 b_1}{{\lambda_1}^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{{\lambda_1}^3} + \cdots + \frac{a_i b_1 b_2 \dots b_{i-1}}{{\lambda_1}^n} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{\lambda_1} = \frac{a_1}{r\cos\theta + ir\sin\theta}$$

dengan mengambil bagian real dari kedua persamaan didapat:

$$\frac{a_1}{r\cos\theta} = \frac{a_1}{\lambda_1}$$

sedemikian sehingga

$$r = \frac{\lambda_1}{\cos\theta}$$

dan dapat disimpulkan bahwa

$$r \leq \lambda_1$$

dan

$$|\lambda_k| \leq \lambda_1.$$

Diketahui bahwa $r \leq \lambda_1$ maka terbukti bahwa untuk sebarang λ_k yang merupakan bilangan real ataupun kompleks berlaku $|\lambda_k| \leq \lambda_1$.■

Definisi 4 [3] *Diberikan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A berukran $n \times n$, λ_1 dikatakan nilai eigen dominan dari A jika:*
$|\lambda_1| > |\lambda_i|$ dengan $i = 1,2, \dots, n$.

Dimisalkan matriks Leslie A dapat didiagonalisasi, maka terdapat nilai eigen misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, dan memiliki vektor eigen $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \dots, \mathbf{x_n}$. Misalkan dibentuk matriks

$$P = [\,\mathbf{x_1}|\mathbf{x_2}|\mathbf{x_3}|\dots|\mathbf{x_n}],$$

maka terdapat P^{-1} yang merupakan invers matriks dari P. Diagonalisasi matriks A berbentuk:

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Untuk A^p dengan $p = 1,2, \dots, n$, maka persamaan diagonalisasi menjadi

$$A^p = P \begin{bmatrix} {\lambda_1}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {\lambda_n}^p \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Misalkan terdapat $\mathbf{n}(t)$ yang merupakan vektor distribusi awal dari suatu populasi, jika dikalikan dengan persamaan diagonalisasi, maka persamaan menjadi

$$A^p\mathbf{n}(t) = P \begin{bmatrix} {\lambda_1}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {\lambda_n}^p \end{bmatrix} P^{-1}\mathbf{n}(t).$$

Telah diketahui bahwa $\mathbf{n}(t+p) = A^p\mathbf{n}(t)$, sehingga

$$\mathbf{n}(t+p) = P \begin{bmatrix} {\lambda_1}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {\lambda_n}^p \end{bmatrix} P^{-1}\mathbf{n}(t),$$

dimisalkan jika entri hasil perkalian

$$P^{-1}\mathbf{n}(t) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \tag{14}$$

maka

$$\mathbf{n}(t+p) = [\,\mathbf{x_1}|\mathbf{x_2}|\mathbf{x_3}|\dots|\mathbf{x_n}] \begin{bmatrix} {\lambda_1}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {\lambda_n}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{n}(t+p) = [\,\mathbf{x_1}|\mathbf{x_2}|\mathbf{x_3}|\dots|\mathbf{x_n}] \begin{bmatrix} {\lambda_1}^p c_1 \\ {\lambda_2}^p c_2 \\ \vdots \\ {\lambda_n}^p c_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{n}(t+p) = \mathbf{x_1}{\lambda_1}^p c_1 + \mathbf{x_2}{\lambda_2}^p c_2 + \cdots + \mathbf{x_n}{\lambda_n}^p c_n.$$

Akan ditunjukkan jika λ_1 merupakan nilai eigen dominan akan berpengaruh terhadap pertumbuhan populasi. Kedua ruas dibagi dengan ${\lambda_1}^p$, maka persamaan menjadi

$$\frac{1}{{\lambda_1}^p}\mathbf{n}(t+p) = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p \end{bmatrix} P^{-1}\mathbf{n}(t).$$

Diketahui λ_1 merupakan nilai eigen dominan dari matriks Leslie, maka

$$\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) < 1, \text{ untuk } n = 1,2,\dots,n,$$

dan diperoleh

$$\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p \to 0 \text{ ketika } p \to \infty.$$

Dibentuk sebuah limit

$$lim_{p\to\infty} \frac{1}{\lambda_1{}^p} \mathbf{n}(t+p) = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} P^{-1}\mathbf{n}(t). \tag{15}$$

Diketahui P^{-1} merupakan matriks yang berordo $n \times n$, dan $\mathbf{n}(t)$ vektor distribusi awal yang berordo $n \times 1$. Jika P^{-1} dan $\mathbf{n}(t)$ dikalikan sesuai dengan sifat perkalian matriks, maka hasil matriksnya akan berordo $n \times 1$. Kedua matriks P^{-1} dan $\mathbf{n}(t)$ memiliki entri-entri yang merupakan suatu konstanta.

Dengan mensubstitusi Persamaan (14) ke Persamaan (15), diperoleh

$$\Leftrightarrow lim_{p\to\infty} \frac{1}{\lambda_1{}^p} \mathbf{n}(t+p) = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow lim_{p\to\infty} \frac{1}{\lambda_1{}^p} \mathbf{n}(t+p) = [\,\mathbf{x_1}|\mathbf{x_2}|\mathbf{x_3}|\dots|\mathbf{x_n}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow lim_{p\to\infty} \frac{1}{\lambda_1{}^p} \mathbf{n}(t+p) = [\,\mathbf{x_1}|\mathbf{x_2}|\mathbf{x_3}|\dots|\mathbf{x_n}] \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow lim_{p\to\infty} \frac{1}{\lambda_1{}^p} \mathbf{n}(t+p) = c_1\mathbf{x_1} + 0\mathbf{x_2} + 0\mathbf{x_3} + \cdots + 0\mathbf{x_n}$$

$$\Leftrightarrow lim_{p\to\infty} \frac{1}{\lambda_1{}^p} \mathbf{n}(t+p) = c_1\mathbf{x_1}, \tag{16}$$

dari Persamaan (16) diperoleh suatu pendekatan

$$\mathbf{n}(t+p) = c_1\lambda_1{}^p\mathbf{x_1}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{n}(t+(p-1)) = c_1\lambda_1{}^{p-1}\mathbf{x_1},$$

sedemikian sehingga

$$\mathbf{n}(t+p) = \lambda_1{}^p c_1\mathbf{x_1}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{n}(t+p) = \lambda_1{}^1\lambda_1{}^{p-1}c_1\mathbf{x_1}$$

diperoleh

$$\mathbf{n}(t+p) = \lambda_1\mathbf{n}\big(t+(p-1)\big) \tag{17}$$

Dari Persamaan (17) diperoleh bahwa, jika untuk nilai sebarang p yang menyatakan tahun berikutnya dalam populasi, dan diketahui $\lambda_1 = 1$ adalah nilai eigen yang dominan dari matrik Leslie, maka dapat diambil kesimpulan bahwa vektor distribusi umur berikutnya akan selalu sama dengan vektor umur sebelumnya. Sehingga berakibat :

1. Jika diketahui $\lambda_1 < 1$, maka populasi pada semua kelas umur cenderung menurun.
2. Jika diketahui $\lambda_1 = 1$, maka populasi pada semua kelas umur cenderung tetap.
3. Jika diketahui $\lambda_1 > 1$, maka populasi pada semua kelas umur cenderung meningkat.

Dari contoh 1 akan diprediksi laju pertumbuhan dari populasi domba betina milik tuan Takur. Dengan menggunakan nilai eigen dari matriks Leslie dapat mengetahui pertumbuhan populasi domba betina miliknya.

Menentukan nilai eigen dari matriks Leslie

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -0{,}045 & -0{,}391 & -0{,}472 & -0{,}484 & -0{,}546 \\ -0{,}845 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}975 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}965 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}950 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}926 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$0{,}99\lambda^6 - 0{,}0000000007\lambda^5 - 0{,}038\lambda^4 - 0{,}322\lambda^3 - 0{,}37\lambda^2 - 0{,}365\lambda - 0{,}381 = 0$$

Diperoleh $\lambda_1 = 1{,}09, \lambda_2 = 0{,}26 + 0{,}7i, \lambda_3 = 0{,}26 - 0{,}7i,$ $\lambda_4 = -0{,}75,$ $\lambda_5 = -0{,}43 + 0{,}68i,$ $\lambda_6 = -0{,}43 - 0{,}68i$ dan nilai eigen yang dominan adalah $\lambda_1 = 1{,}09$. Sedemikian sehingga dengan nilai eigen dominan ini dapat menunjukkan pertumbuhan populasi pada domba betina milik tuan Takur akan cenderung naik.

PENUTUP

Matriks Leslie merupakan sebuah matriks persegi berukuran $n \times n$, dengan entri baris pertama dari matriks Leslie berisi tingkat kesuburan, entri sub diagonalnya berisi tingkat ketahanan hidup dan entri yang lain berisi nilai 0. Faktor yang digunakan pada perhitungan dengan matriks Leslie adalah batas umur hidup, faktor tingkat kesuburan, dan tingkat ketahanan hidup dari populasi betina. Sebuah matriks Leslie memiliki sebuah nilai eigen positif yang tunggal, dan multiplisitasnya satu. Matriks Leslie memiliki satu nilai eigen positif yang nilai harga mutllaknya akan selalu lebih besar dari nilai eigen yang lainya. Nilai eigen positif tersebut dinamakan nilai eigen dominan. Jika dimisalkan λ_1 merupakan nilai eigen positif dominan dari matriks Leslie, maka nilai λ_1 digunakan untuk memprediksi kecenderungan laju pertumbuhan populasi apakah akan cenderung meningkat, menurun atau stabil. Dengan aturan, jika nilai $\lambda_1 > 1$ maka pertumbuhan jumlah populasi akan cenderung meningkat, jika nilai $\lambda_1 = 1$ maka pertumbuhan jumlah populasi akan cenderung tetap, dan jika nilai $\lambda_1 < 1$ maka pertumbuhan jumlah populasi akan cenderung menurun. Matriks Leslie juga dapat digunakan untuk memprediksi jumlah populasi pada tahun berikutnya dengan menggunakan model populasi $\mathbf{n}(t+p) = A^p\mathbf{n}(t)$. Diketahui $\mathbf{n}(t+p)$ adalah prediksi jumlah populasi untuk tahun ke p, A adalah matriks Leslie, dan $\boldsymbol{n}(t)$ adalah jumlah populasi saat ke t.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Anton, H., Rorres, C.W. *Aljabar Liniear Elementer versi aplikasi* [Indirasari,R,trans]. 8th ed. Safitri A,editor. Jakarta: Erlangga; 2004.

[2]. Montshiwa, M.I. Leslie Matrix Model in Population Dynamic, *African Institute for Mathematical Sciences*. 2007;

[3]. Anton H. *Aljabar Linear Elementer* [Silaban, Susila,trans]. 5th ed. Hutauruk R, editor. Jakarta: Erlangga; 1987.

YUDHA PRATAMA : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, yudhaskyaridmatik@gmail.com

BAYU PRIHANDONO : Jurusan MatematikaFMIPA UNTAN, Pontianak, beiprihandono@gmail.com

NILAMSARI KUSUMASTUTI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, uminilam@yahoo.com