ESTIMASI PARAMETER MODEL SURVIVAL DISTRIBUSI RAYLEIGH PRIOR UNIFORM DENGAN METODE BAYESIAN SELF

Eka Rizki Wahyuni, Setyo Wira Rizki, Hendra Perdana

INTISARI

Data survival adalah data yang menjelaskan tentang waktu suatu individu atau objek dapat bertahan hingga terjadinya suatu kejadian. Penelitian ini menggunakan metode Bayesian dengan pendekatan Squared Error Loss Function (SELF) untuk melakukan estimasi parameter pada model survival. Proses estimasi parameter metode Bayesian SELF memerlukan informasi dari fungsi likelihood dan distribusi prior yang kemudian akan membentuk distribusi posterior. Hasil dari estimasi parameter metode Bayesian SELF diterapkan pada data kasus penderita kanker paru-paru untuk mengetahui peluang bertahan hidup pasien penderita kanker paru-paru. Kesimpulan dari penelitian ini adalah hasil dari estimasi parameter distribusi Rayleigh prior Uniform dengan menggunakan metode Bayesian SELF menghasilkan nilai survival pada hari ke-95 sebesar 0,929056666 dan nilai hazard $1,549169 \times 10^{-3}$ sedangkan hari ke-791 menghasilkan nilai survival sebesar 0,006087581 dan nilai hazard sebesar $1,289887 \times 10^{-2}$. Hal ini berarti, nilai fungsi survival bergerak mendekati nol sesuai dengan karakteristik fungsi survival dan fungsi hazard yang bergerak naik mendekati satu sesuai dengan karakteristik distribusi Rayleigh.

Kata Kunci: Survival, Rayleigh, Bayesian, SELF.

PENDAHULUAN

Analisis *survival* adalah proses analisis statistika untuk menganalisis data dengan variabel yang memperhatikan waktu awal hingga waktu terjadinya suatu kejadian[1]. Waktu *survival* yaitu hal yang menunjukkan seberapa lama individu dapat bertahan terhadap sesuatu, selama dilakukannya pengamatan. Tiga faktor yang dibutuhkan dalam menentukan waktu *survival*, pertama yaitu waktu awal pencatatan (*start point*) yang terdefinisi dengan baik. Kedua, waktu akhir pencatatan (*end point*) yang terdefinisi dengan baik, dan ketiga yaitu skala pengukuran sebagai bagian dari waktu yang harus jelas[2].

Terdapat dua model yang digunakan dalam analisis *survival*, yaitu model non-parametrik dan model parametrik. Model non-parametrik digunakan jika data tidak mengikuti asumsi tertentu. Model parametrik digunakan jika data mengikuti asumsi suatu distribusi tertentu. Penelitian ini menggunakan model parametrik, distribusi yang digunakan adalah distribusi Rayleigh. Distribusi Rayleigh merupakan bentuk khusus dari distribusi Weibull dua parameter. Model parametrik memiliki dua metode yang dapat digunakan dalam menganalisis data *survival*, yaitu metode Klasik dan metode Bayesian. Salah satu contoh dari metode Klasik adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Metode Bayesian memandang parameter sebagai variabel yang menggambarkan pengetahuan awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut dengan distribusi prior[3].

Informasi dalam distribusi prior dikombinasikan dengan informasi sampel yang dinyatakan dengan fungsi *likelihood*. Hasil dari kombinasi tersebut dinyatakan dalam bentuk distribusi yang disebut distribusi posterior. Terdapat beberapa pendekatan dalam metode Bayesian, yaitu *Linear Exponential Loss Function* (Linex), *General Entropy Loss Function* (GELF), *Lindley Approximation*, dan *Squared Error Loss Function* (SELF). Pendekatan yang paling umum digunakan dalam estimasi parameter metode Bayesian adalah pendekatan SELF [4]. Distribusi posterior selanjutnya digunakan dalam estimasi parameter dengan metode Bayesian SELF.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan estimasi parameter model *survival* berdistribusi Rayleigh dengan prior Uniform menggunakan metode Bayesian SELF. Hasil dari estimasi parameter tersebut diterapkan pada data kasus penderita kanker paru-paru yang diperoleh dari *software* R-3.5.1. Data yang sudah didapatkan, diuji menggunakan *Kolmogorov-Smirnov* dengan bantuan *software EasyFit* untuk mengetahui bahwa data berdistribusi Rayleigh. Langkah selanjutnya adalah menentukan fungsi distribusi kumulatif, fungsi *survival*, dan fungsi *hazard* dari distribusi Rayleigh. Selanjutnya adalah menentukan fungsi *likelihood*, yang kemudian dikombinasikan dengan distribusi prior Uniform untuk mendapatkan distribusi posterior. Distribusi posterior kemudian digunakan untuk menentukan estimasi parameter pada pendekatan SELF, yang selanjutnya diterapkan pada data kasus penderita kanker paru-paru.

DISTRIBUSI RAYLEIGH

Distribusi Rayleigh pertama kali dikenalkan pada tahun 1880 oleh seorang ahli fisika yang berasal dari Inggris, yaitu Baron John William Strutt Rayleigh. Distribusi Rayleigh merupakan bentuk khusus dari distribusi Weibull dua parameter[5]. Karakteristik dari distribusi Rayleigh adalah fungsi *hazard* yang naik secara linear terhadap waktu[6]. Fungsi kepadatan peluang distribusi Rayleigh dinyatakan sebagai berikut:

$$f(t; \theta) = \frac{t}{\theta^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2\theta^2}\right) \quad ; t \geq 0, \theta > 0 \quad (1)$$

didefinisikan, t merupakan data waktu dan θ merupakan parameter.

Berdasarkan fungsi kepadatan peluang dari distribusi Rayleigh, maka fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi Rayleigh adalah:

$$F(t; \theta) = 1 - \exp\left(-\frac{t^2}{2\theta^2}\right) \quad (2)$$

Berdasarkan Persamaan (2), dapat ditentukan fungsi *survival* dan fungsi *hazard* sebagai berikut:

$$s(t; \theta) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\theta^2}\right) \quad (3)$$

$$h(t; \theta) = \frac{t}{\theta^2} \quad (4)$$

ESTIMASI PARAMETER METODE BAYESIAN SELF

Estimasi parameter menggunakan metode Bayesian memerlukan fungsi *likelihood* dari distribusi Rayleigh, yaitu:

$$\begin{aligned} L(t_i; \theta) &= \prod_{i=1}^n [f(t_i; \theta)] \\ &= \left(\frac{\prod_{i=1}^n t_i}{\theta^{2n}} \right) \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{2\theta^2}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

Setelah menentukan fungsi *likelihood*, dilanjutkan dengan menentukan distribusi posterior dengan mengkombinasikan fungsi *likelihood* dan distribusi prior. Distribusi prior adalah distribusi dari parameter sebelum ada data yang diteliti, dan dinotasikan dengan $p(\theta)$ [4]. Pada umumnya prior yang dipilih adalah berdasarkan pada pengetahuan dan kepercayaan subjektif peneliti[7]. Apabila peneliti tidak ingin memasukkan keyakinan pribadi dalam pengambilan keputusan, menjadi objektif dan ingin memberikan bobot yang sama untuk semua kemungkinan keberhasilan, maka peneliti dapat menggunakan prior Uniform [3]. Distribusi prior Uniform dinyatakan sebagai berikut:

$$p(\theta) = \frac{1}{b-a} \quad ; \quad a < \theta < b \quad (6)$$

sehingga, dapat ditentukan distribusi posterior dengan mengkombinasikan Persamaan (5) dan Persamaan (6), sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \pi^*(\theta | t_i) &= \frac{p(\theta)L(t_i; \theta)}{\int_0^\infty p(\theta)L(t_i; \theta)d\theta} \\ &= \frac{\frac{1}{\theta^{2n}} \left(\exp \left(-\frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{2\theta^2} \right) \right)}{-\left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^{\frac{1}{2}-n} \left(2^{n-\frac{3}{2}} \right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2} \right)} \end{aligned} \quad (7)$$

Setelah menentukan distribusi posterior, dilanjutkan dengan melakukan estimasi parameter dengan metode Bayesian SELF, SELF didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}(\hat{\theta}_{BS}, \theta) = (\hat{\theta}_{BS} - \theta)^2 \quad ; \quad 0 < \theta < \infty$$

dengan $\hat{\theta}_{BS}$ merupakan parameter dari metode Bayesian SELF. Estimasi parameter metode Bayesian SELF dapat diperoleh dengan meminimumkan ekspektasi *loss function*, yaitu:

$$\frac{\partial \left[E \left((\hat{\theta}_{BS} - \theta)^2 \right) \right]}{\partial \theta} = 0$$

dengan demikian diperoleh

$$E(\theta) = \hat{\theta}_{BS} \quad (8)$$

Berdasarkan Persamaan (8), dapat ditentukan estimasi parameter dengan metode Bayesian SELF, yaitu:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{BS} = E(\theta) &= \int_0^\infty \theta \cdot \pi^*(\theta | t_i) d\theta \\ &= \frac{\Gamma(n-1)}{\left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(2^{\frac{1}{2}} \right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2} \right)} \end{aligned} \quad (9)$$

Berdasarkan Persamaan (9), dapat ditentukan fungsi *survival* dan fungsi *hazard* dengan estimasi parameter metode Bayesian SELF adalah:

$$\begin{aligned} \hat{s}_{BS}(t_i; \hat{\theta}_{BS}) &= \exp \left(-\frac{t_i^2}{2\theta^2} \right) \\ &= \exp \left(-\frac{t_i^2}{2 \left(\frac{\Gamma(n-1)}{\left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(2^{\frac{1}{2}} \right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2} \right)} \right)^2} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\hat{h}_{BS}(t_i; \hat{\theta}_{BS}) = \frac{t_i}{\theta^2} = \frac{t_i}{\left(\frac{\Gamma(n-1)}{\left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(2^{\frac{1}{2}} \right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)} \right)^2} \quad (11)$$

STUDI KASUS

Data yang digunakan merupakan data waktu bertahan hidup pasien kanker paru-paru dari *North Central Cancer Treatment Group*. Data kasus penderita kanker paru-paru ini diambil dari *software R-3.5.1*. Dalam penelitian ini, digunakan variabel waktu dengan lama waktu penelitian adalah 791 hari. Data kasus penderita paru-paru yang didapat berjumlah 1022 hari penelitian, namun data awal yang didapatkan tidak berdistribusi Rayleigh, sehingga dilakukan pemotongan data berdasarkan pada satuan hari. Setelah melakukan beberapa kali percobaan, data berdistribusi Rayleigh dengan jumlah 791 hari. Data yang digunakan dalam penelitian ini harus berdistribusi Rayleigh, agar data dapat digunakan untuk analisis *survival*. Uji yang digunakan untuk mengetahui bahwa data berdistribusi Rayleigh adalah uji *Kolmogorov-Smirnov*. Hipotesis uji yang digunakan sebagai berikut:

H_0 : data mengikuti distribusi Rayleigh

H_1 : data tidak mengikuti distribusi Rayleigh

dengan taraf signifikansi $\alpha = 5\%$ atau $\alpha = 0,05$. Apabila nilai *p-value* lebih kecil dari α , maka H_0 ditolak.

Uji *Kolmogorov-Smirnov* dilakukan dengan bantuan *software EasyFit*, dengan hasil sebagai berikut:

Tabel 1 Output EasyFit Kolmogorov-Smirnov

Kolmogorov-Smirnov	
Sample Size	220
P-Value	0,15106

Dari Tabel 1, dapat disimpulkan bahwa data kasus penderita kanker paru-paru memiliki *p-value* lebih besar dari α yaitu $0,15106 > 0,05$ sehingga H_0 tidak ditolak, yang artinya data berdistribusi Rayleigh. Jumlah sampel adalah sebanyak 220 pasien.

Penentuan nilai dari parameter $\hat{\theta}_{BS}$ dilakukan dengan bantuan *software R*. Berdasarkan Persamaan (8), dihasilkan bahwa nilai parameter $\hat{\theta}_{BS}$ adalah 247,6352. Analisis dilanjutkan dengan menghitung nilai *survival* dan nilai *hazard* dari metode Bayesian SELF. Hasil perhitungan dengan menggunakan *software R-3.5.1* adalah sebagai berikut:

Tabel 2 Nilai Survival dan Nilai Hazard

Waktu	Survival BS	Hazard BS
95	0,929056666	$1,549169 \times 10^{-3}$
201	0,719347677	$3,277716 \times 10^{-3}$
300	0,480073017	$4,892114 \times 10^{-3}$
477	0,156427454	$7,778461 \times 10^{-3}$
588	0,059663690	$9,588543 \times 10^{-3}$
689	0,020844845	$1,123555 \times 10^{-2}$
705	0,017378790	$1,149647 \times 10^{-2}$

$$\frac{791 \quad 0,006087581 \quad 1,289887 \times 10^{-2}}{}$$

Berdasarkan Tabel 2, dapat dilihat nilai *survival* yang terus turun hingga bernilai 0,006087581 pada hari ke 791, sedangkan nilai *hazard* semakin besar dan bernilai $1,289887 \times 10^{-2}$ pada hari ke 791.

Berdasarkan nilai *survival* dan nilai *hazard* pada Tabel 2, grafik yang dibentuk untuk nilai *survival* dan nilai *hazard* adalah sebagai berikut:

Gambar 1. Grafik Nilai *Survival* dan Nilai *Hazard*

Berdasarkan Gambar 1a. dapat disimpulkan bahwa fungsi *survival* dengan estimasi parameter metode Bayesian SELF menghasilkan nilai *survival* yang bergerak mendekati nol, sesuai dengan karakteristik dari fungsi *survival*. Gambar 1b, menunjukkan bahwa nilai *hazard* dari fungsi *hazard* dengan estimasi parameter metode Bayesian SELF bergerak naik secara linear terhadap waktu. Hasil dari nilai *hazard* pada penelitian ini sesuai dengan karakteristik dari distribusi Rayleigh.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis yang telah dipaparkan maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Estimasi parameter distribusi Rayleigh dengan metode Bayesian SELF adalah:

$$\begin{aligned} \hat{s}_{BS}(t_i; \hat{\theta}_{BS}) &= \exp\left(-\frac{t_i^2}{2\theta^2}\right) \\ &= \exp\left[-\frac{t_i^2}{2 \left(\frac{\Gamma(n-1)}{\left(\sum_{i=1}^n t_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(2^{\frac{1}{2}}\right) \Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)} \right)^2}\right] \\ \hat{h}_{BS}(t_i; \hat{\theta}_{BS}) &= \frac{t_i}{\theta^2} \\ &= \frac{t_i}{\left(\frac{\Gamma(n-1)}{\left(\sum_{i=1}^n t_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(2^{\frac{1}{2}}\right) \Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)} \right)^2} \end{aligned}$$

2. Distribusi Rayleigh ini dapat digunakan dalam mengestimasi parameter model *survival* metode Bayesian SELF dan diterapkan pada data *survival*, yang pada penelitian ini menggunakan data penderita kanker paru-paru. Nilai dari parameter $\hat{\theta}_{BS}$ untuk metode Bayesian SELF adalah 247,6352. Nilai *survival* pada hasil penelitian terus turun mendekati nol, hingga pada hari ke 791 nilai *survival* sebesar 0,006087581 sedangkan nilai *hazard* semakin besar dan bernilai $1,289887 \times 10^{-2}$. Nilai *survival* yang terus mendekati nol sesuai dengan karakteristik dari fungsi *survival*, sedangkan nilai *hazard* yang naik secara linear terhadap waktu sesuai dengan karakteristik dari fungsi *hazard*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kleinbaum DG, Klein M. *Survival Analysis: A Self-Learning Text*. New York: Springer Science Business Media Inc; 2005.
- [2] Lee ET, Wang JW. *Statistical Methods for Survival Data Analysis*. Canada: A John Wiley & Sons Inc; 2003
- [3] Bolstad, WM. *Introduction to Bayesian Statistics Second Edition*. Amerika: A John Wiley & Sons Inc; 2007
- [4] Guure CB, Ibrahim NA. Bayesian Analysis Survival Function and Failure Rate of Weibull Distribution with Censored Data. *Journal Mathematical Problem in Engineering*. 2012. Vol 2012. Article ID 329489.
- [5] Dey S, Dey T. Rayleigh Distribution Revisited via Extension of Jeffrey's Prior Information and a New Loss Function. *Statistical Journal*. 2011; 9(3): 213-226.
- [6] Dey S, Maiti SS. Bayesian Estimation of the Parameter of Rayleigh Distribution Under the Extended Jeffrey's Prior. *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*. 2012; 5(1): 44-59.
- [7] Ahmed A. Ahmad SP, Reshi JA. Bayesian Analysis of Rayleigh Distribution. *International Journal of Scientific and Research Publication*. 2013; 3(10): 1-9.

EKA RIZKI WAHYUNI	: FMIPA Untan Pontianak, ekarizkiwahyuni37@gmail.com
SETYO WIRA RIZKI	: FMIPA Untan Pontianak, setyo.wirarizki@math.untan.ac.id
HENDRA PERDANA	: FMIPA Untan Pontianak, hendra.perdana@math.untan.ac.id