Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 09, No. 1(2020), hal 87-94.

BILANGAN DOMINASI TOTAL PADA *TRIANGULAR SNAKE GRAPH*

Murti, Mariatul Kiftiah, Fransiskus Fran

INTISARI

Graf $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan titik dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik. Himpunan $D \subseteq V$, D disebut himpunan dominasi pada graf G jika semua titik yang tidak berada pada himpunan D bertetangga sedikitnya dengan satu titik dari D dan kardinalitas minimum dari D disebut bilangan dominasi $\gamma(G)$. Persekitaran S atau $N(S)$ adalah himpunan semua titik di G yang bertetangga dengan titik-titik di S. Himpunan $S \subseteq V$ adalah himpunan dominasi total dalam G jika $N(S) = V$ dan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi total dari graf G dilambangkan dengan $\gamma_t(G)$. Penelitian ini membahas tentang bilangan dominasi total pada triangular snake graph (T_n), line graph $(L(T_n))$ dan splitting graph $(S'(T_n))$ dari triangular snake graph (T_n). Triangular snake graph (T_n) adalah suatu bentuk graf yang diperoleh dari lintasan graf P_n dengan mengganti semua sisi lintasan graf P_n dengan segitiga C_3. Line graph $(L(T_n))$ adalah bentuk pemberian titik pada setiap sisi yang bersisian di graf G. Sedangkan splitting graph $(S'(T_n))$ adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan titik baru v' sesuai dengan titik v dari G sehingga $N(v) = N(v')$. Hasil dari penelitian diperoleh bilangan dominasi total pada triangular snake graph, line graph dan splitting graph dari triangular snake graph yaitu $\gamma_t(T_n) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$, $\gamma_t(L(T_n)) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$ dan $\gamma_t(S'(T_n)) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$.

Kata Kunci: *persekitaran, line graph, splitting graph*

PENDAHULUAN

Teori graf adalah bagian dari matematika diskrit yang digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan menjadi lebih sederhana dan mudah dipahami. Salah satu materi pada teori graf adalah himpunan dominasi total. Himpunan dominasi total dari graf $G = (V, E)$ merupakan suatu himpunan S dari titik-titik di G yang setiap titik di G bertetangga dengan titik di S, dan G tidak memiliki titik terpencil. Himpunan persekitaran di S atau $N(S)$ adalah himpunan semua titik di G yang bertetangga dengan titik-titik di S. Himpunan $S \subseteq V(G)$ adalah himpunan dominasi total di G jika setiap titik dalam $V(G)$ bertetangga dengan titik di S sehingga memenuhi $N(S) = V$ [1]. Bilangan dominasi total dari graf G yang dilambangkan dengan $\gamma_t(G)$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan yang mendominasi total di G.

Penerapan himpunan dominasi total yaitu pada konsep jaringan terpusat [1]. Jaringan terpusat yaitu jaringan yang terdiri dari komputer *client* dan jaringan komputer. Komputer *client* bertugas sebagai perantara dalam mengakses sumber informasi atau data yang berasal dari jaringan komputer. Dalam hal ini penggolongan himpunan dominasi total pada jaringan terpusat yaitu berdasarkan metode koneksi dalam pemprosesan data yaitu melalui jaringan berkabel (*wired network*) untuk menghubungkan satu komputer dengan komputer lain diperlukan penghubung berupa kabel jaringan. Kabel jaringan berfungsi dalam mengirim informasi dalam bentuk sinyal listrik antar komputer jaringan. Dengan kata lain bahwa komputer *client* bertetangga dengan jaringan komputer yang dihubungkan oleh metode koneksi yaitu melalui jaringan berkabel.

Penelitian ini membahas himpunan dominasi total pada *triangular snake graph* serta *line graph* dan *splitting graph* dari *triangular snake graph*. *Triangular snake graph* adalah suatu bentuk graf yang diperoleh dari graf lintasan yaitu graf P_n dengan mengganti semua sisi graf P_n dengan segitiga C_3 [8].

Dari *triangular snake graph* dapat dibentuk graf baru yaitu *line* dan *splitting*. *Line graph* dari *triangular snake graph* adalah perubahan sisi menjadi titik pada setiap sisi yang sisinya saling bersisian pada *triangular snake graph* [9]. Sedangkan *splitting graph* dari *triangular snake graph* adalah penambahan titik-titik baru v' sesuai dengan titik v dari *triangular snake graph* sehingga $N(v) = N(v')$[10].

TERMINOLOGI DASAR GRAF

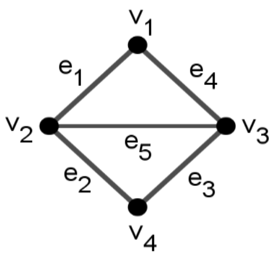
Berikut ini definisi terminologi dasar yang perlu diketahui yaitu sebagai berikut:

Definisi 1 [2] *Diberikan graf sederhana $G = (V, E)$. Persekitaran dari titik $v \in V$ dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan yang elemen-elemennya bertetangga (adjacent) dengan titik v,*

$$N(v) = \{x \in V | vx \in E\}.$$

Definisi 2 [3] *Diberikan graf sederhana $G = (V, E)$ dan $S \subseteq V$ maka $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$.*

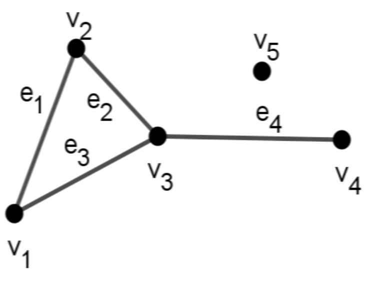
Contoh 3 Diberikan sebuah graf G dengan $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\})$. $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_4)$, $e_3 = (v_3, v_4)$, $e_4 = (v_1, v_3)$, dan $e_5 = (v_2, v_3)$.



Gambar 1 Graf G dengan 4 titik

Pada Gambar 1, titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan titik v_3, tetapi titik v_1 tidak bertetangga dengan titik v_4. Sisi e_1 bersisian dengan titik v_1 dan titik v_3, sisi e_2 bersisian dengan titik v_2 dan titik v_4, tetapi sisi e_1 tidak bersisian dengan titik v_4. Persekitaran masing-masing titik di G dengan banyaknya titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ adalah $N(v_1) = \{v_2, v_3\}$, $N(v_2) = \{v_1, v_3, v_4\}$, $N(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\}$, $N(v_4) = \{v_2, v_3\}$. Di ketahui $S = \{v_2, v_3\}$ maka himpunan persekitaran $N(S) = N(v_2) \cup N(v_3) = \{v_1, v_3, v_4\} \cup \{v_1, v_2, v_4\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Himpunan persekitaran di S adalah himpunan semua titik di G bertetangga dengan titik-titik di S yaitu $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Definisi 4 [4] *Titik terpencil ialah titik yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya, atau dapat juga dinyatakan bahwa titik terpencil adalah titik yang tidak memiliki satupun tetangga dengan titik-titik lainnya.*



Gambar 2 Graf G dengan 5 titik

Pada Gambar 2 titik terpencil adalah pada titik v_5 karena tidak ada satu pun sisi yang bersisian dengan titik tersebut.

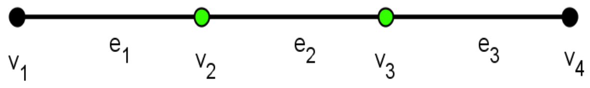
BILANGAN DOMINASI TOTAL

Salah satu topik dari teori graf adalah himpunan dominasi. Secara historis, masalah dominasi mulai dipelajari dari tahun 1950 oleh Hedetniemi dan Laskar [5].

Definisi 5 [5] *Diketahui graf $G = (V, E)$. Misalkan D merupakan subset dari V. Jika setiap titik dari $V - D$ saling bertetangga sedikitnya dengan satu titik dari D, maka D dikatakan himpunan dominasi pada graf G.*

Definisi 6 [6] *Bilangan dominasi dinotasikan $\gamma(G)$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi.*

Contoh 7 Diberikan suatu graf *path* dengan himpunan titiknya $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisinya $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ dengan titik warna hijau adalah titik pada himpunan dominasi total diperlihatkan pada Gambar 3 seperti berikut.



Gambar 3 Graf P_4

Pada Gambar 3 diketahui $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Terdapat beberapa kemungkinan himpunan dominasi pada graf G untuk menentukan bilangan dominasi pada graf G.

1. Himpunan dominasi $D_1 = \{v_1, v_3\}$. Titik dari $V - D_1 = \{v_2, v_4\}$ saling bertetangga dengan titik dari D. Titik v_2 bertetangga dengan titik $\{v_1, v_3\}$, titik v_4 bertetangga dengan titik v_3. Jadi $D = \{v_1, v_4\}$ merupakan himpunan dominasi dengan kardinalitas 2.
2. Himpunan dominasi $D_2 = \{v_2, v_3\}$. Titik dari $V - D_2 = \{v_1, v_4\}$ saling bertetangga dengan titik dari D. Titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, titik v_4 bertetangga dengan titik v_3. Jadi $D = \{v_2, v_3\}$ merupakan himpunan dominasi dengan kardinalitas 2.

Berdasarkan 1 dan 2 pada graf P_4 bilangan dominasi adalah $\gamma(P_4) = 2$.

Salah satu pengembangan bilangan dominasi adalah bilangan dominasi total yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 8 [1] *Diberikan graf $G = (V, E)$ dengan tidak ada titik terpencil dan himpunan $S \subseteq V$ dengan $S \neq \emptyset$. Himpunan S disebut himpunan dominasi total dalam G jika setiap titik $v \in V$ bertetangga dengan elemen S sehingga memenuhi $N(S) = V$.*

Berdasarkan Gambar 3 himpunan dominasi totalnya yaitu $\{v_2, v_3\}$. Hal tersebut karena, untuk $S = \{v_2, v_3\}$.

$$\begin{aligned} N(S) &= N(v_2) \cup N(v_3) \\ &= \{v_1, v_3\} \cup \{v_2, v_4\} \\ &= \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \\ &= V \end{aligned}$$

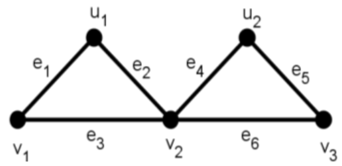
Berdasarkan Gambar 3, v_2 mendominasi v_1 dan v_3 sedangkan v_3 mendominasi v_2 dan v_4 yang berarti setiap titik $v_i \in V(P_4)$ bertetangga dengan elemen di $\{v_2, v_3\}$ maka diperoleh $\gamma_t(P_4) = 2$.

Diketahui bahwa dari Contoh 7 dari Gambar 3 untuk bilangan dominasi dari graf P_4 yang dilambangkan dengan $\gamma(P_4)$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi di P_4 yaitu $\gamma(P_4) = 2$, sedangkan bilangan dominasi total dari graf P_4 yang dilambangkan dengan $\gamma_t(P_4)$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan yang mendominasi total di P_4 yaitu $\gamma_t(P_4) = 2$. Hal ini berakibat bahwa $\gamma(G) \leq \gamma_t(G)$ [7].

Bilangan Dominasi Total pada *Triangular Snake Graph*

Definisi 9 [8] *Triangular snake graph T_n diperoleh dari graf lintasan P_n dengan mengganti setiap sisi lintasan dengan segitiga C_3.*

Bentuk *Triangular snake graph* dapat dilihat pada Gambar 4 sebagai berikut.



Gambar 4 Graf T_3

Triangular snake graph dengan jumlah titik berbeda memiliki pola bilangan dominasi total pada *Triangular snake graph*, sehingga diperoleh proposisi berikut :

Proposisi 10 *Untuk Triangular snake graph* T_n *maka* $\gamma_t(T_n) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$ *untuk* $n \geq 3$.

Bukti : Diberikan *Triangular snake graph* dengan $2n-1$ titik untuk $n \geq 3$ dan himpunan titik $V(T_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$. Misalkan diambil sebarang $v_i \in V(T_n)$ dengan $i \in \{2, \dots, n-1\}$ sehingga v_i mendominasi titik $\{v_{i-1}, v_{i+1}, u_{i-1}, u_i\}$. Akibatnya, setiap titik v_i mendominasi 4 titik disekitarnya, untuk titik v_1 dan v_n hanya mendominasi 2 titik. Oleh karena itu dapat dipilih salah satu himpunan dominasi total pada graf T_n yaitu

1. $\left\{v_2, v_3, v_5, v_6, \dots, v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}, v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right\}$ untuk $n = 3k, k \in \mathbb{N}$

$$N(S) = N(v_2) \cup N(v_3) \cup \dots \cup N\left(v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}\right) \cup N\left(v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right).$$
$$= \{v_1, v_3, u_1, u_2\} \cup \{v_2, v_4, u_2, u_3\} \cup \dots \cup \left\{v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)+1}, u_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, u_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}\right\}$$
$$\cup \left\{v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}, u_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}\right\} = V.$$

2. $\left\{v_2, v_3, v_5, v_6, \dots, v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}, v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right\}$ untuk $n = 3k+1, k \in \mathbb{N}$

$$N(S) = N(v_2) \cup N(v_3) \cup \dots \cup N\left(v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}\right) \cup N\left(v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right).$$
$$= \{v_1, v_3, u_1, u_2\} \cup \{v_2, v_4, u_2, u_3\} \cup \dots \cup \left\{v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)+1}, u_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, u_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}\right\}$$
$$\cup \left\{v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}, v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)+1}, u_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}, u_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right\} = V.$$

3. $\left\{v_2, v_3, v_5, v_6, v_8, v_9 \dots, v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}, v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right\} \cup \{v_{n-1}\}$ untuk $n = 3k+2, k \in \mathbb{N}$

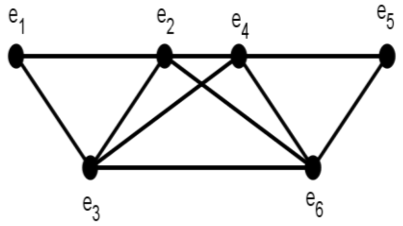
$$N(S) = N(v_2) \cup N(v_3) \cup \dots \cup N\left(v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}\right) \cup N\left(v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right) \cup N(v_{n-1}).$$
$$= \{v_1, v_3, u_1, u_2\} \cup \{v_2, v_4, u_2, u_3\} \cup \dots \cup \left\{v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)+1}, u_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, u_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}\right\}$$
$$\cup \left\{v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}, v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)+1}, u_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}, u_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right\} \cup \{v_{(n-1)-1}, v_{(n-1)+1}, u_{(n-1)-1}, u_{n-1}\} = V.$$

Sehingga diperoleh bilangan dominasi total $\gamma_t(T_n) \leq \left\lfloor\frac{2n}{3}\right\rfloor$. Selanjutnya akan ditunjukkan bilangan dominasi total minimum pada *triangular snake graph* $\gamma_t(T_n) = \left\lfloor\frac{2n}{3}\right\rfloor$. Misalkan $\gamma_t(T_n) = \left\lfloor\frac{2n}{3}\right\rfloor - 1$ maka terdapat $\left\lfloor\frac{2n}{3}\right\rfloor - 1$ titik yang merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi total pada *triangular snake graph*. Jika terdapat $\left\lfloor\frac{2n}{3}\right\rfloor - 1$ titik pada himpunan dominasi total yang dipilih sembarang maka mengakibatkan paling tidak 1 titik pada graf T_n yang tidak terdominasi. Oleh karena itu disimpulkan bahwa bilangan dominasi total pada *triangular snake graph* yaitu $\gamma_t(T_n) = \left\lfloor\frac{2n}{3}\right\rfloor$.

Bilangan Dominasi Total pada *Line Graph* Triangular Snake

Definisi 11 [9] *Misal graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Graf garis (line graph) $L(G)$ adalah graf dengan $V(L(G)) = E(G)$ dan titik di $L(G)$ akan bertetangga jika dan hanya jika sisi-sisi yang bersesuaian saling bersisian di G.*

Bentuk *line graph* pada *triangular snake graph* dapat dilihat pada Gambar 5 sebagai berikut.



Gambar 5 Graf $L(T_3)$

Line graph pada *triangular snake graph* dengan jumlah titik berbeda memiliki pola bilangan dominasi total *line graph* pada *triangular snake graph,* sehingga diperoleh proposisi berikut :

Proposisi 12 *Jika $L(T_n)$ adalah line graph dari triangular snake graph maka* $\gamma_t\big(L(T_n)\big) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$.

Bukti : Diberikan *line graph* pada *triangular snake graph* dengan $3n - 3$ untuk $n \geq 3$ dan himpunan titik $V\big(L(T_n)\big) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{3n-3}\}$. Diambil sebarang $e_i \in V\big(L(T_n)\big)$ dengan $i = 3k, k \in \mathbb{N}$ sehingga e_i mendominasi titik pada $\{e_{i-3}, e_{i-4}, e_{i-2}, e_{i-1}, e_{i+1,}, e_{i+3}\}$ akibatnya setiap titik e_i mendominasi 6 titik disekitarnya. Untuk titik e_3 dan e_n mendominasi 4 titik. Oleh karena itu, dapat dipilih salah satu himpunan dominasi total pada graf $L(T_n)$ yaitu

1. $\left\{e_3, e_6, e_{12}, e_{15}, \dots, e_{3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)}, e_{3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)}\right\}$ untuk $n = 3k, k \in \mathbb{N}$

$$N(S) = N(e_3) \cup N(e_6) \cup \dots \cup N\left(e_{3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)}\right) \cup N\left(e_{3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)}\right).$$

$$= \{e_1, e_2, e_4, e_6\} \cup \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_9\} \cup \dots \cup \left\{e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)\right)-4}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)\right)-3}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)\right)-2},\right.$$
$$\left. e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)\right)-1}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)\right)+1}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)\right)+3}\right\} \cup \left\{e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)\right)-4}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)\right)-3},\right.$$
$$\left. e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)\right)-2}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)\right)-1}\right\} = V.$$

2. $\left\{e_3, e_6, e_{12}, e_{15}, \dots, e_{3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)}, e_{3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)}\right\} \cup \left\{e_{3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\right)}\right\}$ untuk $n = 3k + 1, k \in \mathbb{N}$

$$N(S) = N(e_3) \cup N(e_6) \cup \dots \cup N\left(e_{3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)}\right) \cup N\left(e_{3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)}\right) \cup N\left(e_{3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\right)}\right).$$

$$= \{e_1, e_2, e_4, e_6\} \cup \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_9\} \cup \dots \cup \left\{e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)\right)-4}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)\right)-3},\right.$$
$$\left. e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)\right)-2}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)\right)-1}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)\right)+1}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)\right)+3}\right\} \cup$$
$$\left\{e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)\right)-4}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)\right)-3}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)\right)-2}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)\right)-1}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)\right)+1}\right.$$
$$\left., e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)\right)+3}\right\} \cup \left\{e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\right)\right)-4}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\right)\right)-3}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\right)\right)-2}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\right)\right)-1}\right\} = V.$$

3. $\left\{e_3, e_6, e_{12}, e_{15}, e_{21}, e_{24}, \ldots, e_{3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)}, e_{3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)}\right\} \cup \left\{e_{3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\right)}\right\} \cup \left\{e_{3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)}\right\}$ untuk $n = 3k+2, k \in \mathbb{N}$

$$N(S) = N(e_3) \cup N(e_6) \cup \ldots \cup N\left(e_{3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)}\right) \cup N\left(e_{3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)}\right) \cup N\left(e_{3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\right)}\right) \cup N\left(e_{3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)}\right).$$

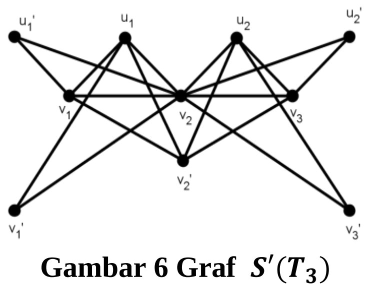
$$= \{e_1, e_2, e_4, e_6\} \cup \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_9\} \cup \ldots \cup \left\{e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)\right)-4}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)\right)-3}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)\right)-2}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)\right)-1}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)\right)+1}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-2\right)\right)+3}\right\} \cup \left\{e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)\right)-4}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)\right)-3}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)\right)-2}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)\right)-1}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)\right)+1}, e_{\left(3\left(3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)-1\right)\right)+3}\right\} \cup \left\{e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\right)\right)-4}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\right)\right)-3}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\right)\right)-2}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\right)\right)-1}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\right)\right)+1}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-3\right)\right)+3}\right\} \cup \left\{e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)\right)-4}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)\right)-3}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)\right)-2}, e_{\left(3\left(3\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)\right)-1}\right\} = V.$$

Sehingga diperoleh bilangan dominasi total $\gamma_t\big(L(T_n)\big) \leq \left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bilangan dominasi total minimum pada *line graph* $\gamma_t\big(L(T_n)\big) = \left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil$. Misalkan, $\gamma_t\big(L(T_n)\big) = \left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil - 1$ maka terdapat $\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil - 1$ titik yang merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi total *line graph* pada *triangular snake graph*. Dalam hal ini $\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil - 1$ titik pada himpunan dominasi total yang dipilih sembarang mengakibatkan ada 1 titik yang tidak terdominasi. Jadi, dapat disimpulkan bilangan dominasi total *line graph* pada *triangular snake graph* yaitu $\gamma_t\big(L(T_n)\big) = \left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil$.

Bilangan Dominasi Total pada *Splitting Graph Triangular Snake*

Definisi 13 [10] *Splitting graph* $S'(G)$ *dari graf* G *diperoleh dengan menambahkan sebuah titik baru* v' *sesuai dengan titik* v *dari* G *sehingga* $N(v) = N(v')$ *adalah* $N(v)$ *dan* $N(v')$*masing-masing adalah persekitaran dari* v *dan* v'.

Bentuk *splitting graph* pada *triangular snake graph* dapat dilihat pada Gambar 6 sebagai berikut.



Gambar 6 Graf $S'(T_3)$

Splitting graph pada *triangular snake graph* dengan jumlah titik berbeda memiliki pola bilangan dominasi total *splitting graph* pada *triangular snake graph*, sehingga diperoleh proposisi berikut :

Proposisi 14 *Jika* $S'(T_n)$ *adalah splitting graph dari triangular snake graph maka* $\gamma_t\big(S'(T_n)\big) = \left\lfloor\frac{2n}{3}\right\rfloor$.

Bukti : Diberika *splitting graph* pada *triangular snake graph* dengan $4n-2$untuk $n \geq 3$ dan himpunan titik $V\left(S'(T_n)\right)$ =$\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_1', v_2', \dots, v_n{}', u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_1', u_2', \dots, u_{n-1}'\}$. Diambil sembarang $v_i \in V\left(S'(T_n)\right)$ dengan $i \in \{2, \dots, n-1\}$ sehingga v_i mendominasi titik pada $\{v_{i-1}, v_{i-1}',$ $u_{i-1}, u_{i-1}', u_i, u_i', v_{i+1}, v_{i+1}'\}$ akibatnya setiap titik mendominasi 8 titik disekitarnya dan untuk titik v_1 dan v_n hanya mendominasi 4 titik. Oleh karena itu, dapat dipilih salah satu himpunan dominasi total pada *splitting graph* $S'(T_n)$ yaitu

1. $\left\{v_2, v_3, v_5, v_6, \dots, v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}, v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right\}$ untuk $n = 3k, k \in \mathbb{N}$

   $N(S) = N(v_2) \cup N(v_3) \cup \dots \cup N\left(v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}\right) \cup N\left(v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right).$

   $= \{v_1, v_3, v_1', v_3', u_1, u_2, u_1', u_2'\} \cup \{v_2, v_4, v_2', v_4', u_2, u_3, u_2', u_3'\} \cup \dots \cup \left\{v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)+1}\right.$ $\left., v'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, v'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)+1}, u_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, u_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}, u'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, u'_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}\right\} \cup \left\{v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1},\right.$ $\left. v'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}, u_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}, u'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}\right\} = V.$

2. $\left\{v_2, v_3, v_5, v_6, \dots, v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}, v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right\}$ untuk $n = 3k+1, k \in \mathbb{N}$

   $N(S) = N(v_2) \cup N(v_3) \cup \dots \cup N\left(v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}\right) \cup N\left(v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right).$

   $= \{v_1, v_3, v_1', v_3', u_1, u_2, u_1', u_2'\} \cup \{v_2, v_4, v_2', v_4', u_2, u_3, u_2', u_3'\} \cup \dots \cup \left\{v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)+1}\right.$ $\left., v'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, v'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)+1}, u_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, u_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}, u'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, u'_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}\right\} \cup \left\{v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1},\right.$ $\left. v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)+1}, v'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}, v'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)+1}, u_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}, u_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}, u'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}, u'_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right\} = V.$

3. $\left\{v_2, v_3, v_5, v_6, v_8, v_9, \dots, v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}, v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right\} \cup \{v_{n-1}\}$ untuk $n = 3k+2, k \in \mathbb{N}$

   $N(S) = N(v_2) \cup N(v_3) \cup \dots \cup N\left(v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}\right) \cup N\left(v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right) \cup N(v_{n-1}).$

   $= \{v_1, v_3, v_1', v_3', u_1, u_2, u_1', u_2'\} \cup \{v_2, v_4, v_2', v_4', u_2, u_3, u_2', u_3'\} \cup \dots \cup \left\{v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1},\right.$ $\left. v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)+1}, v'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, v'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)+1}, u_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, u_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}, u'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)-1}, u'_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1}\right\} \cup$ $\left\{v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}, v_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)+1}, v'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}, v'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)+1}, u_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}, v_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}, u'_{\left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)-1}, v'_{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\right\} \cup$ $\{v_{(n-1)-1}, v_{(n-1)+1}, v'_{(n-1)-1}, v'_{(n-1)+1}, u_{(n-1)-1}, u_{n-1}, u'_{(n-1)-1}, u'_{n-1}\} = V.$

Sehingga diperoleh bilangan dominasi total $\gamma_t\left(S'(T_n)\right) \leq \left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bilangan dominasi total minimum pada *splitting graph* $\gamma_t\left(S'(T_n)\right) = \left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil$. Misalkan, $\gamma_t\left(S'(T_n)\right) = \left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil - 1$ maka terdapat $\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil - 1$ titik yang merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi total *splitting graph* pada *triangular snake graph*. Jika terdapat $\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil - 1$ titik pada himpunan dominasi total yang dipilih sembarang maka mengakibatkan terdapat paling minimum 1 titik dan maksimum 4 titik pada graf $S'(T_n)$ yang tidak terdominasi. Jadi, dapat disimpulkan bilangan dominasi total *splitting graph* pada *triangular snake graph* yaitu $\gamma_t\left(S'(T_n)\right) = \left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil$.

KESIMPULAN

Himpunan $S \subseteq V$ adalah himpunan dominasi total dalam G jika $N(S) = V$. Bilangan dominasi total pada *triangular snake graph*, *line graph* dan *splitting graph* dapat diperoleh dengan cara mencari satu persatu himpunan dominasi total dari masing-masing graf dengan syarat bahwa setiap $N(S) = V$ sehingga diperoleh pola bilangan dominasi total pada masing-masing graf. Pada penelitian ini diperoleh bilangan dominasi total dari beberapa graf yaitu $\gamma_t(T_n) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$, $\gamma_t\big(L(T_n)\big) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$, $\gamma_t\big(S'(T_n)\big) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Henning MA dan Yeo A. *Total Domination in Graphs*. New York: Springer Science Business Media; 2013.

[2] Harris JM, Hirst LJ dan Mossinghoff JM. *Combinatorics and Graph Theory*. New York: Springer Science Business Media; 2008.

[3] Hernando C, Mora M dan Pelayo M. *Locating Domination in Bipartite Graphs and Their Complements*. Universitat Politecnica de Catalunya. 2017.

[4] Munir R. *Matematika Diskrit*, Ed ke-3. Bandung: Informatika; 2010.

[5] Santoso B, Djuwandi dan Soelistyo RH. Bilangan Dominasi dan Bilangan Kebebasan Graf Bipartit Kubik. *Jurnal Matematika*. 2012; Vol. 15.

[6] Wardani DAR, Agustin IH dan Dafik. Bilangan Dominasi dari Graf-Graf Khusus. *Journal Proceeding*. 2014; Vol. 1.

[7] Atapour M dan Soltankhah N. On Total Domination Sets in Graphs. *Int J Contemp Math Sciences*. 2009; Vol. 4.

[8] Lissie AJ dan Jaya S. Triple Connected Domination Number For Some Special Graphs. *International Journal of Current Research and Modern Education*. 2017.

[9] Roza I, Narwen dan Zulakmal. Graf Garis (*Line Graph*) dari Graf Siklus, Graf Lengkap dan Graf Bintang, *Jurnal Matematika UNAND*. 2014; Vol. 3.

[10] Ghosh P, Mishra SN dan Pal A. Various Labeling on Bull Graph and some Related Graphs. *International Journal of Applications of Fuzzy Sets and Artificial Intelligence*. 2015; Vol. 5.

MURTI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
murti27@student.untan.ac.id

MARIATUL KIFTIAH : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
fransiskusfran@math.untan.ac.id