Buletin Ilmiah Math, Stat, dan Terapannya (Bimaster)
Volume 08, No. 1 (2019), hal 29-34.

BILANGAN TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF *PLANTER* DAN GRAF GURITA

Yupensius Joko, Helmi, Fransiskus Fran

INTISARI

Pewarnaan pelangi yaitu pewarnaan sisi pada G yang menyebabkan graf G terhubung pelangi dengan sisi yang bertetangga dapat memiliki warna yang sama. Bilangan terhubung pelangi pada graf G, dinotasikan $rc(G)$ yaitu bilangan bulat positif terkecil k sehingga G mempunyai suatu pewarnaan$-k$ pelangi. Berikut ini membahas tentang bilangan $rc(G)$ pada graf planter dan graf gurita. Graf planter merupakan graf yang dibentuk dari penjumlahan graf kipas dan graf cycle. Graf gurita O_n merupakan graf yang dibentuk dari penjumlahan graf kipas dan graf bintang. Kemudian diperoleh bahwa rc pada graf planter adalah $c(R_3) = 2$, $rc(R_4) = 3$, $rc(R_{n\geq 5}) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$ dan rc pada graf gurita adalah $rc(O_2) = 3, rc(O_{n\geq 3}) = n$.

Kata Kunci *: bilangan terhubung pelangi, graf planter R_n, graf gurita O_n.*

PENDAHULUAN

Pada tahun 2008, Chartrand dkk memperkenalkan konsep keterhubungan pelangi yang merupakan pengembangan dari pewarnaan sisi. Misalkan graf G adalah graf terhubung tak trivial dan k adalah sebuah bilangan bulat positif. Didefinisikan pewarnaan sisi $c: E(G) \to \{1,2, \dots, k\}$, sehingga dua sisi yang bertetangga dapat memiliki warna yang sama. Suatu lintasan dari titik u ke v disebut lintasan pelangi jika tidak ada dua sisi pada lintasan tersebut memiliki warna yang sama. Graf G dengan pewarnaan sisi c disebut terhubung pelangi jika untuk setiap pasang titik $u, v \in G$ terdapat lintasan pelangi. Pewarnaan sisi pada G dikatakan pewarnaan pelangi jika pewarnaan itu menyebabkan graf G terhubung pelangi. Sedangkan pewarnaan pelangi yang menggunakan k warna disebut pewarnaan$-k$ pelangi. Bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga terdapat pewarnaan$-k$ pelangi pada G terhubung disebut bilangan terhubung pelangi pada G, dinotasikan dengan $rc(G)$ [2].

Pewarnaan pelangi memiliki sejumlah aplikasi salah satunya dibidang komunikasi. Selain aplikasinya, masalah yang banyak dikaji terkait pewarnaan pelangi adalah menentukan bilangan terhubung pelangi pada beberapa kelas graf seperti yang dilakukan Syafrizal yang berhasil menentukan bilangan terhubung pelangi pada graf kipas dan graf matahari[3]. Terkait hal tersebut, maka dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai objek graf lainnya seperti graf *cycle*, graf kipas, graf bintang, graf *planter* dan graf gurita.

Bilangan terhubung pelangi pada beberapa graf tersebut dapat ditentukan dengan menetapkan nilai diameter dari graf-graf tersebut. Selanjutnya menerapkan pewarnaan pelangi dari masing-masing graf. Berdasarkan pewarnaan tersebut diperoleh pola bilangan terhubung pelangi pada masing-masing graf dengan nilai $diam(G) \leq rc(G) \leq m$, untuk $diam(G)$ menyatakan diameter dari G dan m menyatakan ukuran dari G. Selanjutnya dari pola bilangan terhubung pelangi terbentuklah bilangan terhubung pelangi pada suatu graf.

PEWARNAAN GRAF

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik [4]. Pewarnaan graf G merupakan pemetaan dari himpunan titik atau himpunan sisi pada himpunan warna seperti $\{\text{merah}, \text{biru}, \cdots, \text{hijau}\}$ atau himpunan bilangan asli $\{1,2, \cdots, k\}$. Adapun definisi tiap-tiap pewarnaan pada titik dan sisi adalah sebagai berikut.

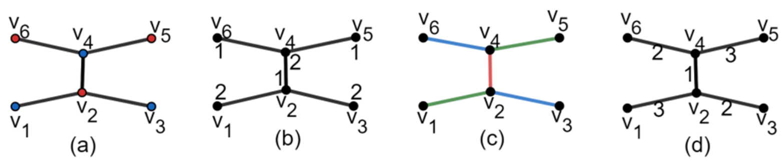
Definisi 1 [2] *Pewarnaan titik adalah pemberian warna titik-titik di dalam graf sedemikian sehingga setiap dua titik bertetangga memiliki warna berbeda.*

Selain definisi tentang pewarnaan graf pada titik, selanjutnya definisi tentang pewarnaan graf pada sisi sebagai berikut.

Definisi 2 [2] *Pewarnaan sisi adalah suatu cara memberi warna berbeda pada sisi yang bertetangga sehingga tidak ada dua sisi yang bertetangga mempunyai warna sama.*

Kemudian dari Definisi 1 dan Definisi 2, diberikan contoh graf untuk pewarnaan titik dan pewarnaan sisi, sebagai berikut.

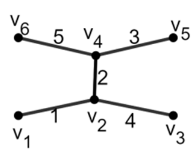
Contoh 3 Diberikan sebuah graf $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\})$ dengan pewarnaan titik dan pewarnaan sisi seperti Gambar 1 berikut.



Gambar 1 Pewarnaan titik dan sisi G

KETERHUBUNGAN PELANGI PADA BEBERAPA GRAF

Bilangan terhubung pelangi pada graf merupakan sebuah bilangan bulat positif, dengan pewarnaan sisi $c: E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$, sehingga dua sisi yang bertetangga dapat memiliki warna yang sama. Sebagai ilustrasi keterhubungan pelangi diperlihatkan seperti Gambar 2 berikut.



Gambar 2 Pewarnaan pelangi G

Berikut bilangan terhubung pelangi pada graf *cycle*, graf kipas dan graf bintang yang telah dilakukan penelitian sebelumnya.

Teorema 4 [1] *Graf G adalah graf cycle C_n dengan n titik yang setiap titik berderajat 2, $n \in \mathbb{N}$. Bilangan terhubung pelangi pada graf G adalah*:

$$rc(C_n) = \begin{cases} 1, \text{jika } n = 3 \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \text{jika } n \geq 4 \end{cases}$$

Teorema 5 [3] *Graf G adalah graf kipas F_n dengan $n + 1$ titik dan $2n - 1$ sisi, $n \in \mathbb{N}$. Bilangan terhubung pelangi pada graf G adalah*:

$$rc(F_n) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 2 \\ 2, & \text{jika } 3 \leq n \leq 6 \\ 3, & \text{jika } n \geq 7 \end{cases}$$

Teorema 6 [1] *Misalkan G adalah graf bintang S_n dengan $n + 1$ titik dan n sisi, $n \in \mathbb{N}$. Bilangan terhubung pelangi pada S_n adalah $rc(S_n) = n$ jika $n \geq 2$.*

Menurut Samuel dan Kalaivani graf *planter* merupakan gabungan antara graf kipas dan graf *cyle* [4] sedangkan graf gurita merupakan gabungan antara graf kipas dan graf bintang [5]. Bilangan terhubung pelangi juga dapat diaplikasikan pada graf *planter* dan graf gurita, seperti pada Teorema 7 dan Teorema 8 berikut.

Teorema 7 *Misalkan G adalah graf planter R_n dengan $2n$ titik dan $3n-1$ sisi, $n \in \mathbb{N}$. Bilangan terhubung pelangi pada R_n adalah*:

$$rc(R_n) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n = 3 \\ 3, & \text{jika } n = 4 \\ \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + 2, & \text{jika } n \geq 5 \end{cases}$$

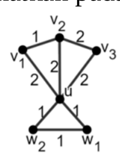
Bukti: Graf *planter* dibentuk dari penjumlahan graf kipas dan graf *cycle* yaitu $R_n = F_n + C_n$, dengan $v_i \in V(F_n), i = 1,2,\cdots,n$ dan $w_i \in V(C_n), i = 1,2,\cdots,n-1$, dengan berbagi satu titik yang sama u dan memiliki $diam(R_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

a. $rc(R_3) = 2$

Diketahui $diam(R_3) = 2$ maka $rc(R_3) \geq 2$. Selanjutnya ditunjukkan $rc(R_3) \leq 2$. Definisikan pewarnaan sisi pelangi $c: E(R_3) \to \{1,2\}$ sebagai berikut:

$$c(v_i, v_{i+1}) = i, i \in \{1,2\}$$
$$c(u, v_i) = 2, i \in \{1,2,3\}$$
$$c(u, w_i) = 1, i \in \{1,2\}$$
$$c(w_1, w_2) = 1$$

Ini menunjukkan $rc(R_3) \leq 2$, karena $rc(R_3) \geq 2$ dan $rc(R_3) \leq 2$ maka terbukti $rc(R_3) = 2$. Ilustrasi fungsi pewarnaan tersebut diperlihatkan pada Gambar 3 sebagai berikut.



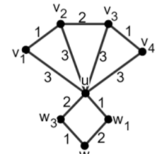
Gambar 3 Pewarnaan pelangi pada R_3

b. $rc(R_4) = 3$

Diketahui $diam(R_4) = 3$ maka $rc(R_4) \geq 3$. Selanjutnya ditunjukkan $rc(R_4) \leq 3$, definisikan pewarnaan sisi pelangi $c: E(R_2) \to \{1,2,3\}$ sebagai berikut:

$$c(v_i, v_{i+1}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \text{ ganjil} \\ 2, & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases}$$
$$c(u, v_i) = 3, i \in \{1,2,\cdots,4\}$$
$$c(u, w_1) = c(w_2, w_3) = 1$$
$$c(u, w_3) = c(w_1, w_2) = 2$$

Ini menunjukkan $rc(R_4) \leq 3$, karena $rc(R_4) \geq 3$ dan $rc(R_4) \leq 3$ maka terbukti $rc(R_4) = 3$. Sebagai ilustrasi fungsi pewarnaan tersebut diperlihatkan pada Gambar 4 sebagai berikut.



Gambar 4 pewarnaan pelangi pada R_4

c. $rc(R_n) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2$ untuk $n \geq 5$

Misalkan terdapat 2 kasus dengan $s = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2$, selanjutnya ditunjukkan $rc(R_n) \leq s$.

i. Kasus yang pertama adalah untuk n ganjil

Misalkan $n = 2k + 1$ untuk bilangan bulat positif $k \geq 2$. Definisikan pewarnaan sisi pelangi $c: E(R_n) \to \{1,2,\cdots,s\}$ sebagai berikut.

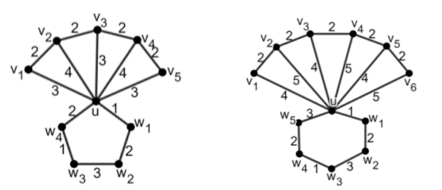
$$c(v_i, v_{i+1}) = 2, i \in \{1,3,\cdots,n-1\}$$
$$c(u, v_i) = \begin{cases} s-1, i \in \{1,3,\cdots,n\} \\ s, i \in \{2,4,\cdots,n-1\} \end{cases}$$
$$c(e_i) = \begin{cases} i, & 1 \leq i \leq k \\ i-k, & k+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

ii. Kasus yang kedua adalah untuk n genap

Misalkan $n = 2k$ untuk bilangan bulat positif $k \geq 3$. Definisikan pewarnaan sisi pelangi $c: E(R_n) \to \{1,2,\cdots,s\}$ sebagai berikut.

$$c(v_i, v_{i+1}) = 2, i \in \{1,3,\cdots,n-1\}$$
$$c(u, v_i) = \begin{cases} s-1, i \in \{1,3,\cdots,n-1\} \\ s, i \in \{2,4,\cdots,n\} \end{cases}$$
$$c(e_i) = \begin{cases} i, & 1 \leq i \leq k+1 \\ i-k-1, & k+2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Ini menunjukkan $rc(R_n) \leq s$. Sebagai ilustrasi fungsi pewarnaan tersebut di perlihatkan pada Gambar 5 sebagai berikut.



Gambar 5 Pewarnaan pelangi pada R_5 dan R_6

Selanjutnya perhatikan jika $rc(R_n) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2$ maka $rc(R_n) = \frac{n+1}{2} + 1$ untuk n ganjil jika $rc(R_n) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2$ maka $rc(R_n) = \frac{n}{2} + 2$ untuk n genap, dan perhatikan juga, karena $diam(R_n) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1$ maka $diam(R_n) = \frac{n-1}{2} + 1$ untuk n ganjil dan $diam(R_n) = \frac{n}{2} + 1$untuk n genap.

i. untuk n genap

Andaikan $rc(R_n) = \frac{n}{2} + 1$ dan $diam = \frac{n}{2} + 1$, akibatnya ada $v_i - v_j$ dengan v_i tidak bertetangga dengan v_j bukan lintasan pelangi. Akibatnya haruslah $rc(R_n) = \frac{n}{2} + 2$.

ii. untuk n ganjil

Andaikan $rc(R_n) = \frac{n+1}{2}$ dan $diam = \frac{n-1}{2} + 1$, akibatnya ada $v_i - v_j$ dengan v_i tidak bertetangga dengan v_j bukan lintasan pelangi. Akibatnya haruslah $rc(R_n) = \frac{n}{2} + 2$.■

Teorema 8 *Misalkan G adalah graf gurita O_n dengan $2n+1$ titik dan $3n-1$ sisi, $n \in \mathbb{N}$. Bilangan terhubung pelangi pada O_n adalah*:

$$rc(O_n) = \begin{cases} 3, jika\ n = 2 \\ n, jika\ n \geq 3 \end{cases}$$

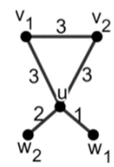
Bukti: Graf gurita dibentuk dari penjumlahan graf kipas dan graf bintang yaitu $O_n = F_n + O_n$, dimana $w_i \in V(S_n)$ dan $v_i \in V(F_n)$ untuk $i = 1,2,\cdots,n$ dengan berbagi satu titik yang sama yaitu titik u serta memiliki $diam(O_n) = 2$.

a. $rc(O_2) = 3$

Ditunjukkan $rc(O_2) \leq 3$, definisikan pewarnaan sisi pelangi $c: E(O_2) \rightarrow \{1,2,3\}$ sebagai berikut.

$$c(v_1, v_2) = 3$$
$$c(u, v_i) = 3, i \in \{1,2\}$$
$$c(u, w_i) = i, i \in \{1,2\}$$

Ini menunjukkan $rc(O_2) \leq 3$, sebagai ilustrasi fungsi pewarnaan tersebut diperlihatkan pada Gambar 6 sebagai berikut.



Gambar 6 Pewarnaan pelangi pada O_2

Selanjutnya andaikan $rc(O_2) = 2$, perhatikan $w_1 - w_2$ dan $w_1 - v_1$ selalu melewati u akibatnya dibutuhkan minimal dua warna berbeda. Misalkan terdapat $c(a) = c(b)$ dengan $a = (u, w_i)$ dan $b = (u, v_i)$ maka suatu lintasan $w_1 - v_1$ bukan lintasan pelangi. Sehingga kontradiksi dengan pengandaian maka haruslah $rc(O_2) = 3$.■

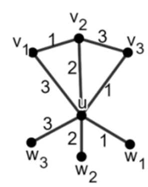
b. $rc(O_{n\geq3}) = n$

i. Untuk $n = 3$

Ditunjukkan $rc(O_3) \leq 3$, definisikan pewarnaan sisi pelangi $c: E(O_n) \rightarrow \{1,2,3\}$ sebagai berikut:

$$c(v_i, v_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{jika } i = 1 \\ 2, \text{jika } i = 2 \end{cases}$$
$$c(u, v_i) = 3 - i + 1, i \in \{1,2,3\}$$
$$c(u, w_i) = i, i \in \{1,2,3\}$$

Ini menunjukkan $rc(O_3) \leq 3$, sebagai ilustrasi fungsi pewarnaan tersebut diperlihatkan pada Gambar 7 sebagai berikut.



Gambar 7 Pewarnaan pelangi pada O_3

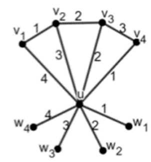
Selanjutnya andaikan $rc(O_3) = 2$, definisikan pewarnaan sisi pelangi $c: E(O_3) \rightarrow \{1,2\}$.Dengan pewarnaan tersebut, untuk lintasan v_i ke v_j dengan $i \neq j$ merupakan lintasan pelangi dan lintasan u ke v_i juga merupakan lintasan pelangi. Selanjutnya lintasan w_i ke w_j merupakan lintasan pelangi sehingga diperoleh $c(u, w_3) = c(u, v_1) = 2$. Dengan kata lain tidak ada lintasan pelangi pada v_1 ke w_n sedemikian sehingga kontradiksi dengan $rc(O_n) = 2$ maka haruslah $rc(O_3) = 3$, jadi terbukti $rc(O_3) = 3$.

ii. Untuk $n \geq 4$

Ditunjukkan $rc(O_n) \leq n$, definisikan pewarnaan sisi pelangi $c: E(O_n) \rightarrow \{1,2, \cdots, n\}$ sebagai berikut:

$$c(v_i, v_{i+1}) = i, i \in \{1,2, \cdots, n-1\}$$
$$c(u, v_i) = n - i + 1, i \in \{1,2, \cdots, n\}$$
$$c(u, w_i) = i, i \in \{1,2, \cdots, n\}$$

Ini menunjukkan $rc(O_n) \leq n$, sebagai ilustrasi fungsi pewarnaan tersebut diperlihatkan pada Gambar 8 sebagai berikut:



Gambar 8 Pewarnaan pelangi pada O_4

Selanjutnya andaikan $rc(O_n) = n - 1$. Perhatikan setiap titik $w_i - w_j$ selalu melewati titik u maka setiap sisi $u - w_i$ harus memiliki warna berbeda. Selanjutnya perhatikan untuk graf O_n bahwa dari titik $u - w_i$ ada n sisi. Akibatnya memerlukan minimal n minimal warna untuk setiap $u - w_i$, dengan kata lain pengandaian salah maka haruslah $rc(O_n) = n$.■

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan, dapat disimpulkan bahwa bilangan terhubung pelangi pada graf *cycle* yaitu $rc(C_3) = 1$, $rc(C_{n\geq4}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, graf kipas yaitu $rc(F_2) = 1$, $rc(F_{3\leq n\leq6}) = 2$, $rc(F_{n\geq7}) = 3$, graf bintang yaitu $rc(S_{n\geq2}) = n$ graf *planter* yaitu $rc(R_3) = 2$, $rc(R_4) = 3$, $rc(R_{n\geq5}) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$, graf gurita yaitu $rc(O_2) = 3$, $rc(O_{n\geq3}) = n$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand G, Johns GL, McKeon, Valley S, Kathleen A, and Zhang P. Rainbow Connection in Graphs. *Math. Bohemica*. 2008; 133: 85-98.
[2] Chartrand, G, and Zhang, P. *Chromatic Graph Theory*. New York: Crc Press Company; 2009.
[3] Syafrizal. Gema Hista M. Lyra Yulianti. Rainbow Connection of Fan and Sun, *Applied Mathematical Sciences*. 2013; 7: 3155-3160.
[4] Munir R., *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika; Ed ke-3, 2010.
[5] Samuel EA, Kalaivani S. Prime Labeling for Some Planter Related Graphs. *Internasional journal of Mathematics research*. 2016; 8:221-231.
[6] ————————. Prime Labeling for Some Octopus Related Graphs. *IOSR Journal of Mathematics*. 12:57-64.

YUPENSIUS JOKO : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
Syuko@student.untan.ac.id
HELMI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
helmi132205@yahoo.co.id
FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
frandly88@gmail.com