GRAF CAYLEY PADA S_n

Marye Okal, Mariatul Kiftiah, Fransiskus Fran

INTISARI

Grup simetri (S_n) adalah suatu grup yang elemen-elemennya merupakan permutasi dari suatu himpunan dengan operasi komposisi fungsi. Grup simetri tersebut dapat divisualisasikan ke dalam bentuk graf yang disebut sebagai graf Cayley. Graf Cayley merupakan suatu graf yang terbentuk dari grup berhingga dengan banyak elemennya sebagai banyaknya simpul dan subhimpunan dari grup yang tidak memuat elemen identitas sebagai penentu adanya sisi pada graf. Setelah pola graf Cayley terbentuk, selanjutnya dienumerasikan untuk menentukan banyaknya pola graf yang saling isomorfik. Kemudian dari pola graf tersebut dapat dienumerasikan untuk menentukan banyaknya segitiga yang berbeda. Pola segitiga tersebut diperoleh dari subgraf di graf Cayley, sehingga diperoleh suatu graf Cayley yang memiliki segitiga, namun terdapat pula graf Cayley yang tidak memiliki segitiga.

Kata Kunci: grup simetri, graf isomorfik, segitiga dasar.

PENDAHULUAN

Grup merupakan suatu himpunan tak kosong dengan operasi biner dan memenuhi sifat tertutup, sifat asosiatif, memiliki elemen identitas, serta setiap elemennya memiliki invers. Salah satu grup yang dibahas adalah grup permutasi atau grup simetri yang biasa dinotasikan dengan S_n . Grup simetri (S_n) adalah suatu grup yang elemen-elemennya merupakan permutasi dengan operasi komposisi fungsi. Grup simetri tersebut diaplikasikan ke dalam bentuk graf. Dengan kata lain, graf tersebut dibentuk berdasarkan ketentuan dari grup simetri dan subhimpunan dari grup simetri yang tidak memuat elemen identitas.

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan simpul dan sisi ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul [1]. Salah satu graf yang dapat dibentuk dengan gabungan antara graf dan grup adalah graf Cayley. Graf Cayley diperkenalkan oleh seorang ilmuwan bernama Arthur Cayley pada tahun 1878 [2]. Graf Cayley merupakan suatu graf yang dibentuk berdasarkan grup berhingga misalkan G dan subhimpunan yang dinotasikan S dari G yang tidak memuat elemen identitas sebagai penentu adanya sisi pada graf. Graf Cayley dinotasikan dengan $Cay(G, S)$.

Setiap elemen pada S_n akan menjadi simpul di graf $Cay(S_n, S)$. Oleh karena itu $|V(Cay(S_n, S))| = |S_n|$. Simpul-simpul dari graf Cayley merupakan elemen-elemen di grup S_n yang berhingga. Sedangkan untuk subhimpunan dari grup S_n yang tidak memuat elemen identitas sebagai penentu adanya sisi pada graf Cayley. Adanya sisi pada graf Cayley jika hanya jika $g^{-1}h \in S$ dengan $I_{S_n} \notin S$. Jika $g^{-1}h \notin S$ maka antara simpul ke simpul tersebut tidak terhubung. Setelah diperoleh pola graf, selanjutnya dienumerasikan pola graf Cayley sehingga dapat diketahui banyaknya pola graf Cayley yang saling isomorfik. Kemudian dari pola graf Cayley juga dapat terbentuk segitiga yang merupakan subgraf dari graf Cayley. Oleh karena itu, dienumerasikan pola graf Cayley untuk mengetahui banyaknya segitiga yang terbentuk dari suatu graf Cayley.

GRUP SIMETRI

Grup simetri atau grup permutasi merupakan grup berhingga yang memuat elemen berupa himpunan permutasi. Berikut ini definisi dari grup permutasi.

Definisi 1 [3] *Suatu permutasi dari himpunan X adalah fungsi bijektif dari X ke dirinya sendiri.*

Definisi 2 [3] *Setiap permutasi dari himpunan X dengan operasi komposisi fungsi yang dinotasikan S_X disebut grup simetri terhadap X . Untuk $X = \{1, 2, \dots, n\}$, S_X ditulis S_n dan ini disebut grup simetri terhadap n dengan banyaknya elemen adalah $n!$ elemen.*

Contoh 3 Misalkan unsur $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ merupakan suatu unsur di S_4 . Notasi α diperoleh dari notasi berikut $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, yakni $\alpha : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ dengan

$$\alpha(1) = 4, \alpha(2) = 1, \alpha(3) = 2, \text{ dan } \alpha(4) = 3$$

Selain menggunakan matriks, permutasi dapat ditulis dalam bentuk notasi *cycle*. Seperti pada permutasi di S_6 berikut $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, permutasi ini biasa ditampilkan ke dalam bentuk *cycle*. Setiap *cycle* ditulis sebagai barisan bilangan $(a_1 a_2 a_3 a_4)$. Notasi ini menunjukkan bahwa permutasi memetakan $a_1 \rightarrow a_2, a_2 \rightarrow a_3, a_3 \rightarrow a_4, a_4 \rightarrow a_1$. Dengan notasi ini permutasi α dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\alpha = (1 \ 2)(3 \ 4 \ 6)(5)$$

Lebih ringkasnya setiap *cycle* yang memetakan suatu bilangan ke dirinya sendiri dihilangkan sehingga α dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\alpha = (1 \ 2)(3 \ 4 \ 6)$$

Dapat dilihat bahwa *cycle* $(1 \ 2)$ dan $(3 \ 4 \ 6)$ tidak mengandung angka yang sama.

GRAF

Graf merupakan objek dasar pelajaran dalam teori graf. Dalam bahasa sehari-hari, graf adalah himpunan dari objek yang dinamakan simpul atau titik yang dihubungkan oleh himpunan sisi. Berikut ini definisi graf sebagai berikut.

Definisi 4 [1] *Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan simpul dan sisi ditulis dengan notasi (V, E) . Dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (vertices atau node) dan E adalah himpunan sisi (edges atau arcs) yang menghubungkan sepasang simpul.*

Graf yang hanya mempunyai satu buah simpul tanpa memiliki sisi dinamakan graf trivial. Graf yang tidak mempunyai sisi dinamakan graf kosong (*null graph*). Sisi ganda merupakan dua simpul yang dihubungkan lebih dari satu sisi. Graf yang mengandung sisi ganda disebut graf ganda (*multigraph*). Berdasarkan arahnya pada sisi, secara umum graf dibedakan menjadi graf tidak berarah (*undirected graph*) dan graf berarah (*directed graph* atau *digraph*). Graf lengkap merupakan graf yang setiap simpulnya saling terhubung satu dengan lainnya, sedangkan graf tidak lengkap terjadi jika ada simpul yang tidak terhubung ke simpul lainnya.

Graf isomorfik sering dibahas dalam pelabelan simpul. Misalkan ada dua buah graf, graf pertama diberi label $\{1, 2, 3, 4\}$. Kemudian graf kedua diberi label $\{a, b, c, d\}$. Masing-masing simpul berderajat tiga tetapi kedua graf tersebut berbeda bentuknya. Meskipun kedua graf tersebut berbeda bentuknya dengan pelabelan simpul yang berbeda pula namun sebenarnya keduanya merupakan graf yang sama. Berikut ini definisi graf isomorfik.

Definisi 5 [1] Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul ke simpul dan antara sisi ke sisi sedemikian sehingga jika sisi e bersisian dengan u dan v di G_1 , maka sisi e' yang berkorespondensi di G_2 juga harus bersisian dengan simpul u' dan v' di G_2 .

Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama kecuali penamaan simpul dan sisinya berbeda. Berikut ini contoh gambar graf isomorfik.

Gambar 1 G_1 isomorfik dengan G_2 , tetapi G_2 tidak isomorfik dengan G_3

Dilihat dari Gambar 1, diketahui bahwa untuk graf G_1 isomorfik dengan graf G_2 karena walaupun berbeda bentuk namun mempunyai banyak simpul dan sisinya sama. Sedangkan untuk G_1 dan G_3 tidak isomorfik dengan G_3 karena terdapat banyak sisi pada simpulnya yang tidak sama.

GRAF CAYLEY

Graf Cayley pertama kali diperkenalkan oleh Arthur Cayley pada tahun 1878 untuk menggambarkan suatu grup ke dalam bentuk graf. Berikut ini definisi tentang graf Cayley.

Definisi 6 [2] Diberikan suatu grup berhingga G dan subhimpunan S dari G selain elemen identitas yang didefinisikan sebagai graf $\text{Cay}(G, S)$ sedemikian sehingga.

- Untuk setiap elemen di G merupakan himpunan simpul dari $\text{Cay}(G, S)$ sehingga banyaknya elemen di G sama dengan banyaknya simpul pada graf $\text{Cay}(G, S)$
- Diberikan (g, h) merupakan sisi atau edges di graf Cayley jika dan hanya jika $g^{-1}h \in S$ atau $hg^{-1} \in S$ dengan $I_G \notin S$.

Tidak adanya elemen identitas pada S mengakibatkan graf $\text{Cay}(G, S)$ tidak memuat loop.

Contoh 7 Diberikan grup S_3 dengan $S = \{(12), (13), (23)\}$ yang merupakan subhimpunan dari S_3 . Berikut ini akan digambar pola graf $\text{Cay}(S_3, S)$

Penyelesaian:

Diketahui bahwa himpunan dari $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ dan subhimpunan $S = \{(12), (13), (23)\}$. Berikut ini gambar graf $\text{Cay}(S_3, S)$ yang di peroleh sebagai berikut.

Gambar 2 Graf $\text{Cay}(S_3, S)$ dengan $S = \{(12), (13), (23)\}$

Graf Cayley juga dapat di bentuk sebagai graf yang berarah. Berikut ini definisi dari graf Cayley berarah sebagai berikut.

Definisi 8 [4] Graf Cayley berarah dinotasikan dengan $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$ sebagai graf berarah yang dibentuk dari suatu grup berhingga $(G, *)$ dengan himpunan simpul $V = G$ dan himpunan sisi berarah $E = \{(g, gs) : g \in G, s \in S\}$.

Untuk g_1 dan g_2 di G , terdapat sisi berarah dari g_1 dan g_2 jika dan hanya jika $g_1s = g_2$ dengan $s \in S$. Dengan kata lain $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$ diperoleh dari graf $\text{Cay}(G, S)$ dengan memberi arah pada setiap sisinya.

Contoh 9 Berikut ini gambar pola graf $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$ dari grup S_3 dengan $S = \{(12), (123)\}$ sebagai berikut.

Penyelesaian:

Diketahui bahwa himpunan dari $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ dan subhimpunan $S = \{(12), (123)\}$. Berikut ini gambar graf $\overrightarrow{\text{Cay}}(S_3, S)$ adalah.

Gambar 3 Graf $\overrightarrow{\text{Cay}}(S_3, S)$ dengan $S = \{(12), (123)\}$

ENUMERASI PADA GRAF CAYLEY TERHADAP S_n

Salah satu permasalahan pada teori graf adalah tentang graf isomorfik. Diberikan grup G dan S subhimpunan dari grup G dengan $S = S^{-1}$ dengan $I_G \notin S$, maka grup G dan subhimpunan S dari G adalah graf Cayley. Berikut ini teorema tentang banyaknya graf Cayley yang isomorfik terhadap grup S_n .

Teorema 10 [5] Jika $|S_k|$ menyatakan banyaknya pola graf $\text{Cay}(S_n, S)$ dan $|S| = k$, maka

$$|S_k| = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{\gamma(S_n)}{k-2m} \left(\left\lfloor \frac{n! - 1 - \gamma(S_n)}{2} \right\rfloor \right) \text{ dengan } \gamma(S_n) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k! 2^k (n-2k)!}$$

dan $\lfloor x \rfloor$ merupakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari sama dengan x .

Contoh 11 Diberikan graf $\text{Cay}(S_4, S)$ dari grup simetri S_4 . Kemudian dicari banyaknya graf yang isomorfik jika $k = 1$.

Penyelesaian:

Diketahui bahwa $n = 4$, maka akan dicari nilai $\gamma(S_4)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \gamma(S_4) &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{4}{2} \rfloor} \frac{4!}{k! 2^k (4-2k)!} \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{4}{2} \rfloor} \frac{4!}{k! 2^k (4-2k)!} \\ &= \frac{4!}{1! 2^1 (4-2(1))!} + \frac{4!}{2! 2^2 (4-2(2))!} = 9 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai $\gamma(S_4) = 9$, selanjutnya dicari banyaknya graf $\text{Cay}(S_4, S)$ untuk $k = 1$ sebagai berikut.

$$|S_k| = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{\gamma(S_4)}{k-2m} \left(\left\lfloor \frac{4! - 1 - \gamma(S_4)}{2} \right\rfloor \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} \binom{9}{k-2m} \binom{\lfloor \frac{4!-1-9}{2} \rfloor}{m} \\
&= \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} \binom{9}{1-2m} \binom{7}{m} = \binom{9}{1} \binom{7}{0} = 9
\end{aligned}$$

Jadi, didapat banyaknya graf $Cay(S_4, S)$ yang isomorfik jika $k = 1$ adalah 9 graf. Contoh $k = 1$, yaitu $S_A = \{(12)\}$, $S_B = \{(13)\}$, $S_C = \{(14)\}$, $S_D = \{(23)\}$, $S_E = \{(24)\}$, $S_F = \{(34)\}$, $S_G = \{(14)(23)\}$, $S_H = \{(13)(24)\}$ dan $S_I = \{(12)(34)\}$. Pada Tabel 1 dapat dilihat banyaknya pola graf $Cay(S_4, S)$ yang isomorfik.

Tabel 1 Banyaknya graf pada graf $Cay(S_4, S)$

No.	k	$ S_k $
1.	0	1
2.	1	9
3.	2	43
4.	3	147
5.	4	399
6.	5	903
7.	6	1.757
8.	7	2.997
9.	8	4.538
10.	9	6.154
11.	10	7.518
12.	11	8.302
13.	12	8.302
14.	13	7.518
15.	14	6.154
16.	15	4.538
17.	16	2.997
18.	17	1.757
19.	18	903
20.	19	399
21.	20	147
22.	21	43
23.	22	9
24.	23	1
Jumlah Total		65.536

Teorema 12 [5] Jika $N(S_n)$ merupakan jumlah graf Cayley terhadap grup S_n , maka

$$N(S_n) = 2 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n!-2}{2}} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{\gamma(S_n)}{k-2m} \binom{\lfloor \frac{n!-1-\gamma(S_n)}{2} \rfloor}{m}$$

$$\text{dengan } \gamma(S_n) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k!2^k(n-2k)!}$$

Contoh 13 Berikut ini dicari jumlah keseluruhan graf $\text{Cay}(S_4, S)$ yang isomorfik.

Penyelesaian:

Diketahui bahwa $n = 4$, maka

$$\begin{aligned} N(S_n) &= 2 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n!-2}{2}} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{\gamma(S_n)}{k-2m} \binom{\lfloor \frac{n!-1-\gamma(S_n)}{2} \rfloor}{m} \\ &= 2 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{4!-2}{2}} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{9}{k-2m} \binom{\lfloor \frac{4!-1-9}{2} \rfloor}{m} \\ &= 2 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{4!-2}{2}} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{9}{k-2m} \binom{7}{m} \\ &= 2 + 2 \sum_{k=1}^{11} \binom{9}{k-2(0)} \binom{7}{0} + \binom{9}{k-2(1)} \binom{7}{1} + \dots + \binom{9}{k-2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{7}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \\ &= 2 + 2(32.767) = 65.536 \end{aligned}$$

Jadi diperoleh jumlah keseluruhan graf $\text{Cay}(S_4, S)$ adalah 65.536.

ENUMERASI SEGITIGA PADA GRAF CAYLEY

Diberikan suatu graf $G = (V, E)$ dan $G_1 = (V_1, E_1)$, G_1 merupakan subgraf dari graf G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$. Pada graf Cayley juga terdapat subgraf dari graf Cayley. Subgraf dari graf G Cayley tersebut dapat membentuk segitiga. Oleh karena itu, dilakukan enumerasi untuk mengetahui banyaknya segitiga yang terbentuk dari suatu graf Cayley.

Definisi 14 [6] Diberikan e sebagai elemen identitas di G , untuk $a, b \in G$ jika terdapat triad (e, a, b) yang membentuk segitiga di $\text{Cay}(G, S)$ maka (e, a, b) disebut segitiga dasar (fundamental triangle).

Diketahui bahwa segitiga dasar pada graf terdiri dari tiga simpul yaitu (e, a, b) sehingga diperoleh banyaknya segitiga dasar yang terdapat pada pola graf Cayley seperti pada Lemma 15 berikut.

Lemma 15 [6] Jika diberikan $a \in S$, maka banyaknya segitiga dasar pada $\text{Cay}(G, S)$ adalah $|S \cap aS|$.

Berdasarkan Lemma 15 terdapat simpul (e, a, b) dan (e, b, a) yang segitiga yang sama. Oleh karena itu, diberikan Lemma 16 tentang banyaknya segitiga dasar yang berbeda, sebagai berikut.

Lemma 16 [6] Banyaknya segitiga dasar (fundamental triangles) yang berbeda di $\text{Cay}(G, S)$ adalah

$$\frac{1}{2} \sum_{a \in S} |S \cap aS|$$

Diketahui bahwa segitiga dasar terdiri dari tiga simpul yaitu (e, a, b) . Selanjutnya terdapat segitiga lainnya yang tidak harus memuat e sebagai simpulnya yaitu berbentuk (a, b, c) . Berikut ini Teorema 17 tentang banyaknya segitiga-segitiga yang berbeda, yaitu.

Teorema 17 [6] Banyaknya segitiga-segitiga berbeda pada $\text{Cay}(G, S)$ adalah

$$\frac{1}{6} |G| \sum_{a \in S} |S \cap aS|$$

Dari Teorema 17, diperoleh Contoh 18 yang membahas tentang banyaknya segitiga-segitiga berbeda, sebagai berikut.

Contoh 18 Berikut ini dicari banyaknya segitiga berbeda pada graf $\text{Cay}(S_4, S)$ dengan $S = \{(34), (142), (124), (1234), (1432), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, adalah

Penyelesaian:

Berikut ini gambar graf $\text{Cay}(S_4, S)$ dengan

$S = \{(34), (142), (124), (1234), (1432), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

Gambar 4 Graf $\text{Cay}(S_4, S)$

Diketahui bahwa

$$\begin{aligned}
 |S \cap (34)S| &= |\{(1234), (124)\}| = 2 \\
 |S \cap (142)S| &= |\{(1432), (124)\}| = 2 \\
 |S \cap (124)S| &= |\{(142), (34)\}| = 2 \\
 |S \cap (1234)S| &= |\{(34), (13)(24), (1432)\}| = 3 \\
 |S \cap (1432)S| &= |\{(142), (13)(24), (1234)\}| = 3 \\
 |S \cap (12)(34)S| &= |\{(14)(23), (13)(24)\}| = 2 \\
 |S \cap (13)(24)S| &= |\{(1234), (12)(34), (14)(23)\}| = 3 \\
 |S \cap (14)(23)S| &= |\{(13)(24), (12)(34)\}| = 2
 \end{aligned}$$

Maka banyaknya segitiga berbeda pada graf $\text{Cay}(S_4, S)$, adalah

$$\frac{1}{6} |S_4| \sum_{a \in S} |S \cap aS| = \frac{24}{6} (2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 2 + 3 + 2) = 76$$

Selain graf yang memiliki segitiga terdapat pula graf Cayley yang tidak memiliki segitiga. Berikut ini akibat dari Teorema 18.

Akibat 19 [6] *Graf $\text{Cay}(G, S)$ tidak memiliki segitiga-segitiga jika dan hanya jika $S \cap aS = \emptyset$ untuk setiap $a \in S$.*

Contoh 20 Berikut ini dicari banyaknya segitiga berbeda pada graf $\text{Cay}(S_4, S)$ dengan $S = \{(24), (34), (12)(34), (14)(23)\}$.

Penyelesaian :

Diketahui bahwa anggota himpunan dari $S = \{(24), (34), (12)(34), (14)(23)\}$ maka $|S \cap aS|$ adalah

$$|S \cap (24)S| = 0, |S \cap (34)S| = 0, |S \cap (12)(34)S| = 0, |S \cap (14)(23)S| = 0$$

dari penyelesaian diatas diketahui bahwa banyaknya segitiga berbeda pada $\text{Cay}(S_4, S)$ adalah sebagai berikut.

$$\frac{1}{6} |S_4| \sum_{a \in S} |S \cap aS| = 0$$

Berikut ini gambar graf $\text{Cay}(S_4, S)$.

Gambar 5 Graf $\text{Cay}(S_4, S)$

Jadi, dari penyelesaian di atas dapat dikatakan bahwa untuk graf $\text{Cay}(S_4, S)$ dengan $S = \{(24), (34), (12)(34), (14)(23)\}$ tidak memiliki segitiga.

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa pola graf Cayley terbentuk berdasarkan suatu grup S_n yang berhingga sebagai banyaknya simpul dan subhimpunan S dari grup S_n selain elemen identitas pada S_n adalah penentu adanya sisi di graf Cayley. Kemudian dari pola-pola graf itu dapat juga dienumerasikan sehingga dapat ditentukan banyaknya graf Cayley yang isomorfik terhadap grup S_n . Selanjutnya pada graf Cayley juga dapat terbentuk segitiga yang merupakan subgraf dari graf Cayley. Sehingga diperoleh suatu graf yang memiliki segitiga, namun terdapat pula graf Cayley yang tidak memuat segitiga.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Munir Renaldi. Bandung: *Matematika Diskrit*, Revisi Keempat, Informatika; 2010.
- [2] Gallian J. A. Boston: *Contemporary Abstract Algebra*. Edisi kedelapan, Brooks/Cole Cengage Learning; 2013.
- [3] Rotman Joseph. Providence USA: *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall; 2003.
- [4] Fehr, M, S. Gosselin, dan O.R. Oellermann. The Metric Dimension of Cayley Digraphs, *Discrete Mathematics*. 2006; 306:31-41.
- [5] Adiga, C. dan Haidar Ariamaneh. Some Properties of Cayley Graph on Symmetric Groups S_n . *International Journal of Algebra*. 2012; 6(17):807-813.
- [6] Madahvi, Levaku dan Tekuri Chalapathi. Enumeration of Triangles in Cayley Graph. *Pure and Applied Mathematics Journal*. 2015; 4(3):128-132.

MARYE OKAL	: Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak maryeokal@gmail.com
MARIATUL KIFTIAH	: Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak kiftiahmariatul@math.untan.ac.id
FRANSISKUS FRAN	: Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak frandly88@gmail.com