Buletin Ilmiah Math, Stat, dan Terapannya (Bimaster)
Volume 08, No. 1 (2019), hal 11-20.

GRAF *PERFECT* DAN GRAF *IMPERFECT* PADA BEBERAPA GRAF

Zakiah, Helmi, Fransiskus Fran

INTISARI

Graf perfect adalah suatu graf G dengan setiap H subgraf induksi dari G memenuhi ω(H)=χ(H), sedangkan jika terdapat H sehingga χ(H)>ω(H) maka G disebut graf imperfect. Terdapat beberapa graf yang pada kondisi tertentu merupakan graf perfect dan pada kondisi yang lain merupakan graf imperfect. Pada tulisan ini dibahas tentang graf perfect dan graf imperfect pada beberapa graf yaitu graf sikel (C_n), graf roda (W_n), dan graf helm (H_n). Untuk C_3,C_{2n}, n≥2, W_3,W_{2n}, n≥2, H_3, H_{2n}, n≥2 merupakan graf perfect, sedangkan untuk C($_{2n+1}$), n≥2, $W_{(2n+1)}$,n≥2, dan $H_{(2n+1)}$,n≥2 merupakan graf imperfect.

Kata Kunci *: subgraf induksi, pewarnaan graf, bilangan clique, bilangan kromatik*

PENDAHULUAN

Graf pertama kali digunakan untuk merepresentasikan masalah jembatan Konigsberg pada tahun 1736. Pada tahun tersebut, seorang matematikawan Swiss bernama Euler berhasil memecahkan masalah jembatan Konigsberg dengan memodelkan masalah ini ke dalam bentuk graf. Daratan (titik-titik yang dihubungkan oleh jembatan) dinyatakannya sebagai simpul dan jembatan dinyatakannya sebagai sisi [1].

Salah satu materi pada Teori Graf yang berkembang saat ini adalah tentang pewarnaan graf. Pewarnaan graf adalah suatu pemberian warna pada salah satu elemen-elemennya (simpul, sisi, atau wilayah) sehingga lemen-elemen yang saling bertetangga memiliki warna yang berbeda. Simpul-simpul yang bertetangga dalam suatu graf G dinamakan *clique*, sedangkan jumlah simpul maksimum dari *clique* dinamakan bilangan *clique*, dinotasikan $\omega(G)$. Pewarnaan graf khususnya pewarnaan simpul telah banyak diterapkan dalam berbagai bidang antara lain permasalahan *traffic light*, masalah penjadwalan dan lain-lain. Jumlah warna minimum yang digunakan untuk mewarnai simpul graf disebut bilangan kromatik yang dinotasikan $\chi(G)$. Terdapat satu konsep pada teori graf yang menghubungkan antara bilangan *clique* dan bilangan kromatik yaitu graf *perfect* dan graf *imperfect*. Graf *perfect* adalah suatu graf G dengan setiap H subgraf induksi dari G memenuhi $\omega(H) = \chi(H)$ [2], sedangkan jika terdapat H sehingga $\chi(H) > \omega(H)$ maka G disebut graf *imperfect* [3]. Terdapat beberapa graf yang pada kondisi tertentu merupakan graf *perfect* dan pada kondisi yang lain merupakan graf *imperfect*. Graf tersebut diantaranya adalah graf sikel, graf roda, dan graf helm. Oleh karena itu, penelitian ini membahas tentang bagaimana kondisi graf *perfect* dan graf *imperfect* pada graf sikel, graf roda, dan graf helm.

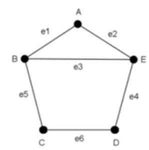
TEORI GRAF

Sebelum membahas tentang graf *perfect* dan graf *imperfect* terlebih dahulu diberikan definisi dari graf, subgraf, subgraf induksi, *clique* dan bilangan *clique*, pewarnaan simpul graf, dan bilangan kromatik yang digunakan sebagai dasar untuk pembahasan selanjutnya.

Definisi 1 [1] *Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (vertices atau node) dan E adalah himpunan sisi (edges atau arcs) yang menghubungkan sepasang simpul.*

Berikut ini diberikan contoh graf G berdasarkan Definisi 1.

Contoh 2 Misalkan diberikan sebuah graf G dengan himpunan simpul $V = \{A, B, C, D, E\}$, dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dengan $e_1 = (A, B)$, $e_2 = (A, E)$, $e_3 = (B, E)$, $e_4 = (D, E)$, $e_5 = (B, C)$, $e_6 = (C, D)$ diperlihatkan seperti Gambar 1 berikut.



Gambar 1 Graf G dengan 5 buah simpul dan 6 buah sisi

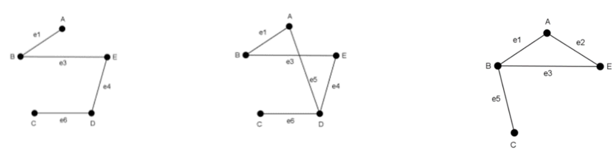
Pembahasan selanjutnya adalah subgraf dan subgraf induksi pada suatu graf G yang dituangkan dalam Definisi 3 dan Definisi 4 berikut.

Definisi 3 [6] *Graf H adalah subgraf dari G jika dan hanya jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.*

Definisi 4 [4] *Subgraf induksi dari G adalah G' jika untuk setiap $x, y \in V'$ berlaku $(x, y) \in E'$ jika dan hanya jika $(x, y) \in E$.*

Berdasarkan Definisi 4 subgraf induksi diperoleh dengan cara menghapus simpul beserta sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Contoh 5 Berikut ini diberikan salah satu contoh subgraf, bukan subgraf, dan salah satu subgraf induksi dari Gambar 1.



$(\boldsymbol{a})$ $(\boldsymbol{b})$ $(\boldsymbol{c})$

Gambar 2 Contoh subgraf pada (a), bukan subgraf pada (b), dan subgraf induksi pada (c)

Jumlah subgraf induksi dari suatu graf G dapat diketahui dengan menggunakan Proposisi yang dituangkan dalam Proposisi 6 berikut.

Proposisi 6 Banyaknya subgraf induksi dari suatu graf G dapat diketahui dengan menggunakan rumus berikut

$$\text{Jumlah subgraf induksi graf } G = 2^n - 1$$

n = jumlah simpul

Pembahasan selanjutnya adalah *clique* dan bilangan *clique* yang dituangkan dalam Definisi 7 berikut.

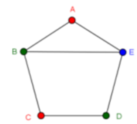
Definisi 7 [5] *Clique dari graf $G = (V, E)$ adalah himpunan $K \subseteq V$ sedemikian sehingga setiap pasangan simpul di K dihubungkan oleh suatu sisi. Bilangan clique adalah jumlah clique terbesar dari graf G dan dinotasikan dengan $\omega(G)$.*

Contoh 8 Berdasarkan Gambar 1 *clique* terbesar dari graf G adalah sebanyak tiga simpul yaitu $\{A, B, E\}$, maka bilangan *clique*nya adalah tiga, dinotasikan $\omega(G) = 3$.

Definisi 9 [2] *Pewarnaan simpul pada graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan $c: V \to S$ dengan S ditentukan sebagai himpunan warna seperti $\{merah, biru, hijau, \ldots\}$ atau himpunan bilangan asli*

$\{1,2,3,\ldots\}$ *sedemikian sehingga* $c(x) \neq c(y)$ *ketika* x *dan* y *adalah dua simpul yang saling bertetangga. Jika* S *memilki suatu* k *elemen, maka* c *disebut suatu pewarnaan-*k *di* G.

Berdasarkan Definisi 9 berikut ini adalah contoh pewarnaan simpul graf.



Gambar 3 Pewarnaan simpul graf

Dalam pewarnaan simpul graf, warna yang digunakan adalah seminimal mungkin yang dinamakan dengan bilangan kromatik. Berikut diberikan definisi bilangan kromatik.

Definisi 10 [1] *Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul disebut bilangan kromatik graf* G, *dinotasikan dengan* $\chi(G)$.

Contoh 11 Berdasarkan Definisi 10 dan dari Gambar 3 maka bilangan kromatik dari graf G adalah tiga, dinotasikan $\chi(G) = 3$.

Berikut ini diberikan proposisi bahwa setiap *clique* dari graf G memperoleh warna yang berbeda oleh fungsi pewarnaan c.

Proposisi 12 [4] *Misalkan* $G = (V, E)$ *dan* K *merupakan clique dari* G. *Jika* c *adalah suatu pewarnaan dari* G, *maka fungsi* c *memberikan warna yang berbeda pada setiap simpul* K.

Berdasarkan Proposisi 12 berikut ini diberikan proposisi yang menerangkan bahwa bilangan kromatik dari suatu graf G selalu lebih dari atau sama dengan bilangan *clique* seperti yang dituangkan dalam Proposisi 13.

Proposisi 13 [4] *Untuk setiap graf* G, *maka* $\chi(G) \geq \omega(G)$. *Dengan kata lain bilangan kromatik dari graf* G *selalu lebih dari atau sama dengan bilangan clique.*

Berdasarkan Proposisi 12 dan Proposisi 13, terdapat hubungan antara bilangan *clique* dan bilangan kromatik. Reinhard Diestel dalam bukunya yang berjudul *Graph Theory* membahas suatu materi yang menghubungkan antara bilangan *clique* dan bilangan kromatik yang dinamakan dengan graf *perfect*. Sementara Chris Godsil dan Gordon Royle dalam bukunya yang berjudul *Algebraic Graph Theory* membahas materi tentang graf *imperfect*. Adapun definisi dari graf *perfect* dan graf *imperfect* dituangkan dalam Definisi 14 dan Definisi 15 berikut.

Definisi 14 [2] *Sebuah graf* G *adalah perfect jika untuk setiap subgraf induksi* H *dari* G *memiliki bilangan kromatik dan bilangan clique yang sama* $\chi(H) = \omega(H)$.

Definisi 15 [3] *Graf imperfect adalah graf yang memiliki bilangan kromatik lebih besar dari bilangan clique* $\chi(H) > \omega(H)$.

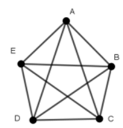
Sebelum membahas tentang graf *perfect* dan graf *imperfect* pada graf sikel, graf roda, dan graf helm, perlu diketahui bahwa graf lengkap dan *open chain* merupakan graf *perfect* yang nantinya digunakan sebagai acuan dalam pembuktian graf *perfect* dan graf *imperfect* yang lain.

Definisi 16 [6] *Graf G disebut graf lengkap jika setiap simpul di G terhubung ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Setiap simpul pada K_n berderajat $n-1$.*

Terdapat hubungan antara subgraf induksi dari graf lengkap dengan graf lengkap yang dituangkan dalam Lemma 17 berikut.

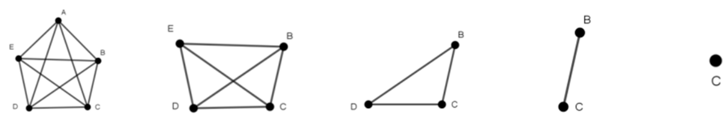
Lemma 17 [4] *Setiap subgraf induksi dari graf lengkap adalah graf lengkap.*

Contoh 18 Misalkan $n = 5$ maka diperoleh graf lengkap K_5 seperti pada Gambar 4 berikut.



Gambar 4 Graf lengkap K_5

Berdasarkan Gambar 4 beberapa subgraf induksi dari graf lengkap K_5 menghasilkan bentuk graf seperti pada Gambar 5 berikut.

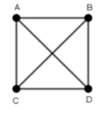


Gambar 5 Subgraf induksi graf lengkap K_5

Berdasarkan Lemma 17, Peter Ballen dalam tulisannya yang berjudul *Perfect Graphs and The Perfect Graph Theorems* menuliskan suatu teorema yang dituangkan dalam Teorema 19 berikut.

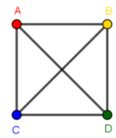
Teorema 19 [4] *Setiap graf lengkap adalah graf perfect.*
Bukti. Teorema ini akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika berdasarkan jumlah simpul dari graf lengkap. Graf lengkap dengan satu simpul K_1 merupakan graf *perfect* karena $\omega(K_1) = \chi(K_1)$ dan K_1 tidak memiliki subgraf induksi yang lain selain dirinya sendiri. Asumsikan bahwa graf lengkap dengan jumlah simpul n adalah graf *perfect*. Misalkan K_{n+1} adalah graf lengkap dengan jumlah simpul $n+1$. Misalkan H adalah subgraf induksi dari K_{n+1}. Semua subgraf induksi dari graf lengkap adalah graf lengkap berdasarkan Lemma 17. Jika H adalah subgraf induksi dari K_{n+1} dan $H \neq K_{n+1}$ maka H adalah graf lengkap dengan jumlah simpul n atau kurang dari n dan H merupakan graf *perfect* berdasarkan asumsi. Jadi $\omega(H) = \chi(H)$. Selanjutnya, jika $H = K_{n+1}$ maka $\omega(K_{n+1}) = \chi(K_{n+1}) = n+1$. ■

Contoh 20 Misalkan $n = 4$ maka diperoleh graf lengkap K_4 seperti Gambar 6 berikut.



Gambar 6 Graf lengkap K_4

Berdasarkan Gambar 6 subgraf induksi dari graf lengkap K_4 adalah graf lengkap berdasarkan Lemma 17. Subgraf induksi graf lengkap K_4 untuk $H = K_4$ atau dirinya sendiri *clique* terbesarnya adalah empat maka $\omega(K_4) = 4$. Selanjutnya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai simpul graf lengkap K_4 seperti pada Gambar 7 berikut.



Gambar 7 Hasil pewarnaan simpul graf lengkap K_4

Berdasarkan Gambar 7 warna minimum yang diperoleh untuk mewarnai graf lengkap K_4 adalah sebanyak empat warna maka bilangan kromatiknya adalah empat, dinotasikan $\chi(K_4) = 4$ sehingga diperoleh untuk $H = K_4$ maka $\omega(K_4) = \chi(K_4) = 4$. Jadi graf lengkap K_4 merupakan graf *perfect*.

Berikutnya perlu diketahui bahwa *open chain* juga merupakan graf *perfect* yang akan dituangkan dalam sebuah teorema. Sebelum membahas tentang itu terlebih dahulu diberikan definisi *open chain.*

Definisi 21 [4] *Misalkan* $G = (V, E)$. *Suatu* G *adalah open chain jika* $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *dan* $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$.

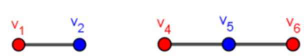
Setelah mengetahui definisi *open chain*, berikutnya ditunjukkan bahwa *open chain* merupakan graf *perfect* seperti yang dituangkan dalam Teorema 22 berikut.

Teorema 22 [4] *Setiap open chain adalah graf perfect.*
Bukti. Misalkan $G = (V, E)$ adalah *open chain.* Misalkan H adalah subgraf induksi dari G, maka terdapat dua kemungkinan dari H berdasarkan ketetanggaannya.
Kasus 1. H tidak memuat simpul yang bertetangga.
Jika H tidak memuat simpul yang bertetangga maka $\omega(H) = 1$. Fungsi pewarnaannya dimisalkan dengan $c(v_i) = merah$ untuk semua $v \in H$, maka untuk semua $v \in H$ memiliki fungsi 1-pewarnaan, dan bilangan kromatiknya adalah satu, dinotasikan $\chi(H) = 1$. Sehingga diperoleh $\omega(H) = \chi(H) = 1$, dengan kata lain H merupakan graf *perfect.* Dapat dilihat pada Gambar 8 berikut.

Gambar 8 H tidak memuat simpul yang bertetangga

Kasus 2. H memuat simpul yang bertetangga.
Open chain yang memuat simpul bertetangga memiliki *clique* terbesarnya yaitu dua karena hanya ada dua simpul yang saling bertetangga, maka bilangan cliquenya adalah dua, dinotasikan $\omega(H) = 2$. Fungsi c untuk pewarnaan simpulnya dapat didefinisikan seperti berikut :

$$c(v_i) = \begin{cases} merah, & untuk\ i\ ganjil \\ biru, & untuk\ i\ genap \end{cases}$$



Gambar 9 H memuat simpul yang bertetangga

sehingga fungsi c pada H adalah sebanyak dua pewarnaan, dan bilangan kromatiknya adalah dua, dinotasikan $\chi(H) = 2$. Maka diperoleh $\omega(H) = \chi(H) = 2$. Dengan kata lain H adalah graf *perfect.* ■

Pembahasan berikutnya adalah kondisi graf *perfect* dan graf *imperfect* pada graf sikel. Sebelum membahas tentang itu, terlebih dahulu perlu diketahui definisi dari graf sikel yang dituangkan dalam Definisi 23 berikut.

Definisi 23 [1] *Graf sikel adalah graf terhubung yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf sikel dengan* n *simpul dilambangkan dengan* C_n*. Jika simpul-simpul pada* C_n *adalah* $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$*, maka sisi-sisinya adalah* $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)$*, dan* (v_n, v_1)*. Dengan kata lain ada sisi dari simpul terakhir* v_n *yang terhubung ke simpul pertama* v_1*.*

Graf sikel pada kondisi tertentu merupakan graf *perfect* namun pada kondisi tertentu merupakan graf *imperfect*. Seperti yang dituangkan pada Teorema 24 berikut.

Teorema 24 *Misalkan* C_n *merupakan graf sikel dengan* n *merupakan banyaknya simpul, maka terdapat dua kondisi pada graf sikel berdasarkan jumlah simpulnya.*
a. Graf sikel C_3 *dan setiap graf sikel* C_{2n} *adalah graf perfect.*
b. Jika $n \geq 2$*, maka* $\chi(C_{2n+1}) > \omega(C_{2n+1})$*.*

Bukti. Diberikan C_n adalah graf sikel dengan jumlah simpul sebanyak n, maka kondisi dari C_n dijelaskan seperti berikut.

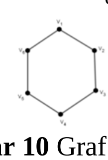
a. Graf sikel C_3 setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Hal ini serupa dengan definisi graf lengkap yang artinya graf sikel C_3 merupakan graf lengkap K_3. Graf lengkap berdasarkan Teorema 19 merupakan graf *perfect*, maka graf sikel C_3 juga merupakan graf *perfect*.

Selanjutnya misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sikel C_{2n}. Misalkan H adalah subgraf induksi dari G dan $H = C_{2n}$, *clique* terbesar dari C_{2n} memiliki jumlah simpul maksimum yang saling bertetangga yaitu sebanyak dua simpul maka bilangan *clique*nya adalah dua, dinotasikan $\omega(C_{2n}) = 2$. Pewarnaan simpul pada graf sikel C_{2n} dapat dilakukan dengan cara menetapkan warna pertama misalkan warna merah untuk simpul ganjil, dan warna kedua misalkan warna hijau untuk simpul genap. Cara seperti ini dilakukan dan menghasilkan dua simpul yang bertetangga memiliki warna yang berbeda, maka warna minimum yang dapat diberikan untuk $H = C_{2n}$ adalah 2 warna, dinotasikan $\chi(C_{2n}) = 2$. Jadi diperoleh $\omega(C_{2n}) = \chi(C_{2n}) = 2$, sehingga terbukti untuk $H = C_{2n}$ merupakan graf *perfect*.

Selanjutnya untuk $H \neq C_{2n}$, maka H akan menghasilkan graf yang berbentuk graf lengkap dan subgraf induksi dari *open chain*. Graf lengkap dan *open chain* berdasarkan Teorema 19 dan Teorema 22 telah terbukti merupakan graf *perfect* maka untuk setiap subgraf induksi H dan $H \neq C_{2n}$ merupakan graf *perfect*. Jadi terbukti bahwa setiap graf sikel C_{2n} merupakan graf *perfect*. ■

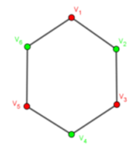
b. Graf G pada graf sikel $C_{2n+1}, n \geq 2$ memiliki jumlah simpul maksimum yang saling bertetangga adalah dua maka bilangan *clique*nya adalah dua, dinotasikan $\omega(C_{2n+1}) = 2$. Pewarnaan simpul pada graf sikel C_{2n+1} dilakukan dengan cara dimisalkan pada graf sikel C_{2n+1} ditetapkan nomor V_1 sampai V_{2n+1} pada simpul graf, kemudian warna pertama misalkan warna merah ditetapkan ke simpul ganjil dan warna kedua misalkan warna hijau ke simpul genap. Cara seperti ini dilakukan agar dua simpul yang bertetangga memiliki warna yang berbeda, akan tetapi simpul V_{2n+1} dan simpul V_1 dihubungkan oleh sebuah sisi atau saling bertetangga sehingga kedua simpul ini tidak dapat diwarnai dengan warna yang sama, maka dibutuhkan warna ketiga misalkan warna biru. Jadi warna minimum yang diperoleh untuk graf sikel C_{2n+1} adalah sebanyak 3 warna, dinotasikan $\chi(C_{2n+1}) = 3$. Sehingga diperoleh $\chi(C_{2n+1}) > \omega(C_{2n+1})$. Jadi C_{2n+1} merupakan graf *imperfect*. ■

Contoh 25 Misalkan $n = 3$ maka diperoleh graf sikel C_6 seperti pada Gambar 10 berikut.



Gambar 10 Graf sikel C_6

Berdasarkan Gambar 10 untuk subgraf induksi H dan $H = C_6$, bilangan *clique*nya adalah dua, dinotasikan $\omega(C_6) = 2$. Pewarnaan simpul pada graf sikel C_6 diperlihatkan seperti pada Gambar 11 berikut.



Gambar 11 Hasil pewarnaan simpul graf sikel C_6

Berdasarkan Gambar 11, bilangan kromatiknya adalah dua, dinotasikan $\chi(C_6) = 2$. Sehingga diperoleh $\omega(C_6) = \chi(C_6) = 2$. Dengan kata lain terbukti bahwa untuk subgraf induksi H dan $H = C_6$ merupakan graf *perfect*.

Selanjutnya untuk $H \neq C_6$, berdasarkan Proposisi 6 jumlah subgraf induksi untuk graf sikel C_6 berjumlah 63 graf. Oleh sebab itu, sangat tidak efektif untuk mengeceknya satu persatu. Sehingga berikut ini diperlihatkan beberapa bentuk subgraf induksi dari graf sikel C_6 yang diuraikan seperti berikut.

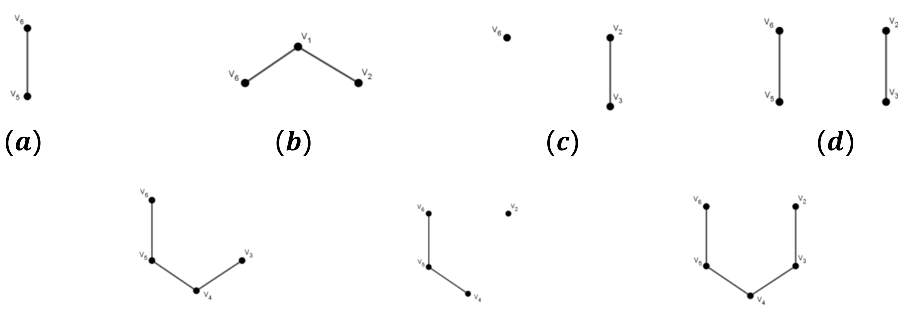
1. Subgraf induksi yang menghasilkan bentuk graf lengkap seperti pada Gambar 12 berikut.

Gambar 12 Subgraf induksi C_6 dengan Satu simpul

2. Subgraf induksi yang menghasilkan bentuk subgraf induksi dari *open chain* seperti pada Gambar 13 berikut.

$(\boldsymbol{a})$ $(\boldsymbol{b})$

Gambar 13 Subgraf induksi dari *open chain* yang memuat simpul yang tidak bertetangga



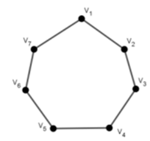
$(\boldsymbol{a})$ $(\boldsymbol{b})$ $(\boldsymbol{c})$ $(\boldsymbol{d})$

$(\boldsymbol{e})$ $(\boldsymbol{f})$ $(\boldsymbol{g})$

Gambar 14 Subgraf induksi dari *open chain* yang memuat simpul yang bertetangga

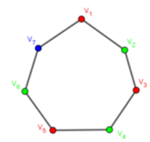
Berdasarkan uraian di atas subgraf induksi dari C_6 pada nomor 1 membentuk graf lengkap, dan nomor 2, subgraf induksinya membentuk subgraf induksi dari *open chain,* berdasarkan hal tersebut maka subgraf induksi dari graf sikel C_6 untuk $H \neq C_6$ merupakan graf *perfect*. Jadi graf sikel C_6 merupakan graf *perfect*.

Contoh 26 Misalkan $n = 3$ maka diperoleh C_7 seperti pada Gambar 15 berikut.



Gambar 15 Graf sikel C_7

Berdasarkan Gambar 15, bilangan *clique*nya adalah dua, dinotasikan $\omega(C_7) = 2$. Pewarnaan simpulnya diperlihatkan pada Gambar 16 berikut.



Gambar 16 Hasil pewarnaan simpul graf sikel C_7

Berdasarkan Gambar 16 bilangan kromatiknya adalah tiga dinotasikan $\chi(C_7) = 3$. Sehingga diperoleh $\chi(C_7) > \omega(C_7)$. Dengan kata lain graf sikel C_7 merupakan graf *imperfect.*

Pembahasan selanjutnya adalah graf *perfect* dan graf *imperfect* pada graf roda. Sebelumnya terlebih dahulu diberikan definisi dari graf roda.

Definisi 27 [7] *Graf roda W_n adalah graf yang memuat sikel yang setiap simpul pada sikel tersebut terhubung langsung dengan titik pusat.*

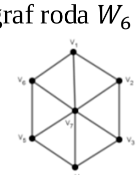
Adapun kondisi graf roda yang merupakan graf *perfect* dan graf *imperfect* seperti yang dituangkan dalam Teorema 28 berikut.

Teorema 28 *Misalkan W_n merupakan graf roda dengan n merupakan banyaknya simpul, maka terdapat dua kondisi pada graf roda berdasarkan jumlah simpulnya.*

a. Graf roda W_3 dan setiap graf roda $W_{2n,} n \geq 2$ adalah graf perfect.

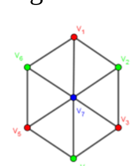
b. Jika $n \geq 2$, maka $\chi(W_{2n+1}) > \omega(W_{2n+1})$.

Contoh 29 Misalkan $n = 3$ maka diperoleh graf roda W_6 seperti Gambar 17 berikut.



Gambar 17 Graf roda W_6

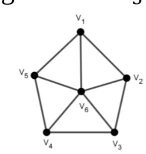
Berdasarkan Gambar 17 untuk subgraf induksi H dan $H = W_6$, bilangan *clique*nya adalah tiga, dinotasikan $\omega(W_6) = 3$. Pewarnaan simpul pada graf roda W_6 diperlihatkan pada Gambar 18 berikut.



Gambar 18 Hasil pewarnaan simpul graf roda W_6

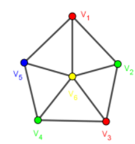
Berdasarkan Gambar 18 bilangan kromatiknya adalah tiga, dinotasikan $\chi(W_6) = 3$. Sehingga diperoleh $\omega(W_6) = \chi(W_6) = 3$. Dengan kata lain terbukti bahwa subgraf induksi H dan $H = W_6$ adalah graf *perfect*.

Contoh 30 Misalkan $n = 2$ maka diperoleh graf roda W_5 seperti Gambar 19 berikut.



Gambar 19 Graf roda W_5

Berdasarkan Gambar 19 bilangan *clique*nya adalah tiga, dinotasikan $\omega(W_5) = 3$. Pewarnaan simpul pada graf roda W_5 diperlihatkan seperti pada Gambar 20 berikut.



Gambar 20 Hasil pewarnaan simpul graf roda W_5

Berdasarkan Gambar 20 bilangan kromatiknya adalah empat, dinotasikan $\chi(W_5) = 4$. Sehingga diperoleh $\chi(W_5) > \omega(W_5)$. Dengan kata lain graf roda W_5 merupakan graf *imperfect*.

Definisi 31 [8] *Graf helm H_n adalah graf yang didapatkan dari sebuah graf roda dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap simpul di sikel luar.*

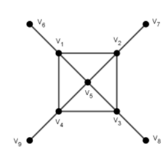
Adapun kondisi graf helm yang merupakan graf *perfect* dan graf *imperfect* dituangkan dalam Teorema 32 berikut.

Teorema 32 *Misalkan H_n merupakan graf helm dengan n merupakan banyaknya simpul, maka terdapat dua kondisi pada graf helm berdasarkan jumlah simpulnya.*

a. Graf helm H_3 dan setiap graf helm $H_{2n}, n \geq 2$ adalah graf perfect.

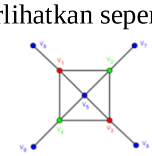
b. Jika $n \geq 2$, maka $\chi(H_{2n+1}) > \omega(H_{2n+1})$.

Contoh 33 Misalkan $n = 2$ maka diperoleh graf helm H_4 seperti pada Gambar 21 berikut.



Gambar 21 Graf helm H_4

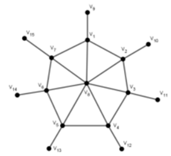
Berdasarkan Gambar 21 bilangan *clique*nya adalah tiga, dinotasikan $\omega(H_4) = 3$. Selanjutnya pewarnaan simpul pada graf helm H_4 diperlihatkan seperti pada Gambar 22 berikut.



Gambar 22 Hasil pewarnaan simpul graf helm H_4

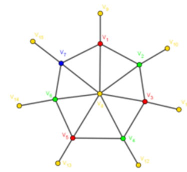
Berdasarkan Gambar 22 bilangan kromatiknya adalah tiga, dinotasikan $\chi(H_4) = 3$. Sehingga diperoleh $\omega(H_4) = \chi(H_4) = 3$. Jadi terbukti untuk subgraf induksi H dan $H = H_4$ merupakan graf *perfect*.

Contoh 34 Misalkan $n = 3$ maka diperoleh H_7 seperti pada Gambar 23 berikut.



Gambar 23 Graf helm H_7

Berdasarkan Gambar 23, bilangan *clique*nya adalah tiga, dinotasikan $\omega(H_7) = 3$. Pewarnaan simpul pada graf helm H_7 diperlihatkan seperti pada Gambar 24 berikut.



Gambar 24 Hasil pewarnaan simpul graf helm H_7

Berdasarkan Gambar 24 bilangan kromatiknya adalah empat, dinotasikan $\chi(H_7) = 4$. Sehingga diperoleh $\chi(H_7) > \omega(H_7)$. Dengan kata lain graf helm H_7 merupakan graf *imperfect*.

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan, maka dapat ditarik kesimpulan, yaitu:

1. Graf lengkap, *open chain*, graf sikel C_3 dan setiap graf sikel $C_{2n}, n \geq 2$, graf roda W_3 dan setiap graf roda $W_{2n}, n \geq 2$, graf helm H_3 dan setiap graf helm $H_{2n}, n \geq 2$ merupakan graf *perfect*.
2. Graf sikel $C_{2n+1}, n \geq 2$, graf roda $W_{2n+1}, n \geq 2$, dan graf helm $H_{2n+1}, n \geq 2$ merupakan graf *imperfect*.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Munir R. *Matematika Diskrit Ed ke-3*. Bandung: Informatika; 2010.
[2] Diestel R. *Graph Theory*. New York: Springer-Verlag; 2001.
[3] Godsil C, Royle G. *Algebraic Graph Theory*. New York: Springer-Verlag; 2000.
[4] Ballen P. *Perfect Graphs and The Perfect Graph Theorems*. Philadelpia: University of Pennsylvania; 2014.
[5] Regin JC. *Using Contraint Programming to Solve the Maximum Clique Problem*. France: Falbonne; 1681.
[6] Vasudev C. *Combinatorics and Graph Theory*. India: New Age International (P) Ltd; 2007.
[7] Masni. Pewarnaan Sisi pada Graf yang Berhubungan dengan Sikel. *Jurnal MSA*. 2014; (2):69-75.

ZAKIAH : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
zakiahuntan@gmail.com
HELMI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
helmi132205@yahoo.co.id
FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
Frandly88@gmail.com