Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 08, No. 4 (2019), hal 861-868.

BILANGAN B-KROMATIK PADA GRAF ORIGAMI, GRAF LINTANG, DAN GRAF *TADPOLE*

Pranasari Kornelia, Evi Noviani, Fransiskus Fran

INTISARI

Pewarnaan b-colouring pada graf G adalah pewarnaan simpul-simpul G, sedemikian sehingga terdapat minimal satu simpul pada setiap kelas warna bertetangga dengan setidaknya satu simpul pada setiap kelas warna lainnya. Jumlah warna maksimum yang digunakan pada pewarnaan b-colouring di graf G disebut dengan bilangan b-kromatik yang dinotasikan dengan $\varphi(G)$. Pada penelitian ini dibahas tentang bilangan b-kromatik pada graf origami, graf lintang, dan graf tadpole. Graf origami (dinotasikan dengan O_n) merupakan graf dengan pusat berupa cycle dengan n simpul dan lipatan-lipatan yang dibentuk dari penggabungan dua buah cycle C_3, sedangkan graf lintang (dinotasikan dengan L_m) terbentuk dari 2 simpul kutub dan m simpul lintang, dan graf tadpole (dinotasikan dengan $T_{m,n}$) terbentuk dari graf lintasan dengan n simpul dan graf cycle dengan m simpul. Berdasarkan penelitian diperoleh bilangan b-kromatik pada graf origami yaitu 4 untuk $n = 3$ dan $n = 4$, 5 untuk $n = 5$, dan 6 untuk $n \geq 6$. Bilangan b-kromatik pada graf lintang yaitu 2 untuk $m \geq 2$ dan bilangan b-kromatik pada graf tadpole yaitu 3 untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$.

Kata Kunci: *b-colouring, graf origami, graf lintang, graf tadpole.*

PENDAHULUAN

Salah satu pembahasan dalam teori graf yang hingga kini masih menjadi topik yang menarik untuk dikaji yaitu tentang pewarnaan graf. Pewarnaan graf G merupakan pemetaan warna-warna ke simpul maupun sisi sehingga setiap simpul yang bertetangga atau sisi yang bersisian memiliki warna yang berbeda. Pewarnaan pada graf dibagi dalam tiga bagian yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, dan pewarnaan bidang.

Konsep pewarnaan *b-colouring* merupakan pengembangan dari pewarnaan simpul [1]. Pada penelitian [1], diperoleh pula konsep penentuan bilangan *b*-kromatik pada suatu graf. Pewarnaan *b-colouring* pada graf G adalah pewarnaan simpul-simpul pada graf G, sedemikian sehingga terdapat simpul di setiap kelas warna yang bertetangga dengan setidaknya satu simpul di kelas warna lainnya, simpul ini disebut juga simpul yang mendominasi [2]. Adapun definisi dari bilangan *b*-kromatik (dinotasikan dengan ($\varphi(G)$), didefinisikan sebagai jumlah maksimum dari k warna yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul dari G dengan pewarnaan *b-colouring* [3].

Pewarnaan *b-colouring* memiliki beberapa aplikasi, salah satunya yaitu pada penelitian yang membahas penggunaan konsep pewarnaan *b-colouring* pada kerangka kerja pengelompokkan data. Pada penelitian tersebut, disajikan kerangka kerja baru pewarnaan *b-colouring* graf untuk mengelompokkan objek-objek heterogen ke dalam kelompok-kelompok [4]. Selain aplikasi, masalah yang banyak dikaji tentang pewarnaan *b-colouring* adalah menentukan bilangan *b*-kromatik pada beberapa graf diantaranya bilangan *b*-kromatik pada graf matahari, graf barbel, dan beberapa graf lainnya [5]. Terkait hal tersebut, maka perlu dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai objek graf lainnya.

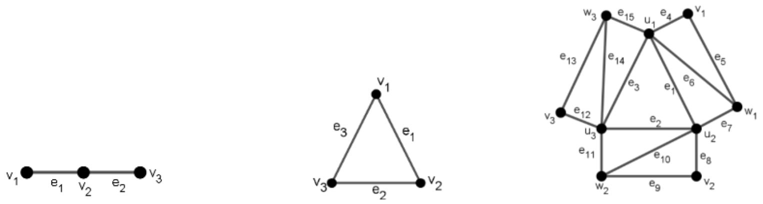
Graf origami, graf lintang, dan graf *tadpole* menarik untuk dibahas karena merupakan pengembangan dari graf-graf pembangun yaitu graf lintasan dan *cycle*. Graf origami merupakan graf dengan pusat berupa graf *cycle* dan lipatan-lipatan origami yang merupakan penggabungan dari dua buah graf *cycle* C_3. Graf lintang terbentuk dari graf lintasan dan graf *cycle*, sedangkan graf *tadpole* terbentuk dari penggabungan graf *cycle* dan graf lintasan. Sementara itu, penelitian terkait bilangan b-kromatik pada ketiga graf tersebut belum pernah dibahas oleh peneliti lainnya.

Terkait hal tersebut, maka akan dilakukan penelitian bilangan b-kromatik pada graf origami, graf lintang, dan graf *tadpole*. Namun sebelumnya akan dikaji terlebih dahulu bilangan b-kromatik pada graf yang membangun graf-graf tersebut yaitu bilangan b-kromatik pada graf lintasan dan *cycle*.

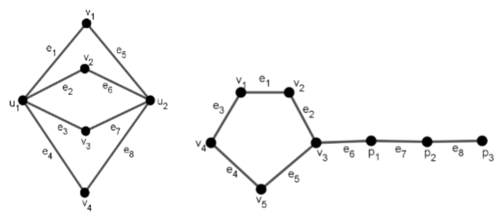
PEWARNAAN GRAF

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arc*) yang menghubungkan sepasang simpul. Adapun graf yang dibahas yaitu graf yang berkaitan dengan graf lintasan dan graf *cycle*.

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari sebuah lintasan tunggal. Graf lintasan dengan n simpul dilambangkan dengan P_n [7]. Adapun contoh dari graf lintasan terdapat pada Gambar 1 (a). Graf *cycle* adalah graf dengan n simpul yang setiap simpul berderajat dua untuk $n > 2$. Graf *cycle* dengan n simpul dilambangkan dengan C_n. Jumlah simpul pada graf *cycle* sama dengan jumlah sisinya [8]. Adapun contoh dari graf *cycle* terdapat pada Gambar 1 (b). Misalkan $n \in \mathbb{N}$, graf origami O_n dengan $3n$ simpul adalah graf yang himpunan simpulnya $V(O_n) = \{u_i, v_i, w_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(O_n) = \{u_i w_i, u_i v_i, v_i w_i, u_i u_{i+1}, w_i u_{i+1}, u_1 u_n, u_1 w_n | 1 \leq i \leq n\}$ [11]. Adapun contoh dari graf origami terdapat pada Gambar 1 (c). Komplemen dari suatu graf $G = (V, E)$ adalah graf $\bar{G} = (V, \bar{E})$, dimana sisi-sisi di $\bar{G}$ adalah sisi-sisi yang tidak ada di G [10]. Graf lintang, dilambangkan dengan L_m, didefinisikan sebagai $L_m = \overline{K_2} + \overline{K_m}$, untuk $m \geq 1$. Andaikan graf lintang memiliki himpunan simpul $V_1 = \{u_1, u_2\}$ sebagai simpul kutub dan $V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sebagai simpul lintang. Sementara himpunan sisi $E(L_m) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, dimana sisi $e_i = v_i u_1$ dan $e_{i+m} = v_i u_2$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, m$ [12]. Adapun contoh dari graf lintang terdapat pada Gambar 1 (d). Graf yang diperoleh dengan menggabungkan *cycle* C_m ke lintasan P_n, disebut graf *tadpole* yang dilambangkan dengan $T_{m,n}$ [13]. Adapun contoh dari graf tadpole terdapat pada Gambar 1 (e).



(a) (b) (c)



(d) (e)

Gambar 1 (a) Graf lintasan P_3, (b) graf *cycle* C_3, (c) graf origami O_3, (d) graf lintang L_4, (e) graf *tadpole* $T_{5,3}$

Pewarnaan graf G merupakan pemberian warna pada simpul ataupun sisi dengan batas dan aturan tertentu. Ada beberapa konsep dalam pewarnaan graf diantaranya pewarnaan simpul. Berikut dijelaskan tentang definisi dari pewarnaan simpul.

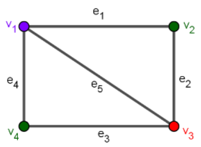
Definisi 1 [6] *Misalkan G adalah suatu graf dengan $V(G)$ merupakan himpunan simpul dari G dan misalkan $\{1,2,3,\dots,k\}$ merupakan himpunan semua warna yang ditetapkan untuk setiap simpul di graf G. Pewarnaan simpul adalah pemetaan $c : V(G) \rightarrow \{1,2,3,\dots,k\}$ dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk semua simpul yang bertetangga $u, v \in V(G)$.*

Pada pewarnaan simpul, dapat ditentukan warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul-simpul pada graf yang diberikan. Adapun jumlah warna minimum tersebut diberikan pada definisi berikut.

Definisi 2 [6] *Jika G dapat diwarnai dengan pewarnaan simpul maka bilangan kromatik dari G adalah jumlah warna minimum yang digunakan pada pewarnaan di graf G. Bilangan kromatik dinotasikan dengan $\chi(G)$.*

Dari Definisi 1 dan Definisi 2 diberikan contoh pewarnaan simpul pada suatu graf berikut.

Contoh 3 Diberikan pewarnaan simpul seperti berikut:



Gambar 2 Pewarnaan simpul pada graf G

Dari Gambar 2 pewarnaan simpul pada graf G menggunakan tiga warna yang berbeda dengan tidak ada dua simpul yang bertetangga memiliki warna yang sama. Tiga warna tersebut sudah termasuk warna minimum yang digunakan pada pewarnaan simpul pada graf G. Adapun bilangan kromatik dari graf yang menjadi objek penelitian akan disajikan pada Tabel 1 berikut ini.

Tabel 1 Bilangan kromatik dan derajat maksimum dari graf yang menjadi objek penelitian

No	Graf	$\chi(G)$	$\Delta(G)$
1	P_n	2	2
2	C_n	2, jika n genap	2
		3, jika n ganjil	
3	O_n	3	5
4	L_m	2	m
5	$T_{m,n}$	2, jika n genap	3
		3 jika n ganjil	

Pewarnaan *b-colouring* merupakan pewarnaan simpul dengan mempertimbangkan konsep ketetanggaan simpul [1]. Untuk lebih jelasnya, pewarnaan *b-colouring* akan dibahas pada bagian selanjutnya.

PEWARNAAN B-COLOURING DAN BILANGAN B-KROMATIK

Konsep pewarnaan *b-colouring* merupakan pengembangan dari pewarnaan simpul [1]. Dalam penelitian tersebut, diperkenalkan pula konsep untuk menentukan bilangan b-kromatik yang didefinisikan sebagai jumlah maksimum k dari warna pada simpul G, sehingga diperoleh warna yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul dari G. Adapun penjelasan dari pewarnaan *b-colouring* dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 4 [2] *Pewarnaan b-colouring pada graf G adalah pewarnaan simpul-simpul G sedemikian sehingga terdapat suatu simpul di setiap kelas warna yang bertetangga dengan paling tidak satu simpul di masing-masing kelas warna lainnya, simpul semacam itu disebut simpul yang mendominasi.*

Adapun definisi dari bilangan b-kromatik dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 5 [2] *Bilangan b-kromatik dari graf G, dilambangkan dengan $\varphi(G)$, adalah bilangan bulat maksimal k sehingga G dapat diwarnai dengan pewarnaan b-colouring menggunakan k warna.*

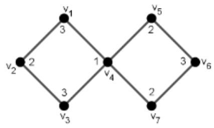
Adapun salah satu hasil penelitian yang digunakan untuk membuktikan graf-graf yang dibahas dijelaskan pada proposisi berikut.

Proposisi 6 [9] (1) *Jika G memuat b-colouring dengan m warna, G harus memiliki setidaknya m simpul dengan derajat setidaknya $m - 1$.*

(2) $\chi(G) \leq \varphi(G) \leq \Delta(G) + 1$, *dengan $\Delta(G)$ adalah derajat maksimum dari G.*

Bilangan b-kromatik pada graf hanya dapat dicari pada graf yang terhubung. Berikut akan disajikan contoh cara mencari bilangan b-kromatik pada suatu graf terhubung.

Contoh 7 Diberikan graf G seperti pada Gambar 3 berikut.



Gambar 3 Pewarnaan *b-colouring* pada graf *G* menggunakan 3 warna

Pada Gambar 3 dapat dilihat bahwa graf G merupakan b-*colouring* dan memenuhi Definisi 4 bahwa di setiap kelas warna ada simpul representatif yang bertetangga dengan setidaknya satu simpul di setiap kelas warna lainnya dan sudah merupakan pewarnaan maksimal yang digunakan. Akibatnya, maksimum kelas warna untuk pewarnaan simpul pada graf G yaitu sebanyak 3 kelas warna. Dengan demikian diperoleh bilangan b-kromatik pada graf G yaitu $\varphi(G) = 3$.

Pewarnaan b-*colouring* pada graf yang dibahas adalah graf yang berkaitan dengan graf lintasan dan graf *cycle*. Bilangan b-kromatik pada graf lintasan dan $cycle$ akan digunakan untuk mencari bilangan b-kromatik pada graf yang dibahas. Berikut bilangan b-kromatik pada graf lintasan dan $cycle$.

Proposisi 8 [9] *Jika P_n adalah graf lintasan dengan n simpul, maka $\varphi(P_2) = \varphi(P_3) = \varphi(P_4) = 2$ dan $\varphi(P_n) = 3$ untuk setiap $n \geq 5$.*

Selanjutnya yaitu bilangan b-kromatik pada graf *cycle* yang dijelaskan pada Proposisi 9 berikut.

Proposisi 9 [9] *Jika C_n adalah graf cycle dengan n simpul, maka $\varphi(C_3) = 3$ dan $\varphi(C_4) = 2$, serta $\varphi(C_n) = 3$ untuk setiap $n \geq 5$.*

Selanjutnya yaitu pewarnaan b-*colouring* dari graf origami, graf lintang, dan graf *tadpole* akan dijelaskan pada proposisi-proposisi berikut.

Proposisi 10 *Graf G adalah graf origami O_n untuk $n \geq 3$, dengan $3n$ simpul dan $3n$ sisi. Bilangan b-kromatik pada graf origami O_n adalah:*

$$\varphi(O_n) = \begin{cases} 4, & \text{jika } n = 3 \text{ dan } n = 4 \\ 5, & \text{jika } n = 5 \\ 6, & \text{jika } n \geq 6 \end{cases}$$

Bukti: Misalkan graf G adalah graf origami O_n untuk $n \geq 3$, dengan $3n$ simpul dan $3n$ sisi. Misalkan $u_i, v_i, w_i \in V(O_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Berdasarkan Proposisi 6, terdapat empat kasus bilangan b-kromatik pada graf O_n.

1) Untuk n = 3

Graf O_3 memiliki tiga simpul berderajat 5, tiga simpul berderajat 3, dan tiga simpul berderajat 2. Berdasarkan ketaksamaan pada Proposisi 6 dan Tabel 1 diperoleh 3 $\leq \varphi(O_n) \leq$ 6. Selanjutnya didefinisikan pewarnaan simpul yaitu:

$c(u_1)$ = $c(v_2)$ = $c(v_3)$ = 1,
$c(u_2)$ = $c(w_3)$ = 2,
$c(u_3)$ = $c(w_1)$ = 3, dan
$c(v_1)$ = $c(w_2)$ = 4.

Akibatnya terdapat simpul perwakilan pada setiap kelas warna yaitu simpul u_1 untuk kelas warna C_1, simpul u_2 untuk kelas warna C_2, simpul u_3 dan w_1 untuk kelas warna C_3, dan simpul w_2 untuk kelas warna C_4. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4 pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan b-colouring, sehingga diperoleh $\varphi(O_3)$ $\geq$ 4. Lebih lanjut, misalkan $\varphi(O_3)$ = 5, maka berdasarkan Proposisi 6 O_3 harus memiliki minimal lima simpul berderajat 4. Hal tersebut kontradiksi, karena O_3 tidak memiliki simpul berderajat 4. Jadi haruslah $\varphi(O_3)$ = 4.

2) Untuk n = 4

Graf O_4 memiliki empat simpul berderajat 5, empat simpul berderajat 3, dan empat simpul berderajat 2. Berdasarkan ketaksamaan pada Proposisi 6 dan Tabel 1 diperoleh 3 $\leq \varphi(O_n) \leq$ 6. Selanjutnya didefinisikan pewarnaan simpul yaitu:

$c(u_1)$ = $c(v_2)$ = $c(v_3)$ = 1,
$c(u_2)$ = $c(v_4)$ = $c(w_3)$ = 2,
$c(u_3)$ = $c(w_1)$ = $c(w_4)$ = 3, dan
$c(u_4)$ = $c(v_1)$ = $c(w_2)$ = 4.

Akibatnya terdapat simpul perwakilan pada setiap kelas warna yaitu simpul u_1 untuk kelas warna C_1, simpul u_2 dan w_3 untuk kelas warna C_2, simpul u_3, w_1 dan w_4 untuk kelas warna C_3, dan simpul u_4 dan w_2 untuk kelas warna C_4. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4 pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan b-colouring, sehingga diperoleh $\varphi(O_4)$ $\geq$ 4. Selanjutnya misalkan $\varphi(O_4)$ = 5, maka berdasarkan Proposisi 6 O_4 harus memiliki minimal lima simpul berderajat 4. Hal tersebut kontradiksi, karena O_4 tidak memiliki simpul berderajat 4. Jadi haruslah $\varphi(O_4)$ = 4.

3) Untuk n = 5

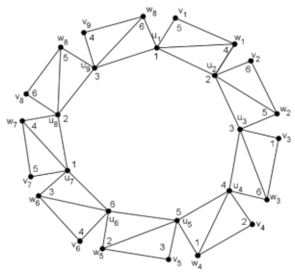
Graf O_5 memiliki lima simpul berderajat 5, lima simpul berderajat 3, dan lima simpul berderajat 2. Berdasarkan ketaksamaan pada Proposisi 6 dan Tabel 1 diperoleh 3 $\leq \varphi(O_n) \leq$ 6. Selanjutnya misalkan pewarnaan simpul yaitu: $c(u_i)$ = i, dengan i = 1, 2, 3, 4, dan 5, serta warnai simpul v_i dan w_i menggunakan warna 1, 2, 3, 4, atau 5, sehingga pewarnaan c merupakan pewarnaan *b-colouring*, sehingga terdapat simpul perwakilan pada setiap kelas warna. Adapun simpul-simpul perwakilannya yaitu simpul u_1 untuk kelas warna C_1, simpul u_2 untuk kelas warna C_2, simpul u_3 untuk kelas warna C_3, simpul u_4 untuk kelas warna C_4, dan simpul simpul u_5 untuk kelas warna C_5. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4 pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan b-colouring, sehingga diperoleh $\varphi(O_5)$ $\geq$ 5. Selanjutnya andaikan $\varphi(O_5)$ = 6, maka berdasarkan Proposisi 6 O_5 harus memiliki minimal enam simpul berderajat 5. Hal tersebut kontradiksi, karena O_5 memiliki maksimal lima simpul berderajat 5. Jadi haruslah $\varphi(O_5)$ = 5.

4) Untuk $n \geq 6$

Graf $O_{n\geq 6}$ memiliki n simpul berderajat 5, n simpul berderajat 3, dan n simpul berderajat 2. Berdasarkan ketaksamaan pada Proposisi 6 dan Tabel 1 diperoleh 3 $\leq \varphi(O_n) \leq$ 6. Selanjutnya didefinisikan pewarnaan simpul yaitu:

$$c(u_i) = \begin{cases} 1, & i = 6k-5 \\ 2, & i = 6k-4 \\ 3, & i = 6k-3 \\ 4, & i = 6k-2 \\ 5, & i = 6k-1 \\ 6, & i = 6k \end{cases}$$

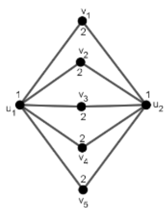
dengan $k \in \mathbb{N}$ sehingga i = 1, 2, …, n, serta warnai simpul v_i dan w_i menggunakan warna 1, 2, 3, 4, 5, atau 6, sehingga pewarnaan c merupakan pewarnaan *b-colouring*, sehingga terdapat simpul perwakilan pada setiap kelas warna. Adapun simpul-simpul perwakilannya yaitu simpul u_{6k-5} untuk kelas warna C_1, simpul u_{6k-4} untuk kelas warna C_2, simpul u_{6k-3} untuk kelas warna C_3, simpul u_{6k-2} untuk kelas warna C_4, simpul u_{6k-1} untuk kelas warna C_5 dan simpul simpul u_{6k} untuk kelas warna C_6. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4 pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan *b-colouring*. Selanjutnya berdasarkan definisi bilangan *b*-kromatik diperoleh $\varphi(O_{n\geq 6}) \geq 6$. Lebih lanjut, andaikan $\varphi(O_{n\geq 6})$ = 7, maka berdasarkan Proposisi 6 $O_{n\geq 6}$ harus memiliki minimal tujuh simpul berderajat 6. Hal tersebut kontradiksi karena $O_{n\geq 6}$ hanya memiliki simpul yang maksimal berderajat 5. Jadi haruslah $\varphi(O_{n\geq 6})$ = 6. ■



Gambar 4 Pewarnaan *b-colouring* pada graf origami O_9

Proposisi 11 *Graf lintang didefinisikan sebagai* $L_m = \overline{K_2} + \overline{K_m}$, *untuk* $m \geq 1$. *Bilangan b-kromatik pada graf lintang* L_m *adalah 2.*

Bukti: Misalkan graf G adalah graf lintang $L_m = \overline{K_2} + \overline{K_m}$, dengan $u_i \in V(\overline{K_2})$, i = 1, 2 sebagai simpul kutub dan $v_i \in V(\overline{K_m})$, i = 1, 2, …, m sebagai simpul lintang. Berdasarkan Tabel 1 diperoleh bilangan kromatik dari graf lintang yaitu $\chi(L_m)$ = 2. Akibatnya berdasarkan Proposisi 6 maka diperoleh $\varphi(L_m) \geq 2$. Selanjutnya andaikan $\varphi(L_m)$ = 3, dengan pewarnaan simpul yaitu $c(u_1)$ = 1, $c(v_i)$ = 2, dan $c(u_2)$ = 3. Pada pewarnaan tersebut terdapat simpul perwakilan yaitu simpul v_i untuk kelas warna C_2, tetapi tidak ada simpul perwakilan untuk kelas warna C_1 dan C_3. Hal tersebut kontradiksi berdasarkan Definisi 2.1 tentang pewarnaan *b-colouring*. Jadi haruslah $\varphi(L_m)$ = 2. ■



Gambar 5 Pewarnaan *b-colouring* pada graf lintang L_5

Proposisi 12 *Graf* G *adalah graf tadpole* $T_{m,n}$, *dengan* $m \geq 3$ *dan* $n \geq 2$. *Bilangan b-kromatik pada graf tadpole* $T_{m,n}$ *adalah* 3.

Bukti: Graf *tadpole* diperoleh dengan menggabungkan graf *cycle* C_m ke lintasan P_n. Misalkan $c_i \in V(C_m)$, i = 1, 2, …, n dan $p_j \in V(P_n)$, j = 1, 2, …, n adalah himpunan semua simpul pada graf *tadpole* $T_{m,n}$ dengan satu simpul berderajat 3 dan 1, sedangkan simpul yg lainnya berderajat 2, sehingga diperoleh $\Delta(T_{m,n})$ = 3. Berdasarkan Tabel 1 diketahui $\chi(T_{m,n})$ = 2 untuk m genap dan $\chi(T_{m,n})$ = 3, untuk m ganjil.

Berdasarkan ketaksamaan $\chi(G) \leq \varphi(G) \leq \Delta(G)$ + 1 pada Proposisi 6 dan Tabel 1 maka diperoleh $2 \leq \varphi(T_{m,n}) \leq 4$ untuk m genap dan $3 \leq \varphi(T_{m,n}) \leq 4$ untuk m ganjil. Dengan demikian terdapat dua kasus bilangan b-kromatik pada $T_{m,n}$.

1) Untuk m ganjil

Berdasarkan ketaksamaan pada Proposisi 6 diperoleh $\varphi(T_{m,n}) \geq 3$. Andaikan $\varphi(T_{m,n})$ = 4, maka $T_{m,n}$ harus memiliki minimal 4 simpul berderajat 3. Hal tersebut kontradiksi karena $T_{m,n}$ hanya memiliki satu simpul berderajat 3. Akibatnya $\varphi(T_{m,n}) \neq 4$. Jadi haruslah $\varphi(T_{m,n})$ = 3.

2) Untuk m genap

Berdasarkan ketaksamaan diperoleh $\varphi(T_{m,n}) \geq 2$. Selanjutnya didefinisikan pewarnaan pada graf $T_{m,n}$ sebagai berikut:

$$c(c_i) = \begin{cases} 1, & i = 3k-2 \\ 2, & i = 3k-1 \\ 3, & i = 3k \end{cases} \quad \text{dan} \quad c(p_j) = \begin{cases} 1, & j = 3k \\ 2, & j = 3k-1 \\ 3, & j = 3k-2 \end{cases}$$

dengan $k \in \mathbb{N}$, sehingga i = 1, 2, … m dan j = 1, 2, … n

Akibatnya diperoleh himpunan kelas warna yaitu:

$C_1 = \{c_1, c_4, \ldots, c_{3k-2}, p_3, p_6, \ldots, p_{3k}\}$,

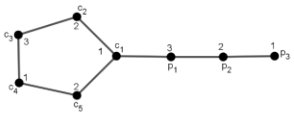
$C_2 = \{c_2, c_5, \ldots, c_{3k-1}, p_2, p_5, \ldots, p_{3k-1}\}$,

$C_3 = \{c_3, c_6, \ldots, c_{3k}, p_1, p_4, \ldots, p_{3k-2}\}$.

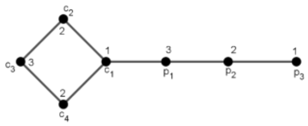
Berdasarkan kelas warna C_1, C_2, dan C_3 maka terdapat simpul perwakilan pada setiap kelas warna yang bertetangga dengan setidaknya satu simpul pada setiap kelas warna lainnya. Oleh karena itu, pewarnaan yang didefinisikan merupakan pewarnaan *b-colouring*. Akibatnya diperoleh $\varphi(T_{m,n}) \geq 3$. Selanjutnya andaikan $\varphi(T_{m,n})$ = 4, maka $T_{m,n}$ harus memiliki minimal empat simpul berderajat 3. Hal tersebut kontradiksi karena $T_{m,n}$ hanya memiliki satu simpul berderajat 3. Akibatnya $\varphi(T_{m,n}) \neq 4$. Jadi haruslah $\varphi(T_{m,n})$ = 3.

Dari kasus 1) dan 2) tersebut dapat disimpulkan bahwa bilangan b-kromatik pada graf *tadpole* $\varphi(T_{m,n})$ = 3, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. ■

Sebagai ilustrasi dari pewarnaan *b-colouring* pada graf *tadpole* $T_{m,n}$, untuk m ganjil dan m genap dengan 3 warna disajikan pada Contoh 6 berikut.



(a)



(b)

Gambar 6 Pewarnaan *b-colouring* pada (a) graf *tadpole* $T_{5,3}$ dan (b) graf *tadpole* $T_{4,3}$

Pada Gambar 6 graf *tadpole* $T_{m,n}$, untuk m ganjil yaitu $T_{5,3}$ dan m genap yaitu $T_{4,3}$ diwarnai dengan pewarnaan *b-colouring* menggunakan 3 warna.

KESIMPULAN

Bilangan b-kromatik pada graf origami, graf lintang, dan graf *tadpole* diperoleh dari pewarnaan *b-colouring*. Adapun proses untuk mencari bilangan b-kromatik dimulai dengan menggambar dan mewarnai simpul-simpul pada ketiga graf tersebut berdasarkan konsep *b-colouring*. Kemudian menentukan banyaknya warna maksimum yang digunakan untuk mewarnai simpul-simpul sehingga diperoleh pola bilangan pada ketiga graf tersebut. Berdasarkan proses-proses tersebut, maka dapat disimpulkan bilangan b-kromatik pada graf origami, graf lintang, dan graf *tadpole*, yaitu:

a. Bilangan b-kromatik pada graf origami O_n

$$\varphi(O_n) = \begin{cases} 4, & \text{jika } n = 3 \text{ dan } n = 4 \\ 5, & \text{jika } n = 5 \\ 6, & \text{jika } n \geq 6 \end{cases}$$

b. Bilangan b-kromatik pada graf lintang L_m

$$\varphi(L_m) = 2, \text{ dengan } m \geq 1$$

c. Bilangan b-kromatik pada graf *tadpole* $T_{m,n}$

$$\varphi(T_{m,n}) = 3, \text{ dengan } m \geq 3 \text{ dan } n \geq 2.$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Irving WR dan Manlove FD. The B-chromatic Number of A Graph. *Discrete Applied Mathematics*. 1999; 91: 127-141.

[2] Sahili AE dan Kouider M. About b-colouring of Regular Graphs. *Article in Utilitas Mathematica-November 2009*. 2009.

[3] Kok J dan Sudev N. *The b-chromatic Number of Certain Graphs and Digraphs*. math. GM. 2015; 1511.00680vl.

[4] Elghazel H, Kheddouchi H, Deslandres V dan Dussauchoy A. A Graph b-colouring Framework for Data Clustering. *Jurnal Math Algor*. 2008; 7: 389-423.

[5] Thilagavany PK dan Santha A. The Achromatic and B-chromatic Number of Sun Graph, Barbel Graph and Some Named Graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2017; 116: 147-155.

[6] Mary LJE dan Rayen ALMJ. On The Star coloring of Graph and Some Related Graphs. *International Journal of Applications of Fuzzy Sets and Artifical Intelligence*. 2016; 5: 23-25.

[7] Damayanti TR. Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan, *Jurnal Cauchy*. 2011; 2: 2086-0382

[8] Bibi KA dan Devi M. Fuzzy Bi-Magic Labelling on Cycle Graph and Star Graph. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2017; 13: 1975-1985.

[9] Vaidya KS dan Isaac VR. The B-chromatic Number of Some Path Related Graphs. *International Journal of Mathematics and Scientific Computing*. 2014; 4: 2231-5330.

[10] Yesi I, Sudarsana W dan Musdalifah S. Pelabelan Total Tringular pada Beberapa Graf Pohon. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*. 2016; 13: 17-24.

[11] Nabila S dan Salman ANM. The Rainbow Connection Number of Origami Graphs and Pizza Graphs. *International Conference on Graph Theory and Information Security*. 2015; 74: 162-167.

[12] Kusmayadi TA dan Fatmawatie F. *The eccentric Digraph of a Lintang Graph*. Universitas Sebelas Maret. 2013; 57126.

[13] Bakhash KAP dan Al-Harere NM. Tadpole Domination in Graphs. *Baghdad Science Journal*. 2018; 15: 4.

PRANASARI KORNELIA : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak,
pranasariaza@gmail.com

EVI NOVIANI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak,
evi_noviani@math.untan.ac.id

FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak,
fransiskusfran@math.untan.ac.id