BILANGAN *INDEPENDENT DOMINATION* PADA BEBERAPA GRAF

Lili Surai'ya, Evi Noviani, Fransiskus Fran

INTISARI

Suatu himpunan simpul dari graf G dikatakan himpunan *domination* jika semua simpul yang tidak berada di himpunan tersebut bertetangga dengan sedikitnya satu simpul di himpunan tersebut. Kardinalitas minimum dari himpunan *domination* disebut bilangan *domination*. Konsep himpunan *domination* terus berkembang salah satunya yaitu tentang himpunan *independent domination*. Simpul pada himpunan *independent domination* mendominasi simpul lain tetapi simpul pada himpunan tersebut tidak boleh saling bertetangga. Kardinalitas minimum dari himpunan *independent domination* yang dinotasikan dengan $i(G)$ disebut bilangan *independent domination*. Penelitian ini mengkaji tentang $i(G)$ pada beberapa graf yaitu graf cycle C_n , graf roda W_n , graf pizza Pz_n , graf bunga matahari SF_n , graf antiprisma AP_n dan graf prisma A_n . Graf pizza dan graf bunga matahari dibangun dari graf roda, graf roda dibangun dari graf cycle. Graf antiprisma dan graf prisma dibangun dari graf cycle. Berdasarkan analisis pada penelitian ini diketahui bahwa $i(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, $i(W_n) = 1$, $i(Pz_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1$, $i(SF_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $i(AP_n) = \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor$, dan $i(A_n)$ untuk $n = 4k$ yaitu $\frac{n}{2}$, untuk $n = 4k + 2$ yaitu $\frac{n}{2} + 1$, untuk $n = 4k - 1$ yaitu $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, dan untuk $n = 4k + 1$ yaitu $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Kata Kunci : graf cycle, graf roda, graf pizza, graf bunga matahari, graf antiprisma, graf prisma.

PENDAHULUAN

Graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss bernama Leonhard Euler. Leonhard Euler berhasil mengungkap misteri teka-teki jembatan Königsberg pada tahun 1736. Misteri teka-teki yang berkaitan dengan jembatan Königsberg yaitu apakah seseorang dapat melakukan perjalanan berangkat dari suatu daratan ke daratan lain dengan melewati semua jembatan yang ada masing-masing tepat satu kali. Misteri teka-teki jembatan Königsberg tidak terpecahkan sampai munculnya pembuktian secara matematis dari Leonhard Euler. Leonhard Euler menggunakan bantuan sebuah graf sebagai model dengan melambangkan setiap daratan yang dipisahkan oleh Sungai Pregel sebagai simpul, sedangkan setiap jembatan dilambangkan sebagai sisi. Akhirnya Leonhard Euler sampai pada kesimpulan bahwa tidak ada rute perjalanan dari satu daratan kembali ke daratan tersebut dengan melewati semua jembatan masing-masing tepat satu kali [1]. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan dengan objek-objek tersebut. Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam himpunan ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edge* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul [2].

Teori graf mengalami banyak perkembangan hingga saat ini. Salah satunya yaitu konsep *independent domination*. Konsep *independent domination* merupakan pengembangan dari konsep *domination* dan *independent* [3]. Himpunan *domination* dari sebuah graf G merupakan himpunan S subset dari V dimana setiap simpul di $V - S$ bertetangga setidaknya dengan satu simpul di S . Bilangan *domination* yaitu kardinalitas minimum dari himpunan *domination* yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$ [4]. Sedangkan himpunan *independent* dari graf G adalah suatu himpunan simpul – simpul dengan tidak ada dua simpul dalam himpunan tersebut yang saling bertetangga [5]. Bilangan *independent* yaitu kardinalitas maksimum dari himpunan *independent* yang dinotasikan dengan $\alpha(G)$ [3]. Himpunan S dari simpul-simpul graf G dikatakan himpunan *independent domination* jika pada himpunan S tidak ada dua simpul

yang saling bertetangga dan setiap simpul di $V(G)$ bertetangga dengan simpul di himpunan S . Bilangan *independent domination* yaitu kardinalitas minimum dari himpunan *independent domination* yang dinotasikan sebagai $i(G)$.

Himpunan *independent domination* digunakan untuk mengatasi masalah lokasi pusat bantuan darurat. Graf G digunakan untuk memodelkan sistem jalan dimana simpul-simpul dari G yaitu persimpangan jalan dan sisi dari G yaitu jalan yang menghubungkan persimpangan yang saling bertetangga. Permasalahan untuk menemukan beberapa lokasi titik pusat bantuan darurat sama dengan menentukan himpunan *independent domination* dari himpunan simpul pada graf G dan kardinalitas dari solusi optimal permasalahan tersebut yaitu $i(G)$ [6].

Penelitian ini menganalisis bilangan *independent domination* pada graf *cycle*, graf roda, graf pizza, graf bunga matahari, graf antiprisma, dan graf prisma. Graf tersebut dipilih karena memiliki kesamaan satu dengan yang lainnya yaitu sama-sama dibangun dari graf *cycle*. Pada penelitian [7], telah dibahas bilangan *independent domination* pada graf *helm*, graf *closed helm*, graf *gear*, graf *web*. Jadi pada penelitian ini mencari formula bilangan *independent domination* pada graf *cycle*, graf roda, graf pizza, graf bunga matahari, graf antiprisma, dan graf prisma.

BILANGAN INDEPENDENT DOMINATION

Pada tahun 1862 De Jaenisch mencetuskan ide awal dari himpunan *independent domination* yang berasal dari permasalahan “dominasi ratu” pada permainan papancatur. Berge dan Ore pada tahun 1962 merumuskan teori awal mengenai *independent domination*, sedangkan bilangan *independent domination* yang dinotasikan dengan $i(G)$ diperkenalkan oleh Cockayne dan Hedetniemi pada tahun 1974-1977 [3].

Hubungan ketaksamaan antara bilangan *independent domination* dengan bilangan *domination* dan bilangan *independent* yaitu sebagai berikut,

Lemma 1 [3] Misal diberikan graf G maka keterkaitan antara bilangan *domination*, bilangan *independent domination*, dan bilangan *independent* dapat ditulis sebagai berikut $\gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G)$.

Contoh 2. Misalkan diberikan sebuah graf G

Gambar 1 Graf G

Pada Gambar 1, simpul v_1 mendominasi simpul v_2 . Simpul v_3 mendominasi simpul v_2 dan v_4 , simpul v_5 mendominasi simpul v_2 , v_4 , v_6 serta simpul v_1, v_3, v_5 saling *independent*, sehingga dapat dipilih sebagai himpunan *independent domination* dari graf G yaitu $\{v_1, v_3, v_5\}$. Selain itu, terdapat beberapa kemungkinan himpunan *independent domination* pada graf G yaitu $\{v_1, v_3, v_5\}$, $\{v_1, v_3, v_6\}$, $\{v_1, v_4, v_6\}$, $\{v_2, v_4, v_6\}$. Bilangan *independent domination* dari graf G tersebut yaitu 3. Simpul v_2 dan simpul v_5 mendominasi semua simpul pada graf G sehingga himpunan *domination* pada graf G yaitu $\{v_2, v_5\}$. Bilangan *domination* pada graf G tersebut yaitu 2. Kemungkinan himpunan *independent* pada graf G yaitu $\{v_1, v_3, v_5\}$, $\{v_1, v_3, v_6\}$, $\{v_1, v_4, v_6\}$, $\{v_2, v_4, v_6\}$, dengan bilangan *independent* yaitu 3. Secara ringkas himpunan serta bilangan *independent domination* pada graf G dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1 *Independent domination* pada graf G

Himpunan <i>Domination</i>	$\gamma(G)$	Himpunan <i>Independent Domination</i>	$i(G)$	Himpunan <i>Independent</i>	$\alpha(G)$
$\{v_2, v_5\}$	2	$\{v_1, v_3, v_5\}$	3	$\{v_1, v_3, v_5\}$	3
		$\{v_1, v_3, v_6\}$	3	$\{v_1, v_3, v_6\}$	3
		$\{v_1, v_4, v_6\}$	3	$\{v_1, v_4, v_6\}$	3
		$\{v_2, v_4, v_6\}$	3	$\{v_2, v_4, v_6\}$	3

Bilangan *Independent Domination* pada Graf Cycle C_n

Graf lingkaran (*cycle graph*) merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf *cycle* dengan n simpul dilambangkan dengan C_n [8]. Bilangan *domination* dari graf *cycle* yaitu $\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Bilangan *independent domination* pada graf *cycle* dengan $n \geq 3$ disajikan pada Proposisi 3 berikut,

Proposisi 3. [3] *Bilangan independent domination pada graf cycle yaitu $i(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.*

Bukti. Diberikan graf *cycle* dengan n simpul $n \geq 3$. Setiap simpul pada graf *cycle* berderajat 2. Himpunan simpul graf *cycle* yaitu $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Misalkan diambil sebarang $v_i \in V(C_n)$, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Simpul v_i mendominasi maksimal 2 simpul lainnya dan *independent* terhadap simpul lain. Satu diantara himpunan *independent domination* dari graf *cycle* dilambangkan dengan A dan B berikut :

$$A = \left\{ v_1, v_4, v_7, \dots, v_{3\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor - 2} \right\} \cup \{v_{n-1}\} \text{ untuk } n = 3k + 1, k \in \mathbb{N},$$

$$B = \{v_1, v_4, v_7, \dots, v_{3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2}\} \text{ untuk } n \text{ lainnya.}$$

Bilangan *independent domination* dihitung dari banyaknya anggota pada himpunan A dan B . Berdasarkan indeks pada himpunan A dan B , simpul pertamanya dimulai dari v_1 dan beda 3 untuk simpul selanjutnya, pada himpunan A indeks terbesarnya adalah $3\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor - 2$, dan pada himpunan B indeks terbesarnya adalah $3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2$. Indeks pada himpunan A dan himpunan B dapat disusun menjadi suatu barisan aritmatika sebagai berikut :

$$A' = \left\{ 1, 4, 7, \dots, 3\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor - 2 \right\},$$

$$B' = \left\{ 1, 4, 7, \dots, 3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \right\}.$$

Banyaknya anggota himpunan tersebut dapat diperoleh menggunakan rumus barisan aritmatika dengan beda 3 dan suku pertama 1 sehingga pada himpunan B suku ke n yaitu $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ dan pada himpunan A suku ke n yaitu $\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Karena pada himpunan A $n = 3k + 1$ dengan $k \in \mathbb{N}$, sehingga

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1 &= \left\lfloor \frac{3k+1-1}{3} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{3k}{3} \right\rfloor + 1 \\ &= [k] + 1 = k + 1 \\ &= k + \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{1}{3} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{3k+1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \end{aligned}$$

Karena telah ditunjukkan $\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, maka dapat disimpulkan bahwa banyaknya anggota himpunan *independent domination* tersebut yaitu $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Oleh karena himpunan *independent domination* tidak tunggal, maka bilangan *independent domination* haruslah memenuhi $i(C_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Di lain pihak,

berdasarkan Lemma 1 diperoleh $i(C_n) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Jadi dapat disimpulkan bahwa bilangan *independent domination* pada graf *cycle* $i(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. ■

Contoh 4. Diberikan graf *cycle* C_4 seperti Gambar 2

Gambar 2 Graf *cycle* C_4

Gambar 2, graf C_4 dengan himpunan simpul $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Misalkan diambil simpul v_1 , simpul tersebut mendominasi simpul v_2 dan v_4 , tetapi *independent* dengan simpul v_3 . Sehingga himpunan *independent domination* pada graf C_4 yaitu $\{v_1, v_3\}$. Bilangan *independent domination* dari graf *cycle* yaitu $i(C_4) = 2$.

Bilangan *Independent Domination* pada Graf Roda W_n

Graf roda dengan $n + 1$ simpul dilambangkan dengan W_n . Graf roda diperoleh dengan cara menambahkan satu simpul pada graf lingkaran C_n , dan menghubungkan simpul baru tersebut dengan semua simpul pada graf lingkaran tersebut [8]. Bilangan *domination* dari graf roda yaitu $\gamma(W_n) = 1$. Bilangan *independent domination* pada graf roda dengan $n \geq 3$ disajikan pada Proposisi 5 berikut,

Proposisi 5. Bilangan *independent domination* pada graf roda yaitu $i(W_n) = 1$ untuk $n \geq 3$.

Bukti. Diberikan graf roda dengan $n + 1$ simpul dan $2n$ sisi, Himpunan simpul graf roda $V(W_n) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$. Simpul pusat v_0 pada graf roda berderajat n , dan simpul lainnya berderajat 3. Karena simpul v_0 berderajat n mengakibatkan simpul v_0 mendominasi semua simpul lainnya. Sehingga himpunan *independent domination* pada graf roda yaitu $\{v_0\}$. Oleh karena itu, bilangan *independent domination* graf roda yaitu 1. Jadi dapat disimpulkan bahwa bilangan *independent domination* pada graf W_n yaitu 1. ■

Contoh 6. Diberikan graf roda W_4 pada Gambar 3

Gambar 3 Graf roda W_4

Gambar 3, graf roda W_4 dengan himpunan simpul $V(W_4) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Pada graf W_4 simpul v_0 mendominasi semua simpul. Sehingga himpunan *independent domination* pada W_4 yaitu $\{v_0\}$. Bilangan *independent domination* pada graf roda yaitu $i(W_4) = 1$.

Bilangan *Independent Domination* pada Graf Pizza Pz_n

Graf pizza dengan $2n + 1$ simpul dinotasikan dengan Pz_n . Graf pizza dibentuk oleh graf roda W_n dengan $n + 1$ simpul. Simpul pusat dari W_n adalah simpul yang bertetangga dengan semua simpul lainnya. Setiap sisi yang bersisian dengan simpul pusat tersebut disebut dengan jari-jari (*spoke*) [9]. Bilangan *domination* dari graf pizza yaitu $\gamma(Pz_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1$. Bilangan *independent domination* pada graf pizza disajikan pada Proposisi 7 sebagai berikut.

Proposisi 7. Bilangan *independent domination* pada graf pizza yaitu $i(Pz_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1$, untuk $n \geq 3$.

Bukti. Diberikan graf pizza Pz_n dengan $2n + 1$ simpul dan $3n$ sisi. Graf pizza terdiri dari simpul w_i yang berderajat tiga, simpul v_i berderajat dua, dan simpul c berderajat n dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Himpunan simpul pada graf pizza yaitu $V(Pz_n) = \{c, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$. Ambil sebarang $v_i \in V(Pz_n)$, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Simpul w_i mendominasi tiga simpul lain dan *independent* terhadap simpul lain. Simpul c mendominasi semua simpul v_i . Karena simpul $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ pada graf pizza dibangun dari graf *cycle* maka pola untuk himpunan *independent domination*-nya sama. Salah satu himpunan *independent domination* dari graf pizza dilambangkan dengan A dan B sebagai berikut :

$$A = \{c\} \cup \left\{ w_1, w_4, w_7, \dots, w_{3\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor - 2} \right\} \cup \{w_{n-1}\} \text{ untuk } n = 3k + 1, k \in \mathbb{N},$$

$$B = \{c\} \cup \left\{ w_1, w_4, w_7, \dots, w_{3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2} \right\} \text{ untuk } n \text{ lainnya.}$$

Bilangan *independent domination* dihitung dari banyaknya anggota pada himpunan A dan B . Berdasarkan indeks pada himpunan tersebut, simpul pertamanya dimulai dari w_1 dan beda 3 untuk simpul selanjutnya, pada himpunan A indeks terbesarnya adalah $3\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor - 2$, dan pada himpunan B indeks terbesarnya adalah $3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2$. Indeks pada himpunan A dan himpunan B dapat disusun menjadi suatu barisan aritmatika sebagai berikut :

$$A' = \{1, 4, 7, \dots, 3\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor - 2\},$$

$$B' = \{1, 4, 7, \dots, 3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2\}.$$

Banyaknya anggota himpunan tersebut dapat diperoleh menggunakan rumus barisan aritmatika dengan beda 3 dan suku pertama 1 sehingga pada banyaknya anggota pada himpunan B yaitu $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$ dan banyaknya anggota pada himpunan A yaitu $\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 2$. Dengan menggunakan rumus aritmatika yang sama seperti pada proposisi 5 diperoleh $\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 2 = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$. Maka dapat disimpulkan bahwa banyaknya anggota himpunan *independent domination* dari graf pizza yaitu $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$. Oleh karena himpunan *independent domination* tidak tunggal, maka bilangan *independent domination* haruslah memenuhi $i(Pz_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$. Di lain pihak, berdasarkan Lemma 1 diperoleh $i(Pz_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$. Jadi dapat disimpulkan bahwa bilangan *independent domination* pada graf pizza $i(Pz_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$. ■

Contoh 8. Diberikan graf pizza Pz_4 dengan Gambar 4

Gambar 4 Graf pizza Pz_4

Gambar 4, Graf Pz_4 dengan himpunan simpul $V(Pz_4) = \{c, v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Misalkan diambil simpul w_1 , simpul w_1 mendominasi simpul v_1, w_2, w_4 tetapi *independent* terhadap simpul c, v_1, v_2, v_3 , dan w_3 . Simpul c mendominasi simpul v_1, v_2 , dan v_3 , *independent* terhadap simpul w_i , untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$, sehingga himpunan *independent domination* dari graf Pz_4 adalah $\{c, w_1, w_3\}$. Bilangan *independent domination* pada graf pizza yaitu $i(Pz_4) = 3$.

Bilangan *Independent Domination* pada Graf Bunga Matahari SF_n

Sebuah graf roda dengan simpul pusat c dengan $V(W_n) = \{c, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ serta n simpul tambahan $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$ dengan simpul w_i yang dihubungkan dengan sisi ke simpul v_i, v_{i+1} untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan simpul w_n dihubungkan dengan sisi ke simpul v_n, v_1 , disebut dengan graf bunga

matahari yang dinotasikan dengan SF_n untuk $n \geq 3$ [10]. Bilangan *domination* pada graf bunga matahari yaitu $\gamma(SF_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Bilangan *independent domination* pada graf bunga matahari disajikan pada Proposisi 9 berikut.

Proposisi 9. Bilangan *independent domination* pada graf bunga matahari yaitu $i(SF_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Bukti. Diberikan graf bunga matahari dengan $2n + 1$ simpul dan $4n$ sisi. Simpul pada graf bunga matahari ada yang berderajat 5 yaitu simpul v_i dan ada yang berderajat 2 yaitu simpul w_i . Himpunan simpul graf bunga matahari yaitu $V(SF_n) = \{c, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$. Ambil sebarang simpul $v_i \in V$, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ sehingga simpul v_i akan mendominasi lima simpul lainnya dan *independent* terhadap simpul lainnya. Sedangkan untuk simpul w_i hanya mendominasi dua simpul lainnya. Salah satu himpunan *independent domination* dari graf bunga matahari dilambangkan dengan A dan B seperti berikut :

$A = \{v_1, v_3, v_5, v_7, \dots, v_{2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1}\}$ untuk n genap,

$B = \{v_1, v_3, v_5, v_7, \dots, v_{2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 3}\} \cup \{w_{n-1}\}$ untuk n ganjil.

Bilangan *independent domination* dihitung dari banyaknya anggota pada himpunan A dan B . Berdasarkan indeks pada himpunan tersebut, simpul pertamanya dimulai dari v_1 dan beda 2 untuk simpul selanjutnya, pada himpunan A indeks terbesarnya adalah $2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$, dan pada himpunan B indeks terbesarnya adalah $2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 3$. Indeks pada himpunan A dan himpunan B dapat disusun menjadi suatu barisan aritmatika sebagai berikut :

$A' = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\}$,

$B' = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 3\}$.

Banyaknya anggota himpunan tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan rumus barisan aritmatika dengan beda 3 dan suku pertama 1 sehingga pada banyaknya anggota pada himpunan A yaitu $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dan banyaknya anggota pada himpunan B yaitu $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Sehingga banyaknya anggota himpunan *independent domination* yaitu $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Oleh karena himpunan *independent domination* tidak tunggal, maka bilangan *independent domination* haruslah memenuhi $i(SF_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Di lain pihak, berdasarkan Lemma 1 diperoleh $i(C_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Jadi dapat disimpulkan bahwa bilangan *independent domination* pada graf bunga matahari yaitu $i(SF_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. ■

Contoh 10. Diberikan graf bunga matahari SF_4 dengan Gambar 5

Gambar 5 Graf bunga matahari SF_4

Gambar 5, Graf bunga matahari SF_4 dengan himpunan simpul $V(SF_4) = \{c, v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Simpul v_1 mendominasi simpul c, v_2, v_4, w_1, w_4 tetapi *independent* terhadap simpul v_3, w_2 dan w_3 . Simpul v_3 mendominasi simpul w_2 dan w_3 , tetapi simpul w_2 dan w_3 saling *independent*. Sehingga himpunan *independent domination* pada graf SF_4 yaitu $\{v_1, v_3\}$. Bilangan *independent domination* pada graf bunga matahari yaitu $i(SF_4) = 2$.

Bilangan *Independent Domination* pada Graf Antiprisma AP_n

Graf antiprisma dinotasikan dengan AP_n . Graf antiprisma adalah graf dengan himpunan simpul $V(AP_n) = \{u_i, v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(AP_n) = \{u_i u_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_n u_1\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\} \cup \{u_i v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_n v_1\}$ [11]. Bilangan *domination* pada graf antiprisma yaitu $\gamma(AP_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$. Bilangan *independent domination* pada graf antiprisma disajikan pada Proposisi 11 sebagai berikut.

Proposisi 11. *Bilangan independent domination pada graf antiprisma yaitu $i(AP_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$.*

Bukti. Diberikan graf antiprisma (AP_n) dengan $2n$ simpul dan $4n$ sisi. Simpul pada graf antiprisma berderajat empat. Himpunan simpul graf antiprisma yaitu $V(AP_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$. Ambil sebarang v_i atau $u_i \in V(AP_n)$, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ sehingga simpul v_i atau u_i mendominasi empat simpul dan *independent* terhadap simpul lainnya. Satu diantara himpunan *independent domination* dari graf antiprisma yaitu :

$$A = \left\{ v_1, u_3, v_6, u_8, v_{11}, \dots, u_{5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2}, v_{5\left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor - 4} \right\} \cup \{u_{n-1}\} \text{ untuk } n = 5k - 2, k \in \mathbb{N},$$

$$B = \left\{ v_1, u_3, v_6, u_8, v_{11}, u_{13}, \dots, v_{5\left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor - 4}, u_{5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2} \right\} \text{ untuk } n = 5k - 1, k \in \mathbb{N},$$

$$C = \left\{ v_1, u_3, v_6, u_8, v_{11}, u_{13}, \dots, v_{5\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - 4}, u_{5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2} \right\} \text{ untuk } n = 5k, k \in \mathbb{N},$$

$$D = \left\{ v_1, u_3, v_6, u_8, v_{11}, u_{13}, \dots, v_{5\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor - 4}, u_{5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2} \right\} \cup \{v_{n-1}\} \text{ untuk } n = 5k + 1, k \in \mathbb{N},$$

$$E = \left\{ v_1, u_3, v_6, u_8, v_{11}, u_{13}, \dots, u_{5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2}, v_{5\left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor - 4} \right\} \text{ untuk } n = 5k + 2, k \in \mathbb{N}.$$

Bilangan *independent domination* dihitung dari banyak anggota pada himpunan tersebut. Berdasarkan indeks pada himpunan tersebut, simpul pertama v_i dimulai dari v_1 dan beda 5 untuk simpul selanjutnya. Simpul pertama u_i dimulai dari u_3 dan beda 5 untuk simpul selanjutnya. Pada himpunan A simpul dengan indeks terbesarnya adalah $u_{5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2}, v_{5\left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor - 4}$, pada himpunan B simpul dengan indeks terbesarnya adalah $v_{5\left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor - 4}, u_{5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2}$, pada himpunan C simpul dengan indeks terbesarnya adalah $v_{5\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - 4}, u_{5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2}$, pada himpunan D simpul dengan indeks terbesarnya adalah $v_{5\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor - 4}, u_{5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2}$, pada himpunan E simpul dengan indeks terbesarnya adalah $u_{5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2}, v_{5\left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor - 4}$. Pada himpunan

tersebut indeks dari simpul u dan simpul v dapat disusun menjadi barisan aritmatika sebagai berikut :

$$A_v' = \left\{ 1, 6, 11, 16, \dots, 5\left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor - 4 \right\}, A_u' = \left\{ 3, 8, 13, 18, \dots, 5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2 \right\},$$

$$B_v' = \left\{ 1, 6, 11, 16, \dots, 5\left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor - 4 \right\}, B_u' = \left\{ 3, 8, 13, 18, \dots, 5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2 \right\},$$

$$C_v' = \left\{ 1, 6, 11, 16, \dots, 5\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - 4 \right\}, C_u' = \left\{ 3, 8, 13, 18, \dots, 5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2 \right\},$$

$$D_v' = \left\{ 1, 6, 11, 16, \dots, 5\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor - 4 \right\}, D_u' = \left\{ 3, 7, 11, 15, \dots, 5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2 \right\},$$

$$E_v' = \left\{ 1, 6, 11, 16, \dots, 5\left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor - 4 \right\}, E_u' = \left\{ 3, 7, 11, 15, \dots, 5\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor - 2 \right\}.$$

Banyaknya anggota himpunan tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan rumus barisan aritmatika sama seperti pembuktian proposisi 5. Pada barisan aritmatika ini dengan beda 5, suku pertama 1 dan 3.

Sehingga banyaknya anggota himpunan *independent domination* dari graf antiprisma yaitu $\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$. Oleh karena himpunan *independent domination* tidak tunggal, maka bilangan *independent domination* haruslah memenuhi $i(AP_n) \leq \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$. Di lain pihak, berdasarkan Lemma 1 diperoleh $i(AP_n) \geq \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$. Jadi dapat disimpulkan bahwa bilangan *independent domination* pada graf antiprisma yaitu $i(AP_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$.

Contoh 12. Diberikan graf antiprisma AP_4 dengan Gambar 6

Gambar 6 Graf antiprisma AP_4

Gambar 6, Graf antiprisma A_4 dengan himpunan simpul $V(AP_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Misalkan diambil simpul v_1 , simpul v_1 mendominasi simpul v_2, v_4, u_1, u_4 tetapi *independent* dengan simpul v_3, u_2, u_3 . Simpul v_3 mendominasi simpul u_2 dan u_3 , sehingga himpunan *independent domination* dari graf AP_4 yaitu $\{v_1, v_3\}$. Bilangan *independent domination* pada graf antiprisma yaitu $i(AP_4) = 2$.

Bilangan *Independent Domination* pada Graf Prisma A_n

Graf prisma A_n adalah graf dengan himpunan simpul $V(A_n) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2n-1}\}$ dan himpunan sisi $E(A_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 0 \leq i \leq 2n-2, \text{ untuk } i \text{ genap}\} \cup \{v_{2n-1} v_1\} \cup \{v_i v_{i+2} \mid 0 \leq i \leq$

$2n-3\} \cup \{v_{2n-2} v_0\}$ [12]. Bilangan *domination* pada graf prisma, $\gamma(A_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, n = 4k \\ \frac{n}{2} + 1, n = 4k + 2, k \in \mathbb{N} \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, n = 2k + 1 \end{cases}$

Bilangan *independent domination* pada graf prisma disajikan pada Proposisi 13 berikut.

Proposisi 13. Bilangan *independent domination* pada graf prisma yaitu

$$i(A_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, n = 4k \\ \frac{n}{2} + 1, n = 4k + 2 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, n = 4k - 1 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, n = 4k + 1 \end{cases}, k \in \mathbb{N}.$$

Bukti. Diberikan graf prisma (A_n) dengan $2n$ simpul dan $3n$ sisi. Simpul pada graf prisma berderajat tiga. Himpunan simpul graf prisma yaitu $V(A_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$. Ambil sebarang v_i atau $w_i \in V(A_n)$, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ sehingga v_i atau w_i mendominasi tiga simpul lainnya dan *independent* terhadap simpul lainnya. Satu diantara himpunan *independent domination* dari graf prisma dilambangkan dengan A, B, C , dan D sebagai berikut :

$$A = \left\{ v_1, w_3, v_5, w_7, v_9, \dots, v_{2\left(\frac{n}{2}\right)-3}, w_{2\left(\frac{n}{2}\right)-1} \right\} \text{ untuk } n = 4k, k \in \mathbb{N},$$

$$B = \left\{ v_1, w_3, v_5, w_7, v_9, \dots, w_{2\left(\frac{n}{2}+1\right)-5}, v_{2\left(\frac{n}{2}+1\right)-3} \right\} \cup \{w_n\} \text{ untuk } n = 4k + 2, k \in \mathbb{N},$$

$$C = \left\{ v_1, w_3, v_5, w_7, v_9, w_{11}, \dots, v_{2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)-3}, w_{2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)-1} \right\} \text{ untuk } n = 4k - 1, k \in \mathbb{N},$$

$$D = \left\{ v_1, w_3, v_5, w_7, v_9, w_{11}, \dots, v_{2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+1\right)-7}, w_{2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+1\right)-5} \right\} \cup \{v_{2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+1\right)-4}, w_n\} \text{ untuk } n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}.$$

Bilangan *independent domination* dihitung dari banyaknya anggota pada himpunan tersebut. Berdasarkan indeks pada himpunan tersebut, simpul pertama v_i dimulai dari v_1 dan beda 4 untuk simpul selanjutnya. Simpul pertama w_i dimulai dari w_3 dan beda 4 untuk simpul selanjutnya. Pada himpunan A simpul dengan indeks terbesarnya yaitu $v_{2\left(\frac{n}{2}\right)-3}, w_{2\left(\frac{n}{2}\right)-1}$. Pada himpunan B simpul dengan indeks terbesarnya yaitu $w_{2\left(\frac{n}{2}+1\right)-5}, v_{2\left(\frac{n}{2}+1\right)-3}$. Pada himpunan C simpul dengan indeks terbesarnya yaitu

$v_{2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3)}, w_{2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)}$. Pada himpunan D simpul dengan indeks terbesarnya yaitu $v_{2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) - 7}, w_{2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) - 5}$. Pada himpunan tersebut indeks dari simpul v dan simpul w dapat disusun menjadi suatu barisan aritmatika sebagai berikut :

$$\begin{aligned} A_v' &= \{1, 5, 9, 13, \dots, 2\left(\frac{n}{2}\right) - 3\}, & A_w' &= \{3, 7, 11, 15, \dots, 2\left(\frac{n}{2}\right) - 1\}, \\ B_v' &= \{1, 5, 9, 13, \dots, 2\left(\frac{n}{2} + 1\right) - 3\}, & B_w' &= \{3, 7, 11, 15, \dots, 2\left(\frac{n}{2} + 1\right) - 5\}, \\ C_v' &= \{1, 5, 9, 13, \dots, 2\left[\frac{n}{2}\right] - 3\}, & C_w' &= \{3, 7, 11, 15, \dots, 2\left[\frac{n}{2}\right] - 1\}, \\ D_v' &= \{1, 5, 9, 13, \dots, 2\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) - 7\}, & D_w' &= \{3, 7, 11, 15, \dots, 2\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) - 5\}. \end{aligned}$$

Banyaknya anggota himpunan tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan rumus barisan aritmatika dengan beda 4 dan suku pertama 1 atau 3, sehingga banyak anggota pada himpunan A yaitu $\frac{n}{2}$, banyak anggota pada himpunan B yaitu $\frac{n}{2} + 1$, banyak anggota pada himpunan C yaitu $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ dan banyak anggota pada himpunan D yaitu $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Oleh karena himpunan *independent domination* tidak tunggal,

maka bilangan *independent domination* haruslah memenuhi $i(A_n) \leq \begin{cases} \frac{n}{2}, n = 4k \\ \frac{n}{2} + 1, n = 4k + 2 \\ \left[\frac{n}{2}\right], n = 4k - 1 \\ \left[\frac{n}{2}\right] + 1, n = 4k + 1 \end{cases}, k \in \mathbb{N}$. Di lain

pihak berdasarkan Lemma 1 diperoleh $\gamma(A_n) \leq i(A_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, n = 4k \\ \frac{n}{2} + 1, n = 4k + 2 \\ \left[\frac{n}{2}\right], n = 4k - 1 \\ \left[\frac{n}{2}\right] + 1, n = 4k + 1 \end{cases}, k \in \mathbb{N}$. Dilihat dari

hubungan ketaksamaan tersebut untuk bilangan *domination* dan bilangan *independent domination* pada A_n untuk n ganjil terdapat perbedaan. Sehingga dibuktikan bilangan *independent domination* untuk $i(A_n, n = 4k + 1) = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Andaikan $i(A_n, n = 4k + 1) = \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) - 1$, maka terdapat $\left[\frac{n}{2}\right]$ simpul yang merupakan kardinalitas minimum dari himpunan *independent domination*. Jika terdapat $\left[\frac{n}{2}\right]$ simpul yang dipilih sebarang, maka mengakibatkan paling sedikit ada 1 simpul yang tidak terambil, sehingga paling banyak ada 4 simpul yang tidak terdominasi. Hal ini bertentangan dengan definisi bilangan *independent domination* dengan kata lain $i(A_n, n = 4k + 1)$ haruslah $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Jadi dapat disimpulkan

bahwa bilangan *independent domination* dari graf prisma yaitu, $i(A_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, n = 4k \\ \frac{n}{2} + 1, n = 4k + 2 \\ \left[\frac{n}{2}\right], n = 4k - 1 \\ \left[\frac{n}{2}\right] + 1, n = 4k + 1 \end{cases}, k \in \mathbb{N}$.

■

Contoh 9. Diberikan Gambar 7 graf prisma A_4

Gambar 7 Graf prisma Graf A_4

Gambar 7, graf prisma A_4 dengan $V(A_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Misalkan diambil v_1 , simpul v_1 mendominasi simpul w_1, v_2, v_4 tetapi *independent* dengan v_3, w_2, w_3, w_4 . Diantara keempat simpul tersebut simpul w_3 mendominasi simpul v_3, w_2 , dan w_4 . Sehingga himpunan *independent domination* A_4 yaitu $\{v_1, w_3\}$. Bilangan *independent domination* dari graf prisma yaitu $i(A_4) = 2$.

KESIMPULAN

Bilangan *independent domination* pada graf *cycle*, graf roda, graf pizza, graf bunga matahari, graf antiprisma dan graf prisma dapat diperoleh dari menentukan himpunan *independent domination*-nya terlebih dahulu, sehingga akan didapatkan bilangan *independent domination*. Pada penelitian ini diperoleh bilangan *independent domination* dari beberapa graf seperti $i(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, $i(W_n) = 1$, $i(Pz_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$, $i(SF_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $i(AP_n) = \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor$, dan $i(A_n)$ untuk $n = 4k$ yaitu $\frac{n}{2}$, untuk $n = 4k + 2$ yaitu $\frac{n}{2} + 1$, untuk $n = 4k - 1$ yaitu $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, dan untuk $n = 4k + 1$ yaitu $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ibrahim dan Mussafi NSM. *Pengantar Kombinatorika & Teori Graf*. Yogyakarta: Graha Ilmu. 2012.
- [2] Munir R. *Matematika Diskrit Ed ke-3*. Bandung: Teknik Informatika; 2010.
- [3] Goddard W dan Henning MA. Independent Domination In Graphs: A Survey and Recent Results. *Discrete Mathematics*. 2013; 313:839-854.
- [4] Ratnasari L, Surarso B, Harjito dan Maunah U. Bilangan Dominasi Persekitaran pada Graf Lengkap dan Graf Bipartit Lengkap. *Jurnal Matematika*. 2017; 20(1):20-26.
- [5] Santoso B, Djuwandi dan Soelistyo RH. Bilangan Dominasi dan Bilangan Kebebasan Graf Bipartit Kubik. *Jurnal Matematika*. 2012; 15(1):12-16.
- [6] Henning MA, Oellermann OR dan Swart, HC. The Diversity of Domination. *Discrete Mathematics*. 1996; 161:161-173.
- [7] Vaidya SK dan Pandit RM. Independent Domination in Some Wheel Related Graphs. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*. 2016; 11(1):397-407.
- [8] Puspasari A dan Irawanto B. Bilangan Radio pada Graf Gear. *Jurnal Matematika*. 2013; 16(1):20-24.
- [9] Nabila S dan Salman ANM. The Rainbow Connection Number of Origami Graphs and Pizza Graphs. *Procedia Computer Science*. 2015; 74:162-167.
- [10] Amalia R dan Darmaji. Dimensi Partisi pada Graf Serupa Roda dengan Penambahan Anting. *Jurnal Teknik Pomits*. 2012; 1(1):1-6.
- [11] Andira, D. Irene Y dan Hasanah I. Rainbow Connection Number dan Strong Rainbow Connection Number Pada Shackle Graf Antiprisma AP_4 . *Jurnal "LOG!K@"*. 2018; 8(1):19-23.
- [12] Lisitsyna MA. Perfect 3-Colorings of Prism and Möbius Ladder Graphs. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2013; 7(2):215-220.

LILI SURAI'YA : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
lilisuraiyaa@gmail.com
EVI NOVIANI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
evi_noviani@math.untan.ac.id
FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
fransiskusfran@math.untan.ac.id