BILANGAN KROMATIK BINTANG PADA GRAF YANG MEMUAT BINTANG DAN CYCLE

Fransiska Evalia, Yundari , Fransiskus Fran

INTISARI

Pewarnaan bintang merupakan salah satu jenis pewarnaan simpul pada suatu graf dengan pemberian warna pada setiap lintasan empat simpul tidak menggunakan dua warna. Jumlah warna minimum yang digunakan pada pewarnaan bintang di graf G disebut dengan bilangan kromatik bintang yang dinotasikan dengan $\chi_s(G)$. Pada penelitian ini dibahas tentang bilangan kromatik bintang pada graf Lilly, graf buku, generalisasi graf pertemanan, dan bayangan graf cycle. Graf Lilly dan graf buku merupakan graf yang dibentuk dari gabungan graf bintang dan graf lintasan sedangkan generalisasi graf pertemanan dan bayangan graf cycle dibentuk dari salinan graf cycle. Berdasarkan penelitian diperoleh bilangan kromatik bintang pada graf Lilly yaitu 3 warna, bilangan kromatik bintang pada graf buku adalah 4. Bilangan kromatik bintang pada generalisasi graf pertemanan adalah 4 warna untuk $n = 5$ dan 3 warna untuk n lainnya, bilangan kromatik bintang pada bayangan graf cycle adalah 4 warna untuk $n = 3k$ dengan k merupakan anggota himpunan bilangan asli, 6 warna untuk $n = 5$, dan 5 warna untuk n lainnya. Bilangan kromatik yang terkait dengan derajat maksimum suatu graf yaitu $\chi_s(G) \leq d^2$ dengan d merupakan anggota himpunan bilangan asli dan $d \geq 2$.

Kata Kunci : graf Lilly, graf buku, generalisasi graf pertemanan, bayangan graf cycle.

PENDAHULUAN

Pewarnaan graf merupakan salah satu materi pada teori graf yang hingga kini masih berkembang. Pewarnaan graf terbagi menjadi tiga bagian yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, dan pewarnaan bidang. Pada tahun 1973 Grunbaum memperkenalkan tentang konsep pewarnaan bintang. Pada saat itu Grunbaum juga memperkenalkan jumlah warna minimum yang digunakan pada pewarnaan bintang yang disebut dengan bilangan kromatik bintang. Pewarnaan bintang merupakan pengembangan dari pewarnaan simpul. Suatu pewarnaan simpul pada graf G dikatakan pewarnaan bintang jika setiap lintasan dengan empat simpul atau setiap lintasan dengan panjang tiga yang terbentuk minimal menggunakan tiga warna.

Pewarnaan bintang memiliki beberapa aplikasi salah satunya pada penelitian yang membahas tentang penggunaan konsep pewarnaan bintang pada internet protokol traceback. Pada penelitian tersebut setiap router dikaitkan dengan warna yang digunakan dalam pewarnaan bintang pada graf dan operasi traceback menjelaskan tentang penggunaan urutan warna pada router dari sumber ke tujuan [1]. Selain aplikasi, dari pewarnaan bintang terdapat permasalahan yang dapat dikaji, diantaranya adalah mencari jumlah warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan bintang pada suatu graf yang disebut sebagai bilangan kromatik bintang. Bilangan kromatik bintang juga dapat diperoleh dengan mengkaitkan jumlah derajat maksimum graf [2]. Kemudian salah satu penelitian yang juga membahas tentang bilangan kromatik bintang yaitu mencari bilangan kromatik bintang pada beberapa graf khusus diantaranya graf prisma, graf kipas, graf barbell, graf lollipop, dan graf kincir angin [3]. Dari hal tersebut maka perlu dilakukan penelitian lebih lanjut yang membahas bilangan kromatik bintang pada graf khusus lainnya.

Pada penelitian ini, dibahas mengenai bilangan kromatik bintang pada beberapa graf yang memuat graf bintang dan *cycle*. Graf yang memuat bintang yang dibahas yaitu graf Lilly dan graf buku sedangkan graf yang memuat *cycle* yang dibahas adalah generalisasi graf pertemanan dan bayangan dari graf *cycle*. Bilangan kromatik bintang pada beberapa graf tersebut diperoleh dengan menerapkan pola pewarnaan bintang dari graf lintasan dan *cycle*. Dari pola tersebut maka diperoleh bilangan kromatik bintang pada setiap graf.

PEWARNAAN GRAF

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul [4]. Pewarnaan graf G merupakan pemetaan dari himpunan simpul atau himpunan sisi pada himpunan warna atau $\{1, 2, \dots, k\}$ dengan k merupakan anggota himpunan bilangan asli sehingga tidak ada sisi atau simpul yang bertetangga menggunakan warna yang sama. Pewarnaan graf memiliki kasus khusus dalam pemberian warna pada simpul ataupun sisinya. Secara umum pewarnaan graf terdiri dari tiga jenis yaitu pewarnaan sisi, pewarnaan simpul, dan pewarnaan bidang. Dari tiga jenis pewarnaan tersebut berikut dijelaskan tentang definisi dari pewarnaan simpul.

Definisi 1 [3] Misalkan G adalah suatu graf dengan $V(G)$ merupakan himpunan simpul dari graf G dan misalkan $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ merupakan himpunan semua warna yang ditetapkan untuk setiap simpul di graf G . Pewarnaan simpul adalah pemetaan $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk semua simpul yang bertetangga $u, v \in V(G)$.

Setiap pewarnaan graf baik itu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, atau pewarnaan bidang pasti memiliki jumlah warna minimum. Berikut diberikan definisi tentang jumlah warna minimum yang digunakan pada pewarnaan simpul graf.

Definisi 2 [3] Jika G dapat diwarnai dengan pewarnaan simpul maka bilangan kromatik dari G adalah jumlah warna minimum yang digunakan pada pewarnaan di graf G . Bilangan kromatik pada graf G di notasikan dengan $\chi(G)$.

Dari Definisi 1 dan Definisi 2 diberikan contoh pewarnaan simpul pada suatu graf berikut.

Contoh 3 Diberikan suatu graf G dengan himpunan simpul dan sisi yaitu $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Gambar 1 Pewarnaan simpul pada graf G

Pada Gambar 1 graf G merupakan suatu graf khusus yang disebut sebagai graf bintang. Graf bintang $S_{1,n}$ adalah graf dengan $n + 1$ simpul, dengan satu simpul berderajat n yang dinamakan simpul pusat, dan n simpul berderajat satu, yang dinamakan daun [5]. Pada Gambar 1 graf tersebut merupakan graf bintang $S_{1,5}$ dan dapat dilihat jumlah warna minimum yang digunakan adalah sebanyak dua warna. Secara umum pewarnaan simpul pada graf bintang bilangan kromatiknya tidak mungkin lebih dari dua warna karena setiap n simpul yang berderajat satu pada graf bintang hanya bertetangga dengan satu simpul yang berderajat n .

PEWARNAAN BINTANG

Pewarnaan bintang adalah pewarnaan pada lintasan dengan empat simpul dengan memberikan minimal 3 warna berbeda pada setiap simpul. Penjelasan lebih lengkap dijelaskan berdasarkan definisi-definisi berikut.

Definisi 4 [3] Suatu pewarnaan simpul pada graf G dikatakan pewarnaan bintang jika setiap lintasan pada graf G dengan empat simpul tidak menggunakan dua warna.

Salah satu graf khusus yang dibahas adalah graf yang berkaitan dengan graf cycle. Graf cycle adalah graf terhubung n simpul dengan setiap simpul memiliki derajat dua [6]. Graf cycle dengan n simpul dilambangkan dengan C_n . Jumlah simpul pada graf cycle sama dengan jumlah sisinya. Pada graf cycle C_3 terdiri dari tiga simpul dengan panjang lintasan tiga. Hal tersebut mengakibatkan harus ada definisi lain terkait pewarnaan bintang untuk graf dengan panjang lintasan tiga. Dari hal tersebut, berikut diberikan definisi lain tentang pewarnaan bintang.

Definisi 5 [2] Pewarnaan bintang dari graf G adalah pewarnaan dengan simpul yang bertetangga memiliki pewarnaan yang berbeda sehingga tidak ada lintasan dengan panjang tiga di dalam G menggunakan dua warna.

Pada pewarnaan graf terdapat jumlah warna minimum yang digunakan. Hal tersebut juga berlaku pada pewarnaan bintang. Berikut dijelaskan definisi tentang jumlah warna minimum yang digunakan pada pewarnaan bintang.

Definisi 6 [3] Bilangan kromatik bintang adalah jumlah warna minimum yang digunakan pada pewarnaan bintang dan disimbolkan dengan $\chi_s(G)$.

Berikut disajikan contoh pewarnaan bintang berdasarkan Definisi 4, Definisi 5, dan Definisi 6.

Contoh 7 Diberikan graf $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}, \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{11}, e_{12}\})$.

Gambar 2 Pewarnaan bintang pada graf G dengan $\chi_s(G) = 5$

Dari Gambar 2 pewarnaan bintang pada graf G menggunakan lima warna yang berbeda dan lima warna yang digunakan merupakan warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan bintang pada graf G tersebut sehingga diperoleh $\chi_s(G) = 5$. Pewarnaan bintang pada graf khusus yang dibahas adalah graf yang berkaitan dengan graf bintang, graf lintasan dan cycle. Suatu pewarnaan simpul pada graf bintang tidak dapat dikatakan pewarnaan bintang karena jumlah warna minimum yang digunakan pada pewarnaan simpul untuk graf bintang sama dengan dua. Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari suatu lintasan tunggal, graf lintasan dengan n simpul dilambangkan dengan P_n [7]. Bilangan kromatik pada graf bintang dan bilangan kromatik bintang dari graf lintasan dan cycle tersebut digunakan untuk mencari bilangan kromatik bintang pada graf khusus yang dibahas. Berikut bilangan kromatik bintang pada graf lintasan dan cycle.

Teorema 8 [3] Jika P_n adalah graf lintasan dengan $n \geq 4$ maka $\chi_s(P_n) = 3$.

Selanjutnya yaitu bilangan kromatik bintang pada graf cycle yang dijelaskan pada Teorema 9 berikut.

Teorema 9 [2] Jika C_n adalah graf cycle dengan $n \geq 3$ maka $\chi_s(C_n) = \begin{cases} 4, & n = 5 \\ 3, & \text{lainnya} \end{cases}$

Graf khusus yang dibahas adalah graf Lilly, graf buku, generalisasi graf pertemanan, dan bayangan graf cycle. Graf Lilly l_n dengan $n \geq 2$ dapat dibentuk oleh dua buah graf bintang $S_{1,n}$ dengan menggabungkan dua jalur graf P_n dengan $n \geq 2$ [8]. Graf buku adalah suatu graf yang dibentuk dari operasi hasil kali Kartesius antara graf lintasan dengan dua simpul dan graf bintang dengan $n + 1$ simpul yaitu $B_n = P_2 \times S_n$ [9]. Graf khusus selanjutnya adalah generalisasi graf pertemanan. Graf pertemanan merupakan graf yang terbentuk dari m salinan graf C_3 yang bertemu di satu simpul pusat [10] sedangkan generalisasi graf pertemanan yang juga disebut sebagai graf kincir angin Belanda (*Dutch Windmill Graph*) D_n^m merupakan graf yang memiliki baling-baling dari m salinan graf C_n yang bertemu di satu simpul pusat [11]. Kemudian salah satu graf khusus yang juga dibahas adalah bayangan dari graf cycle. Bayangan dari graf cycle dinotasikan dengan $D_2(C_n)$ adalah graf yang diperoleh dari cycle C_n dan C'_n dengan menghubungkan setiap simpul $u_{ij} \in C_n$ dengan sebuah sisi ke simpul yang berhubungan dengan u'_{ij} (simpul $u'_{ij} \in C'_n$ adalah bayangan dari $u_{ij} \in C_n$ [12]. Berikut diberikan ilustrasi dari keempat graf khusus yang dibahas.

Gambar 3 (a) Graf Lilly l_5 , (b) Graf buku B_3 , (c) Generalisasi graf pertemanan D_4^2 , dan (d) Bayangan graf cycle $D_2(C_3)$

Selanjutnya yaitu pewarnaan bintang dari keempat graf yang dijelaskan pada observasi-observasi berikut.

Observasi 10 Jika l_n adalah graf Lilly dengan $n \geq 3$ maka $\chi_s(l_n) = 3$.

Bukti : Berdasarkan definisi graf Lilly, dimisalkan A adalah graf pertama dari $S_{1,n}$ dengan himpunan simpul $\{v_1, u_1, u_2, \dots, u_n\}$, B adalah graf kedua dari graf $S_{1,n}$ dengan himpunan simpulnya yaitu $\{v_1, w_1, w_2, \dots, w_n\}$, C adalah graf pertama dari graf P_n dengan himpunan simpulnya yaitu $\{v_1, r_1, r_2, \dots, r_n\}$ dan D adalah graf kedua dari graf P_n dengan himpunan simpulnya yaitu $\{v_1, t_1, t_2, \dots, t_n\}$. Berdasarkan definisi dari pewarnaan bintang diperoleh $\chi_s(l_n) \geq 3$. Dari hal tersebut, didefinisikan pewarnaan bintang pada graf l_n yaitu $c: V(l_n) \rightarrow$ himpunan warna, dengan $c(v_1) =$

biru, $c(u_i) = c(w_i) = \text{merah}$ dan $c(r_i) = c(t_i) = \begin{cases} \text{merah}, & i = 3k + 1 \\ \text{hijau}, & i = 3k + 2 \\ \text{biru}, & i = 3k + 3 \end{cases}$ dengan $k \geq 0$. Dari

pewarnaan tersebut setiap lintasan dengan empat simpul tidak menggunakan dua warna sehingga diperoleh $\chi_s(l_n) \leq 3$. Hal tersebut mengakibatkan $\chi_s(l_n) = 3$. ■

Dari penjelasan tersebut diberikan ilustrasi pewarnaan bintang sebagai berikut.

Gambar 3 Pewarnaan bintang pada graf Lilly l_7

Pada Gambar 3 dapat dilihat bahwa pewarnaan bintang pada graf Lilly l_7 menggunakan jumlah warna minimum yaitu tiga warna dengan setiap lintasan empat simpul pada graf tersebut tidak menggunakan dua warna.

Observasi 11 Jika B_n adalah suatu graf buku maka $\chi_s(B_n) = 4$ dengan $n \geq 2$.

Bukti : Diketahui bahwa graf buku diperoleh dari hasil kali Kartesius graf lintasan P_2 dan graf bintang $S_{1,n}$ yaitu $B_n = P_2 \times S_{1,n}$. Misalkan $V(B_n) = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$. Berdasarkan definisi pewarnaan bintang diperoleh $\chi_s(B_n) \geq 3$. Selanjutnya didefinisikan pewarnaan bintang pada graf B_n yaitu $c: V(B_n) \rightarrow$ himpunan warna, dengan $c(u_1) = \text{merah}$, $c(u_2) = \text{biru}$, $c(v_i) = \text{hijau}$, dan $c(w_i) = \text{ungu}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Dari pewarnaan tersebut setiap lintasan dengan empat simpul tidak menggunakan dua warna sehingga diperoleh $\chi_s(B_n) \leq 4$. Kemudian andaikan $\chi_s(B_n) = 3$, definisikan pewarnaan bintang B_n yaitu $c: V(B_n) \rightarrow \{\text{merah, biru, hijau}\}$ dengan $c(u_1) = \text{merah}$, $c(u_2) = \text{biru}$, $c(v_i) = \text{hijau}$, dan $c(w_i) = \text{merah}$. Dari pewarnaan tersebut, untuk lintasan $w_i - v_i - u_1 - v_j$ dengan $i \neq j$ merupakan pewarnaan dengan lintasan empat simpul yang menggunakan dua warna. Hal itu mengakibatkan pewarnaan pada lintasan tersebut bukan merupakan pewarnaan bintang sehingga kontradiksi dengan pengandaian maka haruslah $\chi_s(B_n) = 4$. ■
Dari penjelasan tersebut diberikan ilustrasi pewarnaan bintang berikut.

Gambar 4 Pewarnaan bintang pada graf buku B_7 dengan $\chi_s(B_7) = 4$

Pada Gambar 4 dapat dilihat bahwa pewarnaan bintang pada graf buku B_7 menggunakan jumlah warna minimum yaitu empat warna. Setiap lintasan dengan empat simpul yang pada graf B_7 tersebut tidak menggunakan dua warna pada pewarnaan bintangnya.

Observasi 12 Jika D_n^m adalah generalisasi graf pertemanan maka $\chi_s(D_n^m) = \chi_s(C_n)$ dengan $n \geq 3$.

Bukti : Diketahui bahwa generalisasi dari graf pertemanan terbentuk dari m salinan graf C_n sehingga pewarnaan bintang pada graf D_n^m dapat menggunakan Teorema 9. Misalkan A adalah graf salinan pertama C_n dengan himpunan simpul yaitu $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, B adalah graf salinan kedua dari C_n dengan himpunan simpul yaitu $\{v_1, u_2, \dots, u_n\}$, dan M adalah salinan ke- m graf C_n dengan himpunan simpul yaitu $\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ sehingga simpul pada graf D_n^m adalah $\{v_1, v_2, \dots, v_n, u_2, \dots, u_n, \dots, w_2, \dots, w_n\}$.

Dari Teorema 9 dapat dilihat bahwa $\chi_s(C_n) = \begin{cases} 4, & n = 5 \\ 3, & \text{lainnya} \end{cases}$ sehingga pewarnaan bintang pada graf D_n^m juga dapat menggunakan konsep dari Teorema 9.

a. Untuk $n = 5$

Berdasarkan pada Teorema 9 didefinisikan pewarnaan bintang pada graf D_5^m yaitu $c: V(D_5^m) \rightarrow$ himpunan warna, dengan $c(v_1) = c(u_4) = \dots = c(w_4) = \text{biru}$, $c(v_i) = c(u_i) = \dots = c(w_i) = \begin{cases} \text{merah}, & i = 2 \\ \text{hijau}, & i = 3. \end{cases}$ Dari pewarnaan tersebut diperoleh $\chi_s(D_n^m) \leq 4$. Disisi lain, berdasarkan pada

pewarnaan bintang $\chi_s(D_n^m) \geq 3$. Selanjutnya, andaikan $\chi_s(D_n^m) = 3$ dan didefinisikan pewarnaan bintang pada graf D_5^m yaitu $c: V(D_5^m) \rightarrow \{\text{merah, biru, hijau}\}$ dengan $c(v_1) = c(u_4) = \dots = c(w_4) = \text{biru}$ kemudian $c(v_i) = c(u_i) = \dots = c(w_i) = \begin{cases} \text{merah}, & i = 3k + 2 \\ \text{hijau}, & i = 3k + 3. \end{cases}$

Dari pewarnaan ini, untuk lintasan $v_4 - v_5 - v_1 - v_2 = u_4 - u_5 - u_1 - u_2 = \dots = w_4 - w_5 - w_1 - w_2$ merupakan lintasan dengan empat simpul yang sama-sama menggunakan dua warna maka pewarnaan pada lintasan tersebut bukan merupakan pewarnaan bintang. Hal tersebut kontradiksi dengan pengandaian sehingga haruslah $\chi_s(D_n^m) = 4$.

b. Untuk $n \neq 5$

Berdasarkan definisi pewarnaan bintang diperoleh $\chi_s(D_n^m) \geq 3$. Dari hal tersebut didefinisikan pewarnaan bintang pada graf D_n^m yaitu $c: V(D_n^m) \rightarrow$ himpunan warna, dengan $c(v_i) = \text{biru}$,

$$c(v_i) = c(u_i) = \dots = c(w_i) = \begin{cases} \text{biru,} & i = 3k + 1 \text{ dengan } k \geq 1 \\ \text{merah,} & i = 3k + 2 \text{ dengan } k \geq 0. \\ \text{ungu,} & i = 3k + 3 \text{ dengan } k \geq 0 \end{cases}$$

tidak ada lintasan dengan empat simpul yang menggunakan dua warna sehingga diperoleh $\chi_s(D_n^m) \leq 3$. Hal tersebut mengakibatkan $\chi_s(D_n^m) = 3$ untuk $n \neq 5$. ■

Penjelasan pewarnaan bintang pada graf D_n^m dapat dilihat dari ilustrasi pada gambar berikut.

Gambar 5 Pewarnaan bintang pada graf D_n^5

Pada Gambar 5 (a) pewarnaan bintang graf D_3^5 menggunakan tiga warna, (b) pewarnaan bintang pada graf D_4^5 juga menggunakan tiga warna, (c) pewarnaan bintang pada graf D_5^5 menggunakan empat warna. Dari Gambar 5 dapat dilihat bahwa setiap lintasan dengan empat simpul tidak menggunakan dua warna pada pewarnaan bintangnya.

Observasi 13 Jika $D_2(C_n)$ adalah bayangan dari graf cycle maka $\chi_s(D_2(C_n)) = \begin{cases} 4, & n = 3k \\ 6, & n = 5 \\ 5, & n \text{ lainnya} \end{cases}$

Bukti : Diketahui bahwa graf $D_2(C_n)$ terbentuk dari graf cycle C_n sehingga pada pembuktian ini dapat menggunakan Teorema 9 dan dibagi menjadi empat kasus.

Kasus 1: Untuk $n = 5$

Misalkan himpunan semua simpul pada bayangan graf cycle $D_2(C_5)$ adalah $V(D_2(C_5)) = \{t_1, t'_1, t_2, t'_2, t_3, t'_3, t_4, t'_4, t_5, t'_5\}$. Kemudian didefinisikan pewarnaan bintang pada graf $D_2(C_5)$

$$\text{yaitu } c: V(D_2(C_5)) \rightarrow \text{himpunan warna, dengan } c(t_i) = \begin{cases} \text{merah,} & i = 1 \\ \text{hitam,} & i = 2 \text{ dan } 5 \\ \text{hijau,} & i = 3 \\ \text{biru,} & i = 4 \end{cases} \text{ dan } c(t'_2) =$$

$c(t'_5) = \text{hitam}$, $c(t'_3) = c(t'_4) = \text{coklat}$ serta $c(t'_1) = \text{hitam}$. Dari pewarnaan tersebut diperoleh $\chi_s(D_2(C_5)) \leq 6$. Selanjutnya, andaikan $\chi_s(D_2(C_5)) = 5$. Selanjutnya definisikan pewarnaan bintang pada graf $D_2(C_5)$ yaitu $c: V(D_2(C_5)) \rightarrow \{\text{merah, biru, kuning, hijau, coklat}\}$ dengan $c(t_i) =$

$$\begin{cases} \text{merah,} & i = 1 \\ \text{kuning,} & i = 2 \text{ dan } 5 \\ \text{hijau,} & i = 3 \\ \text{biru,} & i = 4 \end{cases} \text{ dan } c(t'_2) = c(t'_5) = \text{kuning, dan } c(t'_1) = c(t'_3) = c(t'_4) = \text{coklat.}$$

Dari pewarnaan ini, untuk lintasan $t_1 - t'_5 - t_4 - t'_3$ merupakan lintasan dengan empat simpul yang menggunakan dua warna pada pewarnaan simpulnya. Hal itu mengakibatkan pewarnaan pada lintasan tersebut bukan merupakan pewarnaan bintang sehingga kontradiksi dengan pengandaian maka haruslah $\chi_s(D_2(C_5)) = 6$. Ilustrasi dari Kasus 1 dijelaskan pada gambar berikut.

Gambar 6 Pewarnaan bintang pada graf $D_2(C_5)$

Dari Gambar 6 jumlah warna yang digunakan pada pewarnaan bintang untuk graf $D_2(C_5)$ adalah enam warna dengan setiap lintasan empat simpul pada graf tersebut tidak menggunakan dua warna.

Kasus 2: Untuk $n = 3k$

Berdasarkan pada Teorema 9 diperoleh bahwa $\chi_s(C_n) = \begin{cases} 4, & n = 5 \\ 3, & \text{lainnya} \end{cases}$

Sehingga bilangan kromatik bintang pada graf *cycle* juga berlaku untuk bayangan dari graf *cycle*. Misalkan $V(D_2(C_{3k})) = \{v_1, v'_1, v_2, v'_2, v_3, v'_3, \dots, v_{3k}, v'_{3k}\}$. Definisikan pewarnaan bintang pada graf $D_2(C_{3k})$ yaitu $c: V(D_2(C_{3k})) \rightarrow$ himpunan warna, dengan $c(v_{3k-2}) = \text{merah}$, $c(v_{3k-1}) = \text{biru}$, $c(v_{3k}) = \text{hijau}$. Kemudian $c(v'_{3k-2}) = \text{merah}$ dan $c(v'_{3k-1}) = c(v'_{3k}) = \text{ungu}$. Dari pewarnaan tersebut diperoleh $\chi_s(D_2(C_{3k})) \leq 4$. Disisi lain, berdasarkan definisi pewarnaan bintang $\chi_s(D_2(C_{3k})) \geq 3$. Selanjutnya, andaikan $\chi_s(D_2(C_{3k})) = 3$ dan definisikan pewarnaan bintang pada graf tersebut yaitu $c: V(D_2(C_{3k})) \rightarrow \{\text{merah, hijau, biru}\}$ dengan $c(v_{3k-2}) = c(v'_{3k-2}) = \text{merah}$, $c(v_{3k-1}) = c(v'_{3k-1}) = \text{biru}$, $c(v_{3k}) = c(v'_{3k}) = \text{hijau}$. Dari pewarnaan ini, untuk lintasan $v'_{3k} - v_{3k-2} - v_{3k} - v'_{3k-2}$ merupakan lintasan dengan empat simpul yang menggunakan dua warna pada pewarnaan simpulnya. Hal ini mengakibatkan pewarnaan pada lintasan tersebut bukan merupakan pewarnaan bintang sehingga kontradiksi dengan pengandaian maka haruslah $\chi_s(D_2(C_{3k})) = 4$.

Ilustrasi pewarnaan dari penjelasan Kasus 2 di jelaskan pada gambar berikut.

Gambar 7 Pewarnaan bintang pada graf $D_2(C_{12})$

Dada Gambar 7 dapat dilihat bahwa pewarnaan bintang pada graf $D_2(C_{12})$ menggunakan jumlah warna minimum yaitu empat warna. Setiap lintasan dengan empat simpul pada graf tersebut tidak menggunakan dua warna.

Kasus 3 : Untuk $n = 3k + 1$

Misalkan himpunan simpul dari graf ini $V(D_2(C_{3k+1})) = \{w_1, w'_1, w_2, w'_2, \dots, w_{3k+1}, w'_{3k+1}\}$ kemudian didefinisikan pewarnaan bintang pada graf $D_2(C_{3k+1})$ yaitu $c: V(D_2(C_{3k+1})) \rightarrow$ himpunan warna, dengan $c(u_{3k-2}) = \text{biru}$, $c(u_{3k-1}) = \text{hijau}$, $c(u_{3k}) = \text{merah}$, dan $c(u_{3k+1}) = \text{hijau}$ serta $c(u'_{3k}) = c(u'_{3k+1}) = \text{merah}$, $c(u'_{3k-1}) = \text{ungu}$, dan $c(u'_{3k-2}) = \text{coklat}$. Dari pewarnaan tersebut diperoleh $\chi_s(D_2(C_{3k+1})) \leq 5$. Selanjutnya, andaikan $\chi_s(D_2(C_{3k+1})) = 4$ dan didefinisikan pewarnaan bintang pada graf $D_2(C_{3k+1})$ yaitu $c: V(D_2(C_{3k+1})) \rightarrow \{\text{merah, biru, hijau, kuning}\}$ dengan $c(w_{3m+1}) = \text{merah}$, $c(w_{3m+2}) = \text{biru}$, $c(w_{3m+3}) = \text{hijau}$ untuk $0 \leq m < 3k + 1$ dan $c(w_{3k+1}) = \text{biru}$ serta $c(w'_{3m+2}) = c(w'_{3k+1}) = \text{biru}$, $c(w'_{3m+3}) = c(w'_{3m+1}) = \text{kuning}$. Dari pewarnaan ini, untuk lintasan $w_{3k-2} - w_{3k-1} - w'_{3k-2} - w_{3k+1}$ merupakan lintasan dengan empat simpul yang menggunakan dua warna pada pewarnaan simpulnya. Hal ini mengakibatkan pewarnaan pada lintasan tersebut bukan merupakan pewarnaan bintang sehingga kontradiksi dengan pengandaian maka haruslah $\chi_s(D_2(C_{3k+1})) = 5$.

Penjelasan lebih jelas diberikan simulasi pewarnaan bintang dari Kasus 3 pada gambar berikut.

Gambar 8 Pewarnaan bintang pada graf $D_2(C_{10})$

Pada Gambar 8 pewarnaan bintang pada graf $D_2(C_{10})$ menggunakan lima warna dengan setiap lintasan empat simpul pada graf tersebut tidak menggunakan dua warna.

Kasus 4: Untuk $n = 3k + 2$

Asumsikan $k \geq 2$ jadi $n = 3(k - 1) + 5$ dengan $(k - 1) \geq 1$. Misalkan $V(D_2(C_{3k+2})) = \{u_1, u'_1, u_2, u'_2, \dots, u_{3k+2}, u'_{3k+2}\}$ dan didefinisikan pewarnaan bintang pada bayangan graf cycle $D_2(C_{3k+2})$ adalah $c: V(D_2(C_{3k+2})) \rightarrow$ himpunan warna, dengan $c(u_{3k-2}) = \text{merah}$, $c(u_{3k-1}) = \text{biru}$, $c(u_{3k}) = \text{hijau}$, $c(u_{3k+1}) = \text{hijau}$, dan $c(u_{3k+2}) = \text{biru}$ serta $c(u'_{3k}) = c(u'_{3k+1}) = \text{hijau}$, $c(u'_{3k-1}) = c(u'_{3k+2}) = \text{ungu}$, dan $c(u'_{3k-2}) = \text{coklat}$. Dari pewarnaan tersebut diperoleh $\chi_s(D_2(C_{3k+2})) \leq 5$. Selanjutnya, andaikan $\chi_s(D_2(C_{3k+2})) = 4$ dan didefinisikan pewarnaan bintang pada graf $D_2(C_{3k+2})$ yaitu $c: V(D_2(C_{3k+2})) \rightarrow \{\text{merah, biru, hijau, kuning}\}$ dengan $c(u_{3m+1}) = \text{merah}$, $c(u_{3m+2}) = \text{biru}$, $c(u_{3m+3}) = \text{hijau}$, untuk $0 \leq m < 3k - 2$ serta lima simpul terakhir dengan $c(u_{3k-2}) = \text{biru}$, $c(u_{3k-1}) = \text{merah}$, $c(u_{3k}) = \text{biru}$, $c(u_{3k+1}) = \text{hijau}$, dan $c(u_{3k+2}) = \text{biru}$ selanjutnya $(u'_{3m+2}) = c(u'_{3k-2}) = c(u'_{3k}) = c(u'_{3k+2}) = \text{biru}$, $c(u'_{3m+1}) = c(u'_{3k-1}) = c(u'_{3m+3}) = c(u'_{3k+1}) = \text{kuning}$. Dari lintasan ini, untuk lintasan $u'_{3m+3} - u_{3m+2} - u_{3m+3} - u'_{3m+2}$ merupakan lintasan dengan empat simpul yang menggunakan dua warna pada pewarnaan simpulnya. Hal itu mengakibatkan pewarnaan pada lintasan tersebut bukan merupakan pewarnaan bintang sehingga kontradiksi dengan pengandaian maka haruslah $\chi_s(D_2(C_{3k+2})) = 5$.

Dari keempat kasus tersebut maka dengan kata lain terbukti bahwa jumlah warna minimum pada bayangan graf cycle adalah $\chi_s(D_2(C_n)) = \begin{cases} 4, & n = 3k \\ 6, & n = 5 \\ 5, & n \text{ lainnya} \end{cases}$. ■

Penjelasan dari Kasus 4 dijelaskan pada Gambar berikut.

Gambar 9 Pewarnaan bintang pada graf $D_2(C_{11})$

Dada Gambar 7 dapat dilihat bahwa jumlah warna yang digunakan pada pewarnaan bintang untuk graf $D_2(C_{11})$ adalah lima warna dengan setiap lintasan empat simpul pada graf tersebut tidak menggunakan dua warna. Secara umum bilangan kromatik bintang pada graf dapat dihubungkan dengan jumlah derajat simpul maksimum pada graf tersebut. Bilangan kromatik bintang dapat dicari dengan menggunakan derajat simpul maksimum pada suatu graf. Berikut diberikan definisi terkait yang membahas tentang derajat simpul maksimum pada graf.

Definisi 14 [13] Untuk setiap graf G , graf kuadratik G adalah graf dengan jumlah simpul sama dengan graf G dan penambahan sisi diantara dua simpul yang jaraknya dalam G adalah 2.

Berikut diberikan contoh graf kuadratik dari G .

Contoh 15 Diberikan graf G dengan himpunan simpul dan sisinya adalah $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Gambar 10 (a) Graf G , (b) Graf kuadratik G^2

Dari Definisi 14, berikut dijelaskan tentang bilangan kromatik bintang yang telah dilakukan pada penelitian sebelumnya. Bilangan kromatik bintang yang berkaitan dengan derajat maksimum graf tersebut berkaitan juga dengan graf kuadratik graf.

Proposisi 16 [2] Misalkan G adalah Graf dengan n simpul dan G^2 adalah graf kuadratik dari graf G . Pada kasus ini, $\chi_s(G) \leq \chi(G^2)$, dengan $\chi(G)$ menunjukkan bilangan kromatik pada G .

Dari bilangan kromatik bintang pada graf kuadratik yang dijelaskan pada Proposisi 16 diperoleh bilangan kromatik bintang pada graf yang terkait dengan derajat maksimum graf. Penjelasan tersebut dijelaskan pada Proposisi 15 berikut.

Proposisi 17 [2] Untuk setiap graf G dengan derajat maksimum $d \geq 2$, $\chi_s(G) \leq d^2$.

Berdasarkan Proposisi 17, jumlah warna minimum yang digunakan pada pewarnaan bintang dari setiap graf yang dibahas juga memenuhi Proposisi 17.

PENUTUP

Berdasarkan pada pembahasan yang dilakukan, maka diperoleh kesimpulan yaitu bilangan kromatik bintang pada graf Lilly yaitu $\chi_s(l_n) = 3$ dengan $n \geq 3$, bilangan kromatik bintang pada graf buku yaitu $\chi_s(B_n) = 4$ dengan $n \geq 2$, bilangan kromatik bintang pada generalisasi graf pertemanan yaitu $\chi_s(D_n^m) = \chi_s(C_n)$, dan bilangan kromatik bintang pada bayangan graf cycle yaitu $\chi_s(D_2(C_n)) = \begin{cases} 4, & n = 3k \\ 6, & n = 5 \\ 5, & n \text{ lainnya} \end{cases}$. Selanjutnya bilangan kromatik bintang terkait derajat maksimum graf yaitu $\chi_s(G) \leq d^2$ dengan $d \geq 2$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Muthu, G. dan Mansoor, V. Coloring Internet Protokol. *International Conference on Parallel and Distributed System*. 2006; 7696-2612.
- [2] Fertin, G.; Raspaud, A.; dan Reed, B. Star Coloring of Graph. *Journal of Graph Theory*. 2004; 47: 1-11.
- [3] Mary, L.J.E. dan Rayen, A.L.M.J. On the Star Coloring of Graphs Formed From the Cartesian Product of Some Simple Graphs. *International Journal of Mathematics and its Applications*. 2006; 4: 122-155.
- [4] Munir, R. Matematika Diskrit. Bandung: Informatika; Ed ke-3, 2010.
- [5] Irawati, D. Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf Bintang. *Jurnal Matematika UNAND*. 2013; 2:85-89.
- [6] Bibi, K.A. dan Devi, M. Fuzzy Bi-Magic Labeling on Cycle Graph and Star Graph. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2017; 13: 1975-1985.
- [7] Damayanti, T. R. Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan. *Jurnal Cauchy*. 2011; 2: 2086-0382.
- [8] Samuel, A.E. dan Kalaivani. S. Prime Labeling for Some Lilly Related Graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2018;; 118: 195-204.
- [9] Galian, J.A. A dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, Dynamic Survey. 2007; 14: DS6.
- [10] Mertzios, G.G. dan Unger, W. The Friendship Problem on Graphs. *Relations Orders and Graphs Interaction with Computer Science*. 2008; 152-158.
- [11] Clarke, N.E. dan Sanaei, A. Skolem Labellings of Generalised Dutch Windmills. *Australasian Journal of Combinatorics*. 2016; 66: 407-419.
- [12] Ghosh, P.; Mishra, S.N.; dan Pal, A. Various Labeling on Bull Graph and Some Related Graphs. *International Journal of Applications of Fuzzy Sets and Artifical Intelligence*. 2015; 5: 23-25.
- [13] Esakkiammal, E.; Deepa, B.; dan Thirusangu, K. Some Labelings On Square Graph of Comb.z *International Journal of Mathematics Trends nd Technology*. 2018; 2231-5373.

FRANSISKA EVALIA : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak

fransiskaevalia03@gmail.com

YUNDARI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak

yundari@math.untan.ac.id

FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak

frandly88@gmail.com