PENDEKATAN BAYESIAN GELF UNTUK ESTIMASI PARAMETER MODEL SURVIVAL RAYLEIGH DENGAN PRIOR UNIFORM

Petty Jelda, Setyo Wira Rizki, Nurfitri Imro'ah

INTISARI

Data survival adalah data yang menunjukkan waktu suatu individu atau objek yang dapat bertahan hidup hingga terjadinya suatu kegagalan atau kejadian tertentu. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan model survival dan model hazard estimasi parameter berdistribusi Rayleigh dengan metode Bayesian General Entropy Loss Function (GELF) menggunakan prior Uniform. Estimasi parameter fungsi survival dan fungsi hazard Bayesian GELF didapat dengan mencari nilai estimasi parameter Bayesian GELF. Selanjutnya diterapkan pada data 175 pasien penderita Primary Billiary Cirrhosis (PBC) yang diperoleh dari program R versi 3.3.0 untuk mengetahui peluang individu dapat bertahan hidup. Nilai estimasi parameter Bayesian GELF dari data yang dihitung menggunakan program R adalah 896,8008. Berdasarkan hasil estimasi parameter model survival distribusi Rayleigh metode Bayesian GELF dapat diketahui peluang seorang penderita penyakit PBC untuk bertahan hidup semakin lama semakin kecil (mendekati nol), dengan resiko kematian yang semakin besar.

Kata Kunci : Distribusi Rayleigh, Bayesian GELF, Prior Uniform.

PENDAHULUAN

Analisis *survival* dikembangkan pertama kali oleh Edmund Halley (1656-1742) di Inggris. Analisis ini menjadi salah satu alat penting dalam statistik dan ilmu aktuarial serta ilmu lainnya yang berhubungan dengan waktu. Sebagai contoh, ahli asuransi menggunakannya untuk menghitung uang yang harus dibayar peserta asuransi [1]. Tujuan dari analisis *survival* adalah untuk memodelkan distribusi yang mendasari objek waktu kegagalan dan untuk menilai ketergantungan dari waktu kegagalan pada objek yang diteliti.

Beberapa distribusi yang dapat digunakan untuk menggambarkan waktu tahan hidup antara lain distribusi Eksponensial, distribusi *Weibull*, distribusi *Gamma*, dan distribusi *Rayleigh*. Berdasarkan beberapa distribusi tersebut dipilih fungsi tahan hidup berdistribusi *Rayleigh* pada penelitian ini. Distribusi *Rayleigh* adalah kasus khusus dari distribusi parameter *Weibull* dua parameter [2]. Metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter dalam analisis *survival* salah satunya yaitu metode Bayesian. Metode Bayesian memandang parameter sebagai variabel yang menggambarkan pengetahuan awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut prior [3]. Dalam penelitian ini prior yang digunakan adalah prior *Uniform*. Prior *Uniform* adalah prior yang paling sederhana dari semua distribusi probabilitas diskrit, dengan variabel acak yang mengasumsikan setiap nilainya dengan probabilitas sama [4]. Setelah pengamatan dilakukan, informasi dalam distribusi prior dikombinasikan dengan fungsi *likelihood* dan hasilnya dinyatakan dalam bentuk distribusi yang disebut distribusi posterior. Distribusi posterior selanjutnya menjadi dasar untuk inferensi di dalam metode Bayesian. Pendekatan dalam metode Bayesian yang digunakan dalam penelitian ini untuk mengestimasi parameter adalah GELF.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan estimasi parameter model *survival* dan model *hazard* berdistribusi *Rayleigh* dengan metode Bayesian GELF menggunakan prior *Uniform*. Kemudian menentukan nilai estimasi parameter Bayesian GELF pada data *survival*. Data yang digunakan adalah data *survival* 175 pasien penderita PBC yang diperoleh dari program R versi 3.3.0. Sirosis bilier primer atau *primary biliary cirrhosis* (PBC) adalah kondisi ketika saluran empedu di hati meradang dan tersumbat. Empedu adalah cairan yang diproduksi oleh hati.

Langkah yang dilakukan pada metode Bayesian adalah menentukan fungsi *likelihood* dari fungsi kepadatan peluang dan fungsi *survival*. Setelah memperoleh fungsi *likelihood* dan distribusi prior, langkah berikutnya adalah merumuskannya ke dalam distribusi posterior. Setelah mendapatkan nilai distribusi posterior, dilakukan pendekatan Bayesian GELF untuk mencari nilai estimasi parameter Bayesian GELF, estimasi parameter fungsi *survival* Bayesian GELF dan estimasi parameter fungsi *hazard* Bayesian GELF. Kemudian diterapkan pada data, untuk menghitung nilai estimasi parameter model *survival* dan model *hazard* dari data tersebut.

DISTRIBUSI WAKTU SURVIVAL

Untuk estimasi waktu *survival* dari suatu individu dapat diperoleh dengan mengestimasi distribusi waktu *survival*. Distribusi waktu *survival* dapat dinyatakan dengan tiga fungsi yaitu fungsi kepadatan peluang, fungsi *survival*, dan fungsi *hazard*. Waktu *survival* (T) merupakan variabel random non-negatif yang mewakili waktu *survival* dari individu-individu dalam populasi yang merupakan variabel random kontinu dalam interval $[0, \infty)$ atau waktu *survival* pada waktu t dengan $t > 0$ [5]. Fungsi kepadatan peluang $f(t)$ didefinisikan sebagai turunan dari $F(t)$ sehingga:

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(t)dt \quad (1)$$

Fungsi *survival* $S(t)$ didefinisikan sebagai peluang suatu individu dapat bertahan hidup dengan waktu *survival* sampai dengan waktu t dengan $t > 0$ yaitu:

$$S(t) = 1 - F(t) \quad (2)$$

Fungsi *hazard* didefinisikan sebagai kelajuan suatu individu mati dalam interval waktu dari t sampai $t + \Delta t$, jika diketahui individu tersebut masih dapat bertahan hidup sampai dengan waktu t . Fungsi *hazard* dinyatakan sebagai berikut:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}, \quad S(t) > 0 \quad (3)$$

DISTRIBUSI RAYLEIGH

Pada distribusi *Rayleigh* t adalah waktu *survival* dari variabel random kontinu T yang mengikuti distribusi *Rayleigh* dengan parameter θ , fungsi kepadatan peluang distribusi *Rayleigh* adalah:

$$f(t) = \frac{t}{\theta^2} e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}, \quad \theta > 0 \quad (4)$$

Berdasarkan Persamaan (1) diperoleh fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi *Rayleigh* yaitu:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(t)dt \\ &= \int_0^t \frac{t}{\theta^2} e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}} dt \\ &= 1 - e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}} \end{aligned} \quad (5)$$

Sehingga fungsi *survival* dari distribusi *Rayleigh* adalah:

$$\begin{aligned} S(t) &= 1 - F(t) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}} \right) \\ &= e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}} \end{aligned} \quad (6)$$

Berdasarkan Persamaan (4) dan (6) diperoleh fungsi *hazard* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)}{S(t)} \\ &= \frac{t}{\theta^2}, \quad \theta > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

FUNGSI GAMMA

Salah satu manfaat penerapan penting dari fungsi gamma adalah untuk memudahkan menghitung integral tak wajar yang konvergen, yang tidak dapat secara langsung dihitung dari definisi, khususnya bilamana integral tak wajar tersebut melibatkan fungsi eksponensial negatif [6]. Fungsi gamma yang dinyatakan dengan $\Gamma(\alpha)$ sebagai berikut:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \text{ yang konvergen untuk } \alpha > 0 \quad (8)$$

METODE BAYESIAN

Metode Bayesian memandang parameter θ sebagai variabel random yang memiliki distribusi yang disebut distribusi prior. Dari distribusi prior digabungkan dengan fungsi *likelihood* maka dapat ditentukan distribusi posterior dan diperoleh estimasi parameter Bayesian. Jika $t_1, t_2, \dots, t_n$ ditetapkan, maka fungsi *likelihood* dari parameter θ dinotasikan dengan $L(t_i; \theta)$. Jika $T_1, T_2, \dots, T_n$ menyatakan sampel random dari $f(t_i; \theta)$ maka [7]:

$$\begin{aligned} L(t_i; \theta) &= f(t_1; \theta) f(t_2; \theta) \dots f(t_n; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta) \end{aligned} \quad (9)$$

Jika nilai t adalah waktu hidup individu ke i dengan $i = 1, 2, \dots, n$ sehingga fungsi *likelihood* dari distribusi *Rayleigh* adalah:

$$L(t_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{t_i}{\theta^2} \right] \left[e^{-\frac{t_i^2}{2\theta^2}} \right] \quad (10)$$

Dalam metode Bayesian, ketika suatu populasi mengikuti distribusi tertentu dengan suatu parameter didalamnya (dalam hal ini θ), maka parameter θ mengikuti suatu distribusi peluang yang disebut distribusi prior. Pada kasus ini distribusi prior yang digunakan adalah distribusi prior *Uniform* yang dinyatakan sebagai berikut:

$$f(\theta) = \frac{1}{b-a} \text{ untuk } a < \theta < b \text{ dan } f(\theta) = 0 \text{ untuk yang lain} \quad (11)$$

Dengan $a = 0$, maka b adalah panjang interval. Serta nilai terbesar t untuk $t > 0$ digunakan sebagai model *survival*. Setelah informasi sampel diambil dan prior telah ditentukan maka distribusi posteriornya dicari dengan menggabungkan priornya dengan informasi sampel yang diperoleh dari fungsi *likelihood* [8]. Distribusi posterior dinyatakan sebagai berikut:

$$f(\theta | t_i) = \frac{f(\theta)L(t_i; \theta)}{\int_0^{\infty} f(\theta)L(t_i; \theta)d\theta}, \quad \theta > 0, t_i > 0 \quad (12)$$

Dengan $f(\theta)$ merupakan distribusi prior dan $L(t_i; \theta)$ merupakan fungsi *likelihood*. Berdasarkan Persamaan (9) dan (10) distribusi untuk posterior model *survival* berdistribusi *Rayleigh* dengan prior *Uniform* adalah:

$$f(\theta | t_i) = \frac{\left(\frac{1}{\theta^{2n}}\right) \left(e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{2\theta^2}}\right)}{-\left(\sum_{i=1}^n t_i^2\right)^{\frac{1}{2}-n} (2)^{n-\frac{3}{2}} \Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)} \quad (13)$$

ESTIMASI PARAMETER METODE BAYESIAN GELF

Estimasi yang digunakan dalam kasus ini menggunakan *General Entropy Loss Function* atau biasa dikenal dengan GELF yang didefinisikan sebagai berikut [7]:

$$L\left(\theta, \hat{\theta}\right) = \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^{\alpha_1} - \alpha_1 \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1, \quad \theta > 0 \quad (14)$$

Untuk $\alpha_1 \neq 0, 0 < \alpha_1 < \infty$ dengan α_1 menunjukkan penyimpangan asimetri dan $\hat{\theta}$ merupakan estimator Bayesian untuk θ dengan pendekatan GELF. Estimasi Bayesian GELF dari $\hat{\theta}$ diperoleh dengan meminimumkan ekspektasi GELF yang diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{d\left[E\left(L\left(\theta, \hat{\theta}\right)\right)\right]}{d\hat{\theta}} = 0$$

$$E\left[\frac{d}{d\hat{\theta}}\left[\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^{\alpha_1} - \alpha_1 \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1\right]\right] = 0$$

$$\begin{aligned}
 E\left[\left(\alpha_1 \theta^{-\alpha_1} \theta^{\alpha_1-1}\right) - \alpha_1 \left(\frac{1}{\theta}\right)\right] &= 0 \\
 \alpha_1 \theta^{\alpha_1-1} E[\theta^{\alpha_1}] &= \frac{\alpha_1}{\theta} \\
 \hat{\theta} &= \left[E(\theta^{-\alpha_1})\right]^{-\frac{1}{\alpha_1}}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Berdasarkan Persamaan (15) maka estimasi parameter dengan metode Bayesian GELF berdistribusi *Rayleigh* menggunakan prior *Uniform* adalah:

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_{BG} &= \left[\frac{\Gamma\left(n + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(\sum_{i=1}^n t_i^2\right)^{-\frac{\alpha_1}{2}} \left(2^{\frac{\alpha_1}{2}}\right)}{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)} \right]^{-\frac{1}{\alpha_1}} \\
 &= \left[\frac{\Gamma\left(n + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)} \right]^{-\frac{1}{\alpha_1}} \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} (2)^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Berdasarkan Persamaan (16) maka estimasi fungsi *survival* dan fungsi *hazard* dengan metode Bayesian GELF berdistribusi *Rayleigh* menggunakan prior *Uniform* adalah:

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_{BG}(t_i) &= e^{-\frac{t_i^2}{2 \left[\frac{\Gamma\left(n + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)} \right]^{-\frac{1}{\alpha_1}} \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} (2)^{-\frac{1}{2}}}} \\
 &= e^{-\frac{t_i^2}{2 \left[\frac{\Gamma\left(n + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)} \right]^{-\frac{2}{\alpha_1}} \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)}} \\
 \hat{h}_{BG}(t_i) &= \frac{t_i}{\left[\frac{\Gamma\left(n + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)} \right]^{-\frac{1}{\alpha_1}} \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} (2)^{-\frac{1}{2}}}
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\hat{h}_{BG}(t_i) = \frac{2t_i}{\left[\frac{\Gamma\left(n + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)} \right]^{\frac{-2}{\alpha_1}} \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)} \quad (18)$$

STUDI KASUS

Data yang digunakan adalah menggunakan data *survival* 175 pasien penderita PBC. Hipotesis untuk distribusi data pada penelitian ini:

H_0 : Data mengikuti distribusi *Rayleigh*

H_1 : Data tidak mengikuti distribusi *Rayleigh*

Nilai $\alpha = 5\% = 0,05$ digunakan dalam menentukan keputusan akhir untuk menerima atau menolak H_0 . Nilai *p-value* pada uji distribusi *Rayleigh* ialah 0,09991, artinya *p-value* > 0,05 maka H_0 diterima dan data berdistribusi *Rayleigh*. Berdasarkan Persamaan (12) dengan menggunakan program R di dapat nilai $\hat{\theta}_{BG} = 896,8008$. Sehingga jika diambil sembarang nilai t_i pada data penderita PBC dengan $t_1 = 41$, $t_{45} = 625$, $t_{88} = 999$, $t_{132} = 1504$, $t_{175} = 2400$ maka dapat diketahui nilai *survival* dan nilai *hazard* dari waktu tersebut yang dapat dilihat pada Tabel 1 berikut:

Tabel 1 Hasil Estimasi Parameter Fungsi *Survival* dan Fungsi *Hazard* Distribusi *Rayleigh* dengan Metode Bayesian GELF

No	Waktu	<i>Survival BG</i> $\left(\hat{S}_{BG} \right)$	<i>Hazard BG</i> $\left(\hat{h}_{BG} \right)$
1	41	0,99895548	$5,097906 \times 10^{-5}$
2	625	0,78438920	$7,771199 \times 10^{-4}$
3	999	0,53770074	$1,242148 \times 10^{-3}$
4	1.504	0,24505170	$1,870061 \times 10^{-3}$
5	2.400	0,02784872	$2,984140 \times 10^{-3}$

Tabel 1 menunjukkan hasil estimasi parameter fungsi *survival* dan fungsi *hazard* distribusi *Rayleigh* metode GELF pada kasus penderita PBC. Maka jika seorang individu mengidap penyakit PBC selama 41 hari peluang individu untuk bertahan hidup adalah 0,99895548 dan probabilitas kematiannya adalah $5,097906 \times 10^{-5}$, selama 788 hari peluang individu untuk bertahan hidup adalah 0,67974447 dan probabilitas kematiannya adalah $7,771199 \times 10^{-4}$, selama 1153 hari peluang individu untuk bertahan hidup adalah 0,43758333 dan probabilitas kematiannya adalah $1,242148 \times 10^{-3}$, selama 1576 hari peluang individu untuk bertahan hidup adalah 0,21349255 dan probabilitas kematiannya adalah $1,870061 \times 10^{-3}$, dan selama 2400 hari peluang individu untuk bertahan hidup adalah 0,02784872 dan probabilitas kematiannya adalah $2,984140 \times 10^{-3}$.

Berdasarkan Tabel 1, diperoleh grafik fungsi *survival* dan fungsi *hazard* sebagai berikut:

Gambar 1 Grafik Fungsi *Survival* dan Fungsi *Hazard* Distribusi *Rayleigh* dengan Metode Bayesian GELF

Gambar 1a menunjukkan fungsi *survival*, jika semakin lama individu menderita penyakit PBC maka semakin kecil peluang untuk individu dapat bertahan hidup. Sedangkan Gambar 1b menunjukkan fungsi *hazard*, jika semakin lama individu menderita penyakit PBC maka semakin besar nilai probabilitas kematian individu tersebut.

PENUTUP

Berdasarkan data yang digunakan pada penelitian ini yaitu data penderita penyakit PBC, dengan menggunakan program R didapat nilai $\hat{\theta}_{BG} = 896,8008$. Berdasarkan hasil estimasi parameter model *survival* distribusi *Rayleigh* metode Bayesian GELF dapat diketahui peluang seorang individu dapat bertahan hidup pada kasus penderita PBC jika mengidap penyakit selama 41 hari adalah 0,99895548, selama 625 hari adalah 0,78438920, selama 999 hari adalah 0,53770074, selama 1504 hari adalah 0,24505170, dan selama 2400 hari adalah 0,02784872. Sehingga hasil estimasi parameter model *survival* distribusi *Rayleigh* metode Bayesian GELF dapat diketahui peluang seorang penderita penyakit PBC untuk bertahan hidup semakin lama semakin kecil (mendekati nol), dengan resiko kematian yang semakin besar.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Gayatri, D., & Halley, E. Mengenal Analisis Ketahanan (Survival Analisis).2005; 9(1):36–40.
- [2] Boudjerda, Chadli, Merradja, & Fellag. Bayesian Estimation of the Rayleigh distribution

- under different loss function, 2017;4.doi.org/10,1285/i20705948v10n1p50
- [3] Bolstad, & William.M. *Introduction to Bayesian Statistics*. (U. of Waikato, Ed.) (second). Hamilton, New Zealand; 2007 :Wiley Series In Probability and Statics
- [4] Walpole, R., H.Myers, R., L.Myers, S., & Ye, K. *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*. (T. Benfatti, Ed.) (eighth). London; 2007 :Pearson Education International.
- [5] Lawless, J.F. *Statistical Models and Method for Lifetime Data Second Edition*, John Wiley & Sons Inc, New York; 2003.
- [6] Prayudi. *Kalkulus Lanjut Fungsi Banyak Variabel dan Penerapannya*. Yogyakarta; 2008: Graha Ilmu.
- [7] Bickel, P. J., Diggle, P., Fienberg, S., Gather, U., Olkin, I., Zeger, S., Demography, S. *Springer Series in Statistics Springer Series in Statistics*. (J. G.Ibrahim, Ed.) (second). Boston, Amerika; 2010: Springer. [doi.org/10,1007/978-0-387-98135-2](https://doi.org/10.1007/978-0-387-98135-2)
- [8] Guure, C.B., and Ibrahim, N.A., Bayesian Analysis of the *Survival* Function and Failure Rate of Weibull Distribution with Censored Data. *Journal Mathematical Problems in Engineering*, Vol 2012, Article ID 329489, 2012.

PETTY JELDA : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN Pontianak,
peti.petimi5a@gmail.com

SETYO WIRA RIZKI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN Pontianak,
setyo.wirarizki@math.untan.ac.id

NURFITRI IMRO'AH : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN Pontianak,
nurfitriimroah@math.untan.ac.id