

KESTABILAN LYAPUNOV PADA PEMODELAN RESPIRASI SELULAR DENGAN PETRI NET BERWAKTU

Melinda Mareta Sari, Mariatul Kiftiah, Yundari

INTISARI

Respirasi sel merupakan proses perombakan molekul organik kompleks yang kaya akan energi potensial menjadi produk limbah yang berenergi lebih rendah (proses katabolik) pada tingkat seluler. Proses perombakan yang terjadi pada respirasi sel tersebut belum diketahui tingkat kestabilannya. Hal ini terjadi karena terdapat beberapa faktor yang mempengaruhi keseimbangan pada setiap tahapannya. Berdasarkan kasus tersebut, untuk mengetahui tingkat kestabilan pada proses respirasi sel digunakan analisis kestabilan Lyapunov dengan menggunakan Petri Net berwaktu. Hal pertama yang dilakukan adalah membentuk model Petri Net dari sistem respirasi sel, kemudian membentuk matriks Incidence dari model Petri Net yang telah terbentuk. Selanjutnya menyelidiki tingkat kestabilan dari sistem respirasi sel menggunakan analisis kestabilan Lyapunov. Sistem dikatakan stabil apabila memenuhi $\Delta v = e^T Q^T \Phi \leq 0$. Jika $\Delta v = e^T Q^T \Phi \leq 0$ tidak terpenuhi, langkah selanjutnya yaitu mencari vektor firing dari sistem tersebut menggunakan $\Delta v = Qe \leq 0$. Sistem dikatakan dapat distabilkan apabila memiliki vektor firing. Jika tidak terdapat vektor firing, maka dapat dikatakan bahwa sistem tersebut tidak dapat distabilkan. Hasil yang diperoleh dari analisis tersebut adalah sistem dikatakan stabil, dapat distabilkan, dan tidak dapat distabilkan. Berdasarkan analisis kasus, hasil akhir yang diperoleh menyatakan bahwa sistem respirasi sel dalam proses perombakan molekul glukosa yang terjadi di dalam tubuh manusia tersebut adalah stabil.

Kata Kunci : *respirasi sel, petri net, kestabilan lyapunov.*

PENDAHULUAN

Metabolisme merupakan aktifitas makhluk hidup yang selalu terjadi pada setiap sel hidup. Metabolisme dibagi menjadi dua yaitu anabolisme dan katabolisme. Anabolisme merupakan proses pembentukan senyawa organik sederhana menjadi senyawa molekuler yang lebih kompleks, sedangkan katabolisme merupakan proses perombakan senyawa organik kompleks menjadi senyawa-senyawa yang lebih sederhana. Dalam proses katabolisme terdapat proses respirasi selular atau respirasi sel. Respirasi sel merupakan proses perombakan molekul organik kompleks yang kaya akan energi potensial menjadi produk limbah yang berenergi lebih rendah pada tingkat selular.

Respirasi sel memiliki empat tahapan yaitu glikolisis, dekarboksilasi oksidatif, siklus krebs dan transpor elektron [2]. Tahapan-tahapan yang dilalui membentuk suatu alur Petri Net. Petri Net (PN) yaitu suatu alat bantu matematika untuk mempelajari sistem. Suatu sistem dapat dimodelkan menjadi suatu jaringan PN yang merupakan representasi matematika dari suatu sistem. PN merupakan sebuah ilustrasi dan alat pemodelan matematika yang dapat digunakan dalam proses respirasi sel yang kemudian diuji kestabilannya menggunakan sistem kestabilan Lyapunov. Dengan demikian dapat diketahui apakah sistem respirasi sel stabil, dapat distabilkan atau tidak dapat distabilkan.

Alur yang terdapat dalam proses respirasi sel akan dibentuk ke dalam alur PN. Hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan *place* dan transisi. Selanjutnya membentuk alur PN, menentukan matriks *incidence* ke depan dan matriks *incidence* ke belakang. Dari kedua matriks ini ditentukan matriks *incidence*, kemudian menentukan transisi yang dapat di *fire*. Pada tahapan pengujian kestabilan sistem respirasi sel digunakan sistem kestabilan Lyapunov, jika sistem memenuhi sistem kestabilan Lyapunov, maka dapat dikatakan bahwa sistem stabil, sebaliknya jika tidak maka akan diselidiki apakah sistem respirasi sel memiliki vektor *firing*. Jika memiliki vektor *firing* diselidiki kembali apakah sistem tersebut dapat di stabilkan atau tidak.

Berdasarkan uraian tersebut, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui cara mengubah alur respirasi sel menjadi alur PN dan mengetahui apakah sistem respirasi sel yang terjadi dalam tubuh makhluk hidup stabil atau tidak.

STRUKTUR PETRI NET

PN merupakan suatu sistem yang dapat dimodelkan menjadi suatu jaringan Petri. PN merupakan salah satu alat untuk memodelkan Sistem Event Diskrit. Sistem Event Diskrit adalah sistem dimana ruang keadaan dari sistem tersebut diuraikan oleh himpunan diskrit $\{0, 1, 2, \dots\}$ dan transisi keadaannya hanya diamati pada titik diskrit dalam waktu. Jadi berubahnya keadaan pada Sistem Event Diskrit diakibatkan oleh terjadinya event [3]. Struktur PN terdiri dari dua jenis bentuk, yaitu persegi panjang atau garis dan yang lainnya adalah lingkaran. Persegi panjang atau garis menunjukkan transisi dan lingkaran menunjukkan *place*, sedangkan *arc* dinyatakan dengan tanda panah yang menghubungkan *place* dengan transisi atau sebaliknya. Sebuah transisi dan *place* dapat diinterpretasikan secara berurutan dengan peristiwa kejadian dan kondisi dimana kejadian dapat terjadi [1]. Sebuah PN terdiri dari 4-tuple (P, T, A, w) dengan P merupakan himpunan berhingga dari *place*, yaitu $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, T merupakan himpunan berhingga dari transisi dalam PN, yaitu $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, A merupakan himpunan dari *arc* yang menghubungkan *place* ke transisi atau transisi ke *place*, yaitu $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$, w merupakan fungsi bobot, yaitu $w: A \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ [1].

Penanda dinyatakan dengan vektor yang berisi bilangan bulat tak negatif yang menyatakan jumlah *token* yaitu $\mathbf{M} = [M(p_1), M(p_2), \dots, M(p_n)]^T$. Jumlah elemen \mathbf{M} sama dengan banyak *place* di PN. Elemen ke- i pada vektor ini merupakan jumlah *token* pada *place* p_i , $M(p_i) \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Selanjutnya transisi $t_j \in T$ pada PN bertanda memungkinkan jika $M(p_i) \geq w(p_i, t_j), \forall p_i \in I(t_j)$ [3]. Terdapat dua jenis representasi matriks dari PN yaitu matriks *incidence* ke depan dan matriks *incidence* ke belakang yang dinotasikan sebagai \mathbf{Q}_f dan \mathbf{Q}_b dengan $\left(\mathbf{Q}_b(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} w(p_i, t_j) \right) \left(\mathbf{Q}_f(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} w(t_j, p_i) \right)$ dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Dari definisi matriks *incidence* ke depan dan matriks *incidence* ke belakang didapat sebuah persamaan untuk matriks *incidence* sebagai berikut [6]:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_f - \mathbf{Q}_b. \quad (1)$$

Penentuan transisi yang memungkinkan dapat dilakukan dengan mencari kolom dari matriks *incidence* ke belakang yang kurang dari atau sama dengan vektor keadaan. Persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$M \geq \mathbf{Q}_b e_j. \quad (2)$$

Akibatnya didapat persamaan akhir sebagai berikut:

$$M_k \left([p_1, \dots, p_n]^T \right) = M \left([p_1, \dots, p_n]^T \right) + Q e_j, \quad (3)$$

$$M_k = M + Q e_j,$$

dengan M_k merupakan penanda atau letak token pada suatu keadaan sistem pada saat ke- k dan e_j adalah vektor kolom ke- j dari matriks identitas. PN bertanda (marked) adalah 5-tuple $(P, T, A, w, \mathbf{M}_0)$ dimana (P, T, A, w) merupakan PN dan \mathbf{M}_0 adalah penanda awal [3].

KESTABILAN LYAPUNOV PADA SISTEM PEMODELAN PN

Dimisalkan $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, $R_+ = [0, \infty)$, $N_{n_0}^+ = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + k, \dots\}$, dan $n_0 \geq 0$. Diberikan $x, y \in R^n$, dinotasikan dengan “ \leq ” yang berarti pertidaksamaan dalam hubungan yang sama, yaitu $x \leq y$ setara dengan $x_i \leq y_i, \forall i$. Fungsi $f(n, x)$, $f: N_{n_0}^+ \times R^n \rightarrow R^n$ disebut tidak menurun di x jika diberikan $x, y \in R^n$ sedemikian sehingga $x \geq y$ dan $n \in N_{n_0}^+$ maka $f(n, x) \geq f(n, y)$ [4].

Diberikan sistem persamaan diferensial orde pertama sebagai berikut:

$$x(n+1) = f[n, x(n)], x(n_0) = x_0, n \in N_{n_0}^+, \quad (4)$$

dengan $N_{n_0}^+ = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + k, \dots\}$, $n \in N_{n_0}^+$, $x(n) \in R^n$ dan $f: N_{n_0}^+ \times R^n \rightarrow R^n$ kontinu di $x(n)$.

Diberikan fungsi kontinu $\alpha: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dikatakan anggota dari κ jika $\alpha(0) = 0$ dengan α fungsi monoton tegas dan $\alpha \in \kappa$ dengan κ merupakan himpunan dari fungsi [4]. Diberikan sebuah fungsi Lyapunov sebagai berikut:

$v(n, x(n))$ dengan $v: N_{n_0}^+ \times R^n \rightarrow R_+^p$ dan $\Delta v = (n+1, x(n+1)) - v(n, x(n))$ sehingga diperoleh hasil kestabilan dari Persamaan (4) yang diberikan pada teorema berikut:

Teorema 1 [4] Diberikan $v: N_{n_0}^+ \times R^n \rightarrow R_+^p$ merupakan fungsi kontinu di x didefinisikan:

$$v_0(n, x(n)) = \sum_{i=1}^p v_i(n, x(n)).$$

Sedemikian sehingga memenuhi kondisi seperti berikut:

1. $b(|x|) \leq v_0(n, x(n)) \leq a(|x|)$ untuk $a, b \in \kappa$,
2. $\Delta v(n, x(n)) \leq w(n, v(n, x(n)))$ untuk $n \in N_{n_0}^+, x(n) \in R^n$ dengan $w: N_{n_0}^+ \times R_+^p \rightarrow R^p$ merupakan fungsi kontinu.

Misalkan e_k menotasikan vektor *firing*. Jika *firing* hanya dilakukan terhadap transisi t_j pada saat ke- k aka vektor *firing* tersebut adalah sebagai berikut $e_k = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots]^T$ dimana elemen ke- j bernilai 1 dan yang lainnya bernilai 0. Persamaan matriks yang menunjukkan perilaku dinamik yang direpresentasikan dengan PN adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{M} + \mathbf{Q}e, \text{ dengan } e = \sum_{k=0}^{d-1} e_k. \quad (5)$$

Matriks \mathbf{M}_k merupakan penanda atau letak token pada *place* p_i pada saat ke- k dan \mathbf{Q} merupakan matriks *incidence* dari PN. Sistem yang dimodelkan dengan PN mempunyai keadaan $\mathbf{M}_k = [M_k(p_1), M_k(p_2), \dots, M_k(p_m)]^T$. Selanjutnya dimisalkan suatu fungsi Lyapunov sebagai berikut $v(k, M_k) = \mathbf{M}_k^T \Phi$ dengan Φ merupakan vektor berdimensi m yang nilainya lebih dari atau sama dengan nol (semua elemennya positif) [5].

Proposisi 2 [4] PN dikatakan stabil jika terdapat m vektor dengan semua elemennya positif. Dengan kata lain terdapat vektor Φ yang stricly positif (semua elemennya positif) sedemikian sehingga berlaku

$$\Delta v = e^T \mathbf{Q}^T \Phi \leq 0.$$

Bukti

Dimisalkan fungsi Lyapunov $v(M) = \mathbf{M}^T \Phi$ dengan \mathbf{M}^T merupakan suatu penanda pada PN yang berupa matriks kolom yang di transposekan dan Φ merupakan sebuah vektor m . Jika v memenuhi semua kondisi dari Teorema 1 dan terdapat setidaknya sebuah vektor Φ yang semua anggotanya bernilai positif sedemikian sehingga terbukti bahwa Proposisi 2 terpenuhi ■.

Proposisi 3 [4] *PN dikatakan dapat distabilkan apabila terdapat suatu firing terhadap transisi yang mempunyai vektor firing transisi e sedemikian sehingga berlaku*

$$\Delta v = \mathbf{Q}e \leq 0.$$

Bukti

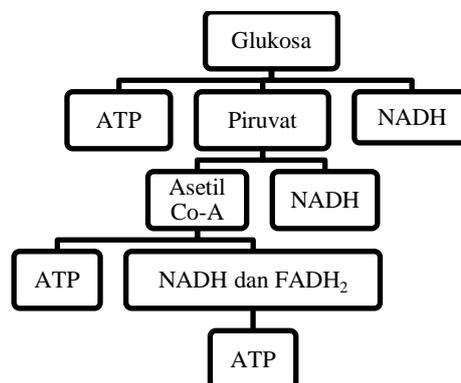
Didefinisikan vektor fungsi Lyapunov $v(M) = [v_1(M), v_2(M), \dots, v_m(M)]^T$ dengan $v_i(M) = M(p_i)$, $1 \leq i \leq m$, dengan M merupakan suatu penanda pada PN yang berupa matriks kolom dan Φ merupakan sebuah vektor m , terbukti semua kondisi dari Teorema 1 terpenuhi dan terdapat satu kondisi yang dapat distabilkan jika terdapat sebuah urutan transisi yang dapat di *fire* dengan menghitung transisi vektor u sedemikian sehingga Proposisi 3 terpenuhi ■.

PEMODELAN SISTEM RESPIRASI SELULAR

Pada kasus ini digambarkan sebuah alur atau tahapan dari proses respirasi seluler dari tahap perubahan Glukosa hingga menjadi Adenosin trifosfat (ATP). ATP yang dihasilkan menjadi sebuah energi pada makhluk hidup. Gambar 1 merupakan alur dari proses respirasi sel dari glukosa menjadi ATP.

Dari alur tersebut akan dibentuk suatu *place* yang merupakan suatu kejadian dari sebuah sistem dan transisi sehingga dapat dirangkai kedalam bentuk alur PN.

Dari alur pada Gambar 1 dapat ditentukan *place* sebagai berikut:



Gambar 1 Alur proses respirasi sel. Alur ini merupakan proses perombakan molekul glukosa menjadi ATP.

p_1 : Glukosa memasuki sel dan difosforilasi oleh enzim

p_2 : Protein yang ada didalam membrane dalam mitokondria mentranslokasi piruvat dari sitosol ke dalam matriks mitokondria

p_3 : NADH dari hasil glikolisis mentranspor electron ke rantai transport elektron

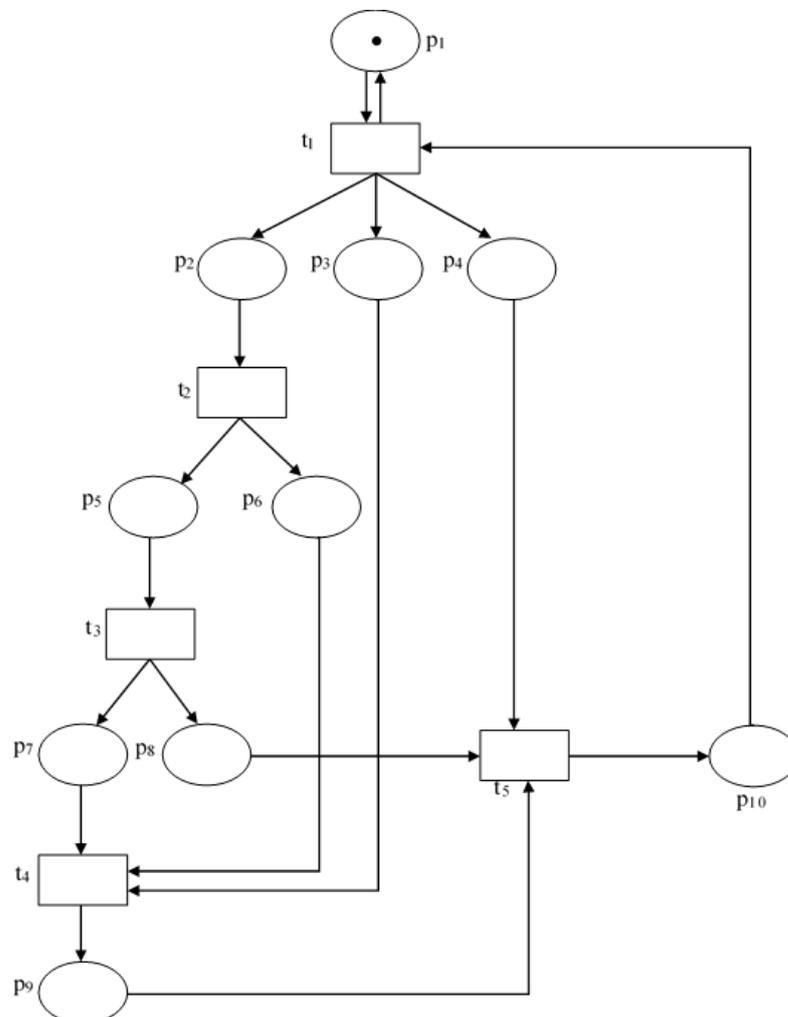
p_4 : ATP dari hasil glikolisis tertampung untuk fosforilasi tingkat lanjut

p_5 : Asetil Co-A yang dihasilkan pada proses dekarboksilasi oksidatif siap memberikan asetatnya kedalam siklus krebs

- p_6 : NADH dari hasil dekarboksilasi oksidatif mentranspor electron kerantai transport elektron
- p_7 : $FADH_2$ dan NADH membolak-balik muatannya yang berupa elektron berenergi tinggi kerantai transport electron
- p_8 : ATP dari proses siklus krebs tertampung untuk fosforilasi tingkat lanjut
- p_9 : ATP dari proses transport electron tertampung untuk fosforilasi tingkat lanjut
- p_{10} : Energi yang dihasilkan dari proses respirasi sel untuk setiap molekul glukosa

Setelah menentukan *place* dari alur respirasi sel, selanjutnya ditentukan transisi yang mana merupakan syarat terjadinya suatu kejadian (*place*) agar dapat dibentuk alur PN.

- t_1 : Proses glikolisis terjadi disitosol (diluar mitokondria) menghasilkan ATP, NADH, dan piruvat
- t_2 : proses dekarboksilasi oksidatif terjadi mengubah piruvat menjadi asetil Co-A dan NADH
- t_3 : Proses siklus krebs mengubah asetil Co-A menjadi ATP, NADH, dan $FADH_2$
- t_4 : proses transport electron terjadi mengubah NADH dan $FADH_2$ dari proses glikolisis sampai ke siklus krebs sehingga menjadi ATP
- t_5 : ATP yang terkumpul diakumulasikan sebagai energy kimiawi yang tersimpan di dalam glukosa.
- Dari *place* dan transisi yang sudah ditentukan, dibentuk sebuah alur PN seperti Gambar 2.



Gambar 2 Jalur PN pada proses respirasi sel. Jalur ini merupakan tahapan respirasi sel yang telah diubah ke dalam bentuk PN dalam proses mengubah glukosa menjadi ATP.

Matriks *incidence* merupakan hasil dari pengurangan matriks *incidence* ke belakang dari matriks *incidence* ke depan sehingga didapat matriks *Incidence* sebagai berikut:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_f - \mathbf{Q}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pengujian kestabilan dari sistem respirasi sel menggunakan Proposisi 2. Karena e^T pasti bernilai tak negatif, maka cukup dibuktikan dengan $\mathbf{Q}^T \Phi \leq 0$.

Berdasarkan Gambar 2 diperoleh:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ maka } \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dimisalkan $\Phi = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3 \ \Phi_4 \ \Phi_5 \ \Phi_6 \ \Phi_7 \ \Phi_8 \ \Phi_9 \ \Phi_{10}]$ menggunakan Proposisi 2, didapat persamaan $\mathbf{Q}^T \Phi \leq 0$ sehingga didapat hasil sebagai berikut:

$$\mathbf{Q}^T \Phi \leq 0,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \\ \Phi_7 \\ \Phi_8 \\ \Phi_9 \\ \Phi_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Akibatnya diperoleh

$$\begin{aligned} \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 - \Phi_{10} &= 0 \\ -\Phi_2 + \Phi_5 + \Phi_6 &= 0 \\ -\Phi_5 + \Phi_7 + \Phi_8 &= 0 \\ -\Phi_3 - \Phi_6 - \Phi_7 + \Phi_9 &= 0 \\ -\Phi_4 - \Phi_8 - \Phi_9 + \Phi_{10} &= 0. \end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan tersebut, dapat diubah menjadi:

$$\Phi_{10} = \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4$$

$$\Phi_2 = \Phi_5 + \Phi_6$$

$$\Phi_5 = \Phi_7 + \Phi_8$$

$$\Phi_9 = \Phi_3 + \Phi_6 + \Phi_7$$

$$\Phi_{10} = \Phi_4 + \Phi_8 + \Phi_9.$$

Kemudian dapat diketahui bahwa persamaan tersebut memiliki banyak solusi. Jika dimisalkan

$\Phi_1 = a, \Phi_2 = b, \Phi_3 = c, \Phi_4 = d, \Phi_5 = e, \Phi_6 = f, \Phi_7 = g, \Phi_8 = h, \Phi_9 = i, \Phi_{10} = j$ dengan a, b, \dots, j merupakan sebarang bilangan real, sehingga didapat vektor $\Phi = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3 \ \Phi_4 \ \Phi_5 \ \Phi_6 \ \Phi_7 \ \Phi_8 \ \Phi_9 \ \Phi_{10}]^T$,

dengan kata lain $\Phi = [a \ e+f \ i-f-g \ j-h-i \ g+h \ b-e \ e-h \ e-g \ c+f+g \ d+h+i]^T$.

Jelas bahwa terdapat elemen Φ yang *strictly positive* karena terdapat $a=1, c=6, f=5, g=9, h=13$ dan $j=35$, sehingga $i=c+f+g=6+5+9=20, e=g+h=9+13=22, b=e+f=22+5=27$, dan $d=j-h-i=35-13-20=2$.

Dengan demikian terbukti bahwa terdapat elemen Φ yang *strictly positive* yang memenuhi Proposisi 2. Dari uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa sistem respirasi sel dikatakan stabil. Hal ini berarti respirasi yang terjadi didalam tubuh manusia berupa proses perombakan molekul organik kompleks yang kaya akan energi potensial menjadi produk limbah berenergi lebih rendah pada tingkat seluler dapat dinyatakan stabil melalui tahapan-tahapan respirasi sel tanpa adanya pengaruh dari luar ataupun dari dalam. Akibatnya proses respirasi sel dapat menghasilkan ATP atau energi yang sesuai dengan banyaknya molekul glukosa yang terdapat didalam tubuh manusia.

PENUTUP

Dari pembahasan tersebut dapat disimpulkan bahwa langkah-langkah yang diperlukan untuk membentuk suatu alur PN diantaranya adalah sebagai berikut:

1. Menentukan *place* dan transisi dimana transisi merupakan peristiwa kejadian dan *place* merupakan kondisi dimana kejadian dapat terjadi.
2. PN digambarkan dengan graph berarah. *Place* dilambangkan dengan lingkaran dan transisi dilambangkan dengan persegi panjang. Penghubung antara *place* dan transisi atau sebaliknya disebut *arc*. *Arc* dilambangkan dengan tanda panah. Token pada PN dilambangkan dengan *dot* (\square) yang terdapat didalam *place*, token disini menyatakan kondisi pada suatu sistem yang dimodelkan.

Sistem respirasi sel yang dimodelkan dengan kestabilan Lyapunov adalah sebagai berikut:

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}\}.$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}.$$

$$A = \left\{ (p_1, t_1), (p_2, t_2), (p_3, t_4), (p_4, t_5), (p_5, t_3), (p_6, t_4), (p_7, t_4), (p_8, t_5), (p_9, t_5), (p_{10}, t_1), (t_1, p_1), (t_1, p_2), (t_1, p_3), (t_1, p_4), (t_2, p_5), (t_2, p_6), (t_3, p_7), (t_3, p_8), (t_4, p_9), (t_5, p_{10}) \right\}.$$

$$w(p_1, t_1) = 1, w(p_2, t_2) = 1, w(p_3, t_4) = 1, w(p_4, t_5) = 1, w(p_5, t_3) = 1$$

$$w(p_6, t_4) = 1, w(p_7, t_4) = 1, w(p_8, t_5) = 1, w(p_9, t_5) = 1, w(p_{10}, t_1) = 1$$

$$w(t_1, p_1) = 1, w(t_1, p_2) = 1, w(t_1, p_3) = 1, w(t_1, p_4) = 1, w(t_2, p_5) = 1$$

$$w(t_2, p_6) = 1, w(t_3, p_7) = 1, w(t_3, p_8) = 1, w(t_4, p_9) = 1, w(t_5, p_{10}) = 1.$$

$$\mathbf{M}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Dari model PN tersebut, didapat hasil akhir sebagai berikut:

$$\mathbf{Q}^T \Phi \leq 0$$

$$\Phi = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3 \ \Phi_4 \ \Phi_5 \ \Phi_6 \ \Phi_7 \ \Phi_8 \ \Phi_9 \ \Phi_{10}]^T$$

$$\Phi = [a \ e+f \ i-f-g \ j-h-i \ g+h \ b-e \ e-h \ e-g \ c+f+g \ d+h+i]^T.$$

Hasil tersebut menghasilkan vektor Φ yang elemennya strictly positive sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem respirasi sel dalam proses perombakan molekul glukosa yang terjadi di dalam tubuh manusia tersebut adalah stabil.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Adzkiya, D. *Membangun Model Petri Net Lampu Lalu-lintas dan Simulasinya*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh November; 2008
- [2] Campbell, N.A., Reece, J.B. dan Mitchell, L.G. *Biologi Edisi Kelima Jilid 1*. Jakarta: Erlangga; 2000
- [3] Cassandras, C.G. dan Lafortune, S. *Introduction to Discrete Event System Second Edition*. Boston: Springer; 2008
- [4] Königsberg, Z.R. The Stability Problem for Discrete Event Dynamical Using Lyapunov-Max-Plus Algebra Approach. *Int. Math. F.* 2011; 6(11):541-556.
- [5] Smith, A. Lyapunov Stability Analysis of Initiation Process in DNA (Deoxyribonucleid Acid) Translation Using Petri Net. *Edu. Fac.* 2016.
- [6] Sya'diah, Z. Lyapunov Max Plus Algebra Stability in Predator Prey Systems Modeled with Timed Petri Net. *J. Tech. Sci.* 2011; 22(3):117-121.

MELINDA MARETA SARI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
aretartha39@gmail.com

MARIATUL KIFTIAH : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

YUNDARI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
yundari@math.untan.ac.id