RUANG FUNGSI L^2 SEBAGAI RUANG HILBERT

Ade Rismayanti, Mariatul Kiftiah, Helmi

INTISARI

Ruang vektor yang dilengkapi dengan aksioma inner product disebut ruang inner product (pre-Hilbert). Ruang pre-Hilbert dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. Ruang pre-Hilbert yang lengkap adalah ruang Hilbert. Diberikan ruang fungsi L^2 adalah himpunan semua fungsi bernilai kompleks yang mempunyai integral mutlak kuadrat berhingga yaitu

$$L^2 = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right. \right\}$$

merupakan suatu ruang vektor. Ruang fungsi L^2 yang dilengkapi inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$ membentuk ruang pre-Hilbert. Dalam penelitian ini ditunjukkan

bahwa ruang fungsi L^2 tersebut merupakan ruang Hilbert. Dari sifat kelengkapan dapat ditunjukkan setiap barisan Cauchy $\{f_n\}$ di dalam ruang fungsi L^2 konvergen maka ruang fungsi L^2 merupakan ruang Hilbert.

Kata kunci: Pre-Hilbert, Hilbert, ruang fungsi L^2 .

PENDAHULUAN

Misalkan H suatu himpunan tak kosong, disebut ruang vektor jika dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar serta memenuhi sepuluh aksioma tertentu [1]. Ruang vektor dikembangkan menjadi bahasan mengenai konsep ruang bernorma, yaitu ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi yang disebut norma. Norma merupakan suatu fungsi yang memetakan dari ruang vektor H ke himpunan semua bilangan real dan memenuhi aksioma norma. Beberapa sifat dalam ruang bernorma yang digunakan dalam konsep analisis fungsional ialah kekonvergenan barisan, kelengkapan dan pemetaan pada ruang bernorma.

Selain norma, vektor juga didefinisikan suatu inner product, yaitu fungsi yang memetakan $H \times H$ ke himpunan semua bilangan real atau kompleks dan memenuhi semua aksioma inner product. Ruang vektor real atau kompleks yang dilengkapi dengan aksioma inner product disebut ruang inner product atau ruang pre-Hilbert. Ruang pre-Hilbert diperkenalkan oleh David Hilbert pada tahun 1912. Setiap ruang pre-Hilbert H merupakan ruang bernorma dengan $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ untuk setiap $x \in H$. Karena ruang pre-Hilbert merupakan ruang bernorma, maka sifat-sifat yang berlaku pada ruang bernorma juga berlaku pada ruang pre-Hilbert. Kemudian suatu sifat yang menjelaskan bahwa tidak semua barisan Cauchy di dalam ruang bernorma merupakan barisan yang konvergen menjadi dasar pendefinisian ruang Hilbert. Atau dengan kata lain ruang pre-Hilbert yang lengkap disebut ruang Hilbert.

Dalam kaitan dengan ruang Hilbert, ruang fungsi $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ adalah ruang vektor dimensi tak hingga yang terdiri dari semua nilai kompleks, dengan fungsi f didefinisikan untuk semua $t \in \mathbb{R}$. Ruang fungsi L^2 merupakan himpunan semua fungsi bernilai kompleks yang mempunyai integral

$$\text{mutlak kuadrat berhingga yaitu } L^2 = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right. \right\}.$$

Berdasarkan uraian tersebut membawa pemikiran untuk menganalisis ruang fungsi L^2 sebagai ruang Hilbert.

Pembahasan mengenai ruang fungsi L^2 pada penelitian ini, lebih ditekankan pada pembuktian sebagai ruang Hilbert.

RUANG HILBERT

Sebelum diberikan definisi mengenai ruang Hilbert, terlebih dahulu diberikan definisi dan sifat-sifat mengenai ruang bernorma, *inner product* dan ruang pre-Hilbert.

Definisi 1 [2] Diberikan ruang vektor H . Suatu fungsi $\|\cdot\|: H \rightarrow \mathbb{R}$, disebut norma jika untuk setiap $x, y \in H$ dan $\alpha \in \mathbb{C}$ memenuhi

- (i) $\|x\| \geq 0$
- (ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ruang vektor H yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (normed space).

Berikut diberikan definisi dan sifat barisan konvergen dan barisan Cauchy dalam suatu ruang bernorma

Definisi 2 [3] Suatu barisan $\{f_n\}$ dalam ruang bernorma H dikatakan konvergen jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ maka jika terdapat suatu vektor $f \in H$ berlaku $\|f_n - f\| < \varepsilon$ atau dengan kata lain $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$.

Definisi 3 [3] Suatu barisan $\{f_n\}$ dalam ruang bernorma H dinamakan suatu barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $m, n \geq n_0$ maka berlaku $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ atau dengan kata lain $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\| = 0$.

Kekonvergenan suatu barisan Cauchy di dalam ruang bernorma dapat digunakan dalam menentukan suatu ruang bernorma lengkap atau tidak. Berikut diberikan definisi dan teorema mengenai sifat kelengkapan di dalam ruang bernorma.

Definisi 4 [4] Ruang bernorma H dikatakan lengkap (complete) jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen.

Teorema 5 [3] Misalkan $\{f_n\}$ suatu barisan Cauchy dalam ruang bernorma H yang memiliki sub barisan $\{f_{n_k}\}$ yang konvergen dalam H yakni, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\| = 0$. Maka, setiap barisan Cauchy $\{f_n\}$ konvergen ke f dalam H . Dengan kata lain $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$.

Selanjutnya diberikan definisi ruang pre-Hilbert dan sifat-sifatnya yang akan digunakan sebagai dasar pembahasan selanjutnya.

Definisi 6 [3] Diketahui H ruang vektor atas bilangan kompleks. Fungsi $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ disebut *inner product* pada H jika untuk setiap $x, y, z \in H$ dan $\alpha \in \mathbb{C}$ memenuhi sifat-sifat:

- (i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
 - (ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
 - (iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
-

(iv) $\langle x, x \rangle > 0$ jika dan hanya jika $x \neq 0$.

Ruang vektor H yang dilengkapi dengan suatu inner product disebut ruang pre-Hilbert (pre-Hilbert space) atau ruang inner product (inner product space).

Teorema 7 [4] Diketahui H suatu ruang pre-Hilbert. Jika $x, y, z \in H$ dan $\alpha \in \mathbb{C}$, maka

$$(i) \quad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$$

$$(ii) \quad \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

$$(iii) \quad \langle x - y, z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle y, z \rangle, \quad \langle x, y - z \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, z \rangle$$

$$(iv) \quad \langle x, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$$

$$(v) \quad \langle x, x \rangle = 0 \text{ jika dan hanya jika } x = 0$$

$$(vi) \text{ Jika } x, y, z \in H \text{ dan } \langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle \text{ untuk setiap } z \in H, \text{ maka } x = y.$$

Setelah definisi ruang pre-Hilbert diberikan sifat-sifat ruang pre-Hilbert sebagai ruang bernorma

Teorema 8 [3] Setiap ruang pre-Hilbert H merupakan ruang bernorma terhadap norma $\|\cdot\|$:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ untuk setiap } x \in H.$$

Berikut ini diberikan contoh tentang ruang pre-Hilbert yang merupakan ruang bernorma.

Contoh 9

Ditunjukkan bahwa ruang pre-Hilbert L^2 terhadap norma

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

untuk setiap $f = f(t) \in L^2$ merupakan ruang bernorma.

Penyelesaian:

Ditunjukkan bahwa ruang pre-Hilbert L^2 merupakan ruang bernorma.

Sehingga $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \langle f, f \rangle^{1/2}$ memenuhi sifat-sifat dari norma.

i. Ditunjukkan $(L^2, \|\cdot\|)$ memenuhi sifat N1 dan N2.

Diambil sebarang $f(t) \in L^2$, maka

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

karena $|f(t)|^2 \geq 0$, maka dapat disimpulkan bahwa $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \geq 0$. Kemudian, dimisalkan

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_{c_1=-\infty}^{c_2} |f(t)|^2 dt + \int_{c_2}^{c_3} |f(t)|^2 dt + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n=-\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = 0$$

$$\int_{c_1=-\infty}^{c_2} |f(t)|^2 dt + \int_{c_2}^{c_3} |f(t)|^2 dt + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n=-\infty} |f(t)|^2 dt = 0^2$$

$$\int_{c_1=-\infty}^{c_2} |f(t)|^2 dt + \int_{c_2}^{c_3} |f(t)|^2 dt + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n=-\infty} |f(t)|^2 dt = 0.$$

Karena $\left(\int_{c_1=-\infty}^{c_n=\infty} |f(t)|^2 dt \right) = 0$ sehingga solusi untuk $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right) = 0$ adalah $|f(t)| = 0$, dengan

demikian $f(t) = 0$. Sebaliknya, dimisalkan $f(t) = 0$ maka $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 0$.

Dengan demikian sifat $N1$ dan $N2$ terpenuhi.

ii. Ditunjukkan $(L^2, \|\cdot\|)$ memenuhi sifat $N3$.

Diambil sebarang $f = f(t) \in L^2$ dan $\alpha \in \mathbb{C}$, maka

$$\begin{aligned} \|\alpha f\| &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha|^2 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= (|\alpha|^2)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= |\alpha| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= |\alpha| \cdot \|f\|. \end{aligned}$$

Dengan demikian sifat $N3$ terpenuhi.

iii. Ditunjukkan $(L^2, \|\cdot\|)$ memenuhi sifat $N4$.

Diambil sebarang $f, g \in L^2$, maka

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) + g(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (|f(t)|^2 + \overline{f(t)}g(t) + f(t)\overline{g(t)} + |g(t)|^2) dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (|f(t)|^2 + 2|f(t)g(t)| + |g(t)|^2) dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt + 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \\ &= \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \right)^2 \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2. \end{aligned}$$

Dengan demikian sifat $N4$ terpenuhi.

Karena $(L^2, \|\cdot\|)$ memenuhi sifat $N1$, $N2$, $N3$ dan $N4$ maka ruang pre-Hilbert L^2 merupakan ruang bernorma. ■

Sifat-sifat ruang pre Hilbert dapat dipelajari pada teorema 10 dan teorema 11.

Teorema 10 [3] (Ketaksamaan Cauchy-Schwarz) Misalkan H ruang pre-Hilbert, maka berlaku

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2} \text{ untuk setiap } x, y \in H$$

atau dapat ditulis dalam bentuk norma:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \text{ untuk setiap } x, y \in H.$$

Teorema 11 [3] (Ketaksamaan Segitiga) Untuk setiap $x, y \in H$ di ruang pre-Hilbert berlaku

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Berikut ini diberikan definisi mengenai ruang Hilbert

Definisi 12 [3] Suatu ruang vektor H atas lapangan F adalah ruang Hilbert jika dan hanya jika berlaku sifat berikut:

- (i) Terdapat suatu inner product dalam H , dan
- (ii) Setiap barisan Cauchy dengan norm $\|f\|$ adalah konvergen.

RUANG FUNGSI L^2 SEBAGAI RUANG HILBERT

Ruang fungsi L^2 adalah himpunan semua fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ yang terintegral kuadrat mutlak berhingga, yaitu

$$L^2 = \left\{ f \left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right. \right\}.$$

Dengan fungsi f didefinisikan untuk setiap $t \in \mathbb{R}$, maka ruang fungsi L^2 yang dilengkapi dengan fungsi inner product

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \text{ untuk setiap } f, g \in L^2$$

dengan menggunakan Definisi 12 dapat ditunjukkan ruang fungsi L^2 merupakan ruang Hilbert.

Langkah 1

Berikut ditunjukkan bahwa untuk setiap $f, g \in L^2$ maka fungsi $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$ ada.

Diambil sebarang $f, g \in L^2$, dengan menggunakan Teorema Ketaksamaan Cauchy-Schwarz diperoleh

$$|\langle f, g \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad (1)$$

karena dari Contoh 9 setiap ruang inner product merupakan ruang bernorma maka

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Kasus I:

Misalkan $\|f\| = 0$ atau $\|g\| = 0$, maka $f(t) = 0$ atau $g(t) = 0$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$ oleh sebab itu

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = 0$$

dengan kata lain Ketaksamaan (1) adalah benar.

Kasus II:

Misalkan bahwa $\|f\| \neq 0$ dan $\|g\| \neq 0$, diasumsikan $\|f\| = \|g\| = 1$.

Diperhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (|f(t)| - |g(t)|)^2 = |f(t)|^2 - 2|f(t)||g(t)| + |g(t)|^2 \\ &\Leftrightarrow 2|f(t)||g(t)| = |f(t)|^2 + |g(t)|^2 \\ &\Leftrightarrow |f(t)\overline{g(t)}| \leq \frac{1}{2}(|f(t)|^2 + |g(t)|^2) \text{ untuk } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2)$$

Jika fungsi f dan g terintegral pada $\mathbb{R}$, maka $f(t)\overline{g(t)}$ adalah hasil kali. Dari Ketaksamaan (2)

terdapat $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$ lebih lanjut $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\overline{g(t)}| dt$ ada, karenanya terdapat $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt$.

Selanjutnya, dengan menggunakan ketaksamaan (2) diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\overline{g(t)}| dt \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \right) \end{aligned}$$

Karena $\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1$ dan $\|g\| = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = 1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt \right| &= \frac{1}{2}(1+1) = \frac{1}{2}(2) \\ &= 1 = \|f\| \|g\| \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap $f, g \in L^2$ berlaku

$$|\langle f, g \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Langkah 2

Dibuktikan bahwa setiap barisan Cauchy dalam ruang fungsi L^2 merupakan barisan yang konvergen.

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{f_n\} \subset L^2$, ditulis $\{f_n\} = (f_{n_1}, f_{n_2}, f_{n_3}, \dots) = f_{n_k}$ dengan $k = 1, 2, \dots$.

Jadi, jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq n_0$ dengan $m, n \in \mathbb{N}$, berlaku

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon$$

Oleh karena itu, ada n_1 sehingga untuk setiap $m > n_1$

$$\|f_{n_1} - f_m\| < \frac{1}{2}.$$

Demikian juga, ada $n_2 > n_1$ sehingga untuk setiap $m > n_2$ $\|f_{n_2} - f_m\| < \frac{1}{2^2}$.

Dan seterusnya, sehingga untuk setiap $k = 1, 2, \dots$ diperoleh

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Selanjutnya barisan f_{n_k} dapat ditulis

$$\begin{aligned} f_{n_k} &= f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + (f_{n_3} - f_{n_2}) + \cdots + (f_{n_k} - f_{n_{k-1}}). \\ &= f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}). \end{aligned}$$

Jika himpunan

$$\begin{aligned} S_m &= |f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + |f_{n_3} - f_{n_2}| + \cdots + |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|, \\ &= |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^m |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|, \end{aligned}$$

jelas diperoleh bahwa $|f_{n_k}| \leq S_m$.

Barisan $S_m(t)$ adalah barisan yang monoton naik dan oleh karena itu konvergen ke fungsi $S(t)$, maka $S(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_m(t)^2$ ada untuk setiap t , dengan $0 \leq S(t) \leq \infty$. Sehingga barisan $f_{n_k}(t)$ konvergen ke beberapa fungsi $f(t)$ karena jumlah parsial konvergen mutlak. Selanjutnya karena ruang fungsi L^2 merupakan ruang pre-Hilbert, maka ketaksamaan segitiga berlaku,

$$\begin{aligned} \|S_m\| &\leq \|f_{n_1}\| + \|f_{n_2} - f_{n_1}\| + \|f_{n_3} - f_{n_2}\| + \cdots + \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\| \\ &= \|f_{n_1}\| + \sum_{k=1}^m \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \end{aligned}$$

yang dibatasi

$$\|f_{n_1}\| + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} < \|f_{n_1}\| + 1.$$

Oleh sebab itu

$$\|S_m\| \leq \sum_{k=1}^m \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots \leq 1, \quad \text{untuk } m \geq 1$$

sehingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_m(t)^2 dt \leq 1, \quad \text{untuk setiap } m \geq 1.$$

Oleh karena itu dari Teorema Konvergen Monoton diperoleh bahwa S adalah terjumlah kuadrat dan

$$|f_{n_k}(t) - f(t)| \leq |f_{n_k}(t)| + |f(t)| \leq 2S(t).$$

Karena $f_{n_k}(t)$ konvergen ke $f(t)$ untuk setiap t diperoleh bahwa dari Teorema kekonvergenan, yaitu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_{n_k}(t) - f(t)|^2 dt = 0.$$

Dengan kata lain untuk sub barisan n_k didapat bahwa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\| = 0. \quad (3)$$

Hal ini menunjukkan bahwa untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, $\{f_{n_k}\}$ merupakan suatu barisan Cauchy. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy $\{f_{n_k}\}$ konvergen ke $f \in L^2$.

Jika $\{f_n\}$ adalah suatu barisan Cauchy, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat m_0 sedemikian sehingga

$$\|f_n - f_m\|^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |f_n - f_m|^2 dt \leq \varepsilon^2, \text{ untuk setiap } n, m \geq m_0.$$

Misalkan $m \rightarrow \infty$, dengan mengikuti Lemma Fatou diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|^2 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt \leq \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (4)$$

untuk setiap $n \geq m_0$. Jadi, $\{f_n\}$ konvergen ke f dalam L^2 dengan $n \rightarrow \infty$.

Berdasarkan (3) dan (4) dapat disimpulkan bahwa $f \in L^2$. Jadi, terbukti bahwa barisan Cauchy f_n konvergen ke $f \in L^2$. ■

PENUTUP

Ruang fungsi L^2 adalah himpunan semua fungsi yang terintegral mutlak kuadrat berhingga, yaitu

$$L^2 = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right. \right\}$$

merupakan suatu ruang vektor. Kemudian didefinisikan fungsi

$$\text{inner product } \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \text{ dengan } f, g \in L^2 \text{ membentuk ruang pre-Hilbert. Selanjutnya dari}$$

sifat lengkap yaitu setiap barisan Cauchy yang konvergen telah dibuktikan bahwa ruang pre-Hilbert L^2 bersifat lengkap yaitu setiap barisan Cauchy $\{f_n\}$ di dalam ruang fungsi L^2 konvergen dalam ruang fungsi L^2 sedemikian sehingga dapat disimpulkan bahwa ruang fungsi L^2 merupakan ruang Hilbert.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anton H, Rorres C. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlanga; 2000.
- [2] Kreyszig E. *Introductory Function Analysis with Application*. New York: Willey Classic Library; 1978.
- [3] Wiedmann J. *Linear Operators in Hilbert Space*. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [4] Darmawijaya S. *Seri Analisis Matematika Pengantar Analisis Abstrak*. Yogyakarta: UGM; 2007

ADE RISMAYANTI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak,
aderismayanti04@gmail.com

MARIATUL KIFTIAH : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak,
kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

HELMII : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak,
Helmi132205@yahoo.co.id