Buletin Ilmiah Math, Stat, dan Terapannya (Bimaster)
Volume 07. No.4 (2018), hal 369-378.

GRAF PEMBAGI NOL DAN GRAF TOTAL PADA KODE GENETIK

Beti Riyanti, Mariatul Kiftiah, Fransiskus Fran

INTISARI

Segala sesuatu yang terjadi dalam sel dikendalikan oleh enzim. Protein di dalam enzim diperoleh melalui proses sintesis protein yang melibatkan empat basa nitrogen, yaitu Adenin (A), Sitosin (C), Guanin (G), dan Urasil (U). Keempat basa nitrogen tersebut dikombinasikan menjadi triplet kodon yang berjumlah 64 *buah dan masing-masing mengkode asam amino. Kode genetik merupakan aturan yang menjelaskan bagaimana triplet kodon pada mRNA mengkode asam amino. Himpunan kombinasi triplet kodon isomorfis dengan ring bilangan bulat modulo* 64 *($\mathbb{Z}_{64}$). Suatu ring komutatif dapat direpresentasikan ke dalam bentuk graf, diantaranya graf pembagi nol dan graf total. Graf pembagi nol dan graf total yang terbentuk merupakan graf terhubung dan tak berarah. Beberapa kasus untuk nilai n yang berbeda, bentuk graf pembagi nol berupa graf bipartit, sedangkan graf total berbentuk graf multipartit. Graf pembagi nol pada kode genetik menggunakan pembagi nol dari ring $\mathbb{Z}_{64}$ ($Z(\mathbb{Z}_{64})$) sebagai simpul, sedangkan graf total kode genetik menggunakan $Z(\mathbb{Z}_{64})$ sebagai syarat agar dua simpul dapat terhubung. Graf pembagi nol dan graf total pada kode genetik berturut-turut berbentuk graf multipartit $K_{1,1,1,1,1,1,25}$ dan $K_{12,15,18,19}$. Apabila simpul-simpul pada graf yang terbentuk saling dihubungkan maka terbentuk rantai polipeptida yang dimulai dengan kodon start (AUG) dan berakhir dengan kodon stop (UAA, UAG, ataupun UGA).*

Kata Kunci : *kodon, ring $\mathbb{Z}_{64}$, isomorfisma ring, graf bipartit, graf multipartit*

PENDAHULUAN

Suatu sel dapat berfungsi dengan baik apabila memiliki protein enzim yang tepat di dalam sel tersebut. Protein yang dibuat pada waktu tertentu ditentukan oleh pesan berkode yakni berupa asam amino. Asam amino merupakan senyawa hasil pengkodean dari triplet kodon yang diperoleh saat translasi *messenger* RNA (mRNA) [1]. Sebanyak 64 buah tripet kodon dibentuk dari kombinasi empat basa nitrogen (Adenin (A), Sitosin (C), Guanin (G), dan Urasil (U)). Keseluruhan kodon tersebut hanya mengkode sebanyak 20 jenis asam amino. Hal ini menyebabkan adanya asam amino tertentu yang dikodekan oleh lebih dari satu kodon, keadaan ini dinamakan degenerasi kode genetik. Kodon AUG mengkode asam amino metionin serta sebagai tanda dimulainya suatu rantai polipeptida sehingga kodon ini disebut juga kodon *start.* Selain kodon *start,* terdapat pula kodon *stop* yaitu kodon UAG, UAA dan UGA yang menjadi tanda berakhirnya rantai polipeptida.

Himpunan basa nitrogen merupakan grup yang isomorfis dengan $\mathbb{Z}_4$ (bilangan bulat modulo 4) dan himpunan kodon juga isomorfis dengan ring komutatif $\mathbb{Z}_{64}$. Kodon-kodon tersebut dapat dipetakan dengan elemen $\mathbb{Z}_{64}$ [2]. Suatu ring komutatif dapat direpresentasikan ke dalam bentuk graf, diantaranya graf pembagi nol dan graf total. Urutan kodon pada suatu rantai polipeptida yang dimulai dengan kodon *start* dan berakhir dengan kodon *stop* dapat dilakukan pendekatan dengan teori graf. Pembentukan graf pembagi nol dan graf total pada kode genetik menggunakan pembagi nol yang didapat dari ring komutatif $\mathbb{Z}_{64}$. Berdasarkan uraian tersebut maka tujuan pada penelitian ini adalah mengkaji graf pembagi nol dan graf total pada secara umum, membentuk graf pembagi nol dan graf total pada kode genetik serta mengaplikasikannya dalam pembentukan rantai polipeptida. Ring yang digunakan dalam penelitian ini adalah ring $\mathbb{Z}_n$. Selanjutnya diberikan teorema-teorema mengenai bentuk graf pembagi nol untuk beberapa kasus nilai n dengan n adalah bilangan asli.

Proses pembentukan graf pembagi nol dan graf total dari kode genetik dimulai dengan menentukan pembagi nol dari ring $\mathbb{Z}_{64}$. Pembagi nol yang diperoleh disesuaikan dengan kodon-kodon yang telah dipetakan ke elemen $\mathbb{Z}_{64}$. Pembentukan graf pembagi nol menggunakan pembagi nol tersebut sebagai simpul, sedangkan graf total menggunakan pembagi nol sebagai syarat untuk dua simpul saling terhubung. Setelah graf pembagi nol dan graf total terbentuk, simpul-simpul yang saling terhubung dapat diurutkan dimulai dari kodon *start*, yaitu AUG. Selanjutnya dari kodon AUG ini dihubungkan menuju kodon lain sesuai dengan simpul kodon yang terhubung. Pada graf total, kodon bernomor ganjil (G_1) dapat dipetakan ke himpunan kodon bernomor genap (G_2) begitupun sebaliknya. Akan tetapi proses pemetaan ini tidak mutlak harus terjadi dalam setiap pembentukan rantai polipeptida. Apabila tidak ada pemetaan dari G_1 ke G_2 atau sebaliknya, maka langsung diperoleh urutan kodon pada rantai polipeptida. Apabila rantai polipeptida bertemu dengan kodon *stop*, maka rantai tersebut akan terputus secara otomatis. Selanjutnya akan terbentuk rantai polipeptida baru yang dimulai lagi dari kodon *start*.

PEMBAGI NOL

Pembagi nol merupakan hal dasar yang diperlukan dalam pembentukan graf pembagi nol maupun graf total. Berikut diberikan definisi dari pembagi nol.

Definisi 1 [3] *Suatu elemen tak nol a dari ring komutatif R disebut pembagi nol apabila terdapat elemen tak nol $b \in R$ sedemikian sehingga $ab = 0$. Himpunan pembagi nol dari ring R dinotasikan dengan $Z(R)$.*

Contoh 2 Diberikan $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], \cdots, [5]\}$. Selanjutnya dicari pembagi nol dari ring $\mathbb{Z}_6$. Elemen-elemen dari $\mathbb{Z}_6$ yang hasil perkaliannya sama dengan nol diantaranya adalah [2] dengan [3] dan [3] dengan [4]. Berdasarkan Definisi 1 diperoleh bahwa $Z(\mathbb{Z}_6) = \{[2], [3], [4]\}$.

Selain definisi pembagi nol secara umum, pada ring $\mathbb{Z}_n$ terdapat juga pembagi nol khusus. Elemen ring $\mathbb{Z}_n$ disebut pembagi nol khusus jika elemen tersebut membagi habis n. Berikut diberikan definisi pembagi nol khusus.

Definisi 3 *Diberikan $\mathbb{Z}_n$ ring komutatif. Sebuah elemen taknol $[a]$ disebut pembagi nol khusus jika $[a]$ merupakan pembagi nol dan a membagi habis n. Himpunan pembagi nol dari ring $\mathbb{Z}_n$ dilambangkan dengan $Z(\mathbb{Z}_n)^{\#}$.*

Contoh 4 Akan dicari elemen pembagi nol khusus dari ring $\mathbb{Z}_6$.
Telah diketahui bahwa $Z(\mathbb{Z}_6) = \{[2], [3], [4]\}$. Elemen $Z(\mathbb{Z}_6)$ yang habis membagi 6 adalah 2 dan 3, sehingga $Z(\mathbb{Z}_6)^{\#} = \{[2], [3]\}$.

GRAF PEMBAGI NOL

Graf pembagi nol adalah suatu graf dengan simpul-simpulnya merupakan himpunan pembagi nol dari ring R dan dua simpul terhubung jika hasil perkalian keduanya adalah nol. Graf pembagi nol dari ring komutatif R dinotasikan dengan $\Gamma(R)$. Berikut diberikan definisi tentang graf pembagi nol.

Definisi 5 [4] *Diberikan R ring komutatif dan $Z(R)$ adalah himpunan pembagi nol. Sebuah graf pembagi nol $\Gamma(R)$ dengan simpulnya $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ adalah himpunan pembagi nol taknol, untuk setiap $x, y \in Z(R)^*$, simpul x dan y bertetangga jika dan hanya jika $xy = 0$*

Bentuk graf akan berbeda untuk setiap nilai n yang berbeda. Beberapa kasus untuk nilai n yang diberikan, graf pembagi nol berbentuk graf bipartit lengkap [5]. Himpunan simpul akan terbagi menjadi dua subhimpunan, yaitu V_1dan V_2 dimana elemen dari V_1 akan terhubung dengan semua elemen di V_2 akan tetapi tidak terhubung dengan elemen pada himpunan yang sama. Teorema-teorema di bawah ini menjelaskan beberapa bentuk graf pembagi nol sesuai dengan n yang diberikan.

Teorema 6 [5] Jika $n = 2p$ dimana p adalah bilangan prima ganjil, maka graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{2p}$ berupa graf bintang dan graf bipartit lengkap $K_{1,p-1}$.

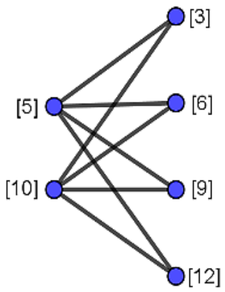
Teorema 7 [5] Jika $n = 2m$ dengan $2 < m \leq 8$ dan m bukan kelipatan 3, maka graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{2m}$ berupa graf bintang dan graf bipartit lengkap $K_{1,m-2}$.

Teorema 8 [5] Jika $n = 3p$ dengan p bilangan prima dan $p > 3$, maka graf pembagi nol berupa graf bipartit lengkap $K_{2,p-1}$.

Teorema 9 [5] Jika $n = 5p$ dengan p bilangan prima dan $p > 5$, maka graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{5p}$ berupa graf bipartit lengkap $K_{4,p-1}$.

Teorema 10 [5] Jika $n = pq$ dimana p, q bilangan prima dan $q > p$, maka graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{pq}$ berupa graf bipartit lengkap $K_{p-1,q-1}$.

Contoh 11 Diberikan $\mathbb{Z}_{15} = \{[0],[1],[2],\cdots,[14]\}$ dan dan himpunan pembagi nol dari ring $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_{15}) = \{[0],[3],[5],[6],[9],[10],[12]\}$. Himpunan pembagi nol tersebut diuraikan menjadi $V_1 = \{[3],[6],[9],[12]\}$ dan $V_2 = \{[5],[10]\}$. Graf pembagi nol dari ring $\mathbb{Z}_{15}$ diilustrasikan pada Gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1 Graf bipartit lengkap $K_{2,4}$

Graf pembagi nol dari ring komutatif $\mathbb{Z}_n$ dengan nilai n yang tidak termasuk dalam teorema-teorema di atas mempunyai bentuk yang tidak konstan. Graf tersebut bisa berupa graf bipartit dan bisa juga berbentuk graf multipartit.

GRAF TOTAL

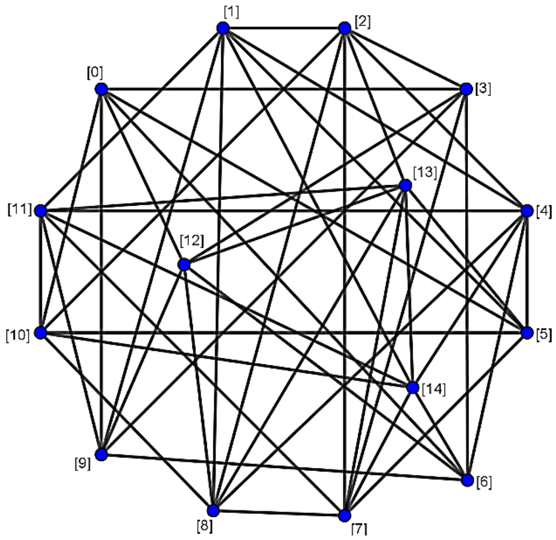
Selain graf pembagi nol, graf yang menggunakan pembagi nol adalah graf total. Berbeda dengan graf pembagi nol, graf total yang dinotasikan dengan $T(\Gamma(R))$ menggunakan pembagi nol sebagai syarat dua simpul yang saling terhubung. Simpul yang terdapat pada graf total merupakan semua elemen dari ring R. Berikut akan diberikan definisi mengenai graf total.

Definisi 12 [6] *Graf total dari ring komutatif R adalah graf dengan himpunan simpulnya merupakan semua elemen dari ring R dan untuk setiap simpul $x, y \in R, x \neq y$ maka titik x dan titik y bertetangga jika dan hanya jika $x + y \in Z(R)$.*

Graf total mempunyai bentuk yang berbeda dengan graf pembagi nol dalam beberapa kasus nilai n. Walaupun keduanya menggunakan pembagi nol dalam proses pembentukan graf, akan tetapi graf total mempunyai bentuk yang selalu berubah tergantung pada nilai n yang diberikan. Berbeda halnya dengan graf pembagi nol yang cenderung memiliki bentuk graf tetap. Graf pembagi nol cenderung berupa graf bipartit, sedangkan graf total cenderung berupa graf multipartit. Berikut diberikan contoh graf total.

Contoh 13 Diberikan $\mathbb{Z}_{15} = \{[0],[1],[2],\cdots,[14]\}$ dan himpunan pembagi nol dari ring $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_{15}) = \{[0],[3],[5],[6],[9],[10],[12]\}$. Himpunan simpul yang merupakan elemen dari $\mathbb{Z}_{15}$ dapat dipartisi menjadi beberapa subhimpunan simpul dimana elemen dari setiap himpunan partisi tidak saling bertetangga. Simpul tersebut dapat dipartisi menjadi enam himpunan simpul yaitu $V_1 = \{[0],[1],[7]\}$, $V_2 = \{[2],[5],[6],[11]\}$, $V_3 = \{[3],[4],[10]\}$, $V_4 = \{[8],[14]\}$, $V_5 = \{[9],[13]\}$, dan $V_6 = \{[12]\}$.

Banyaknya elemen setiap himpunan partisi berbeda, di mana $|V_1| = |V_3| = 3$, $|V_2| = 4$,$|V_4| = |V_5| = 2$, dan $|V_6| = 1$, dengan demikian graf total dari ring komutatif $\mathbb{Z}_{15}$ berupa graf multipartit $K_{1,2,2,3,3,4}$. Graf total $\mathbb{Z}_{15}$ dapat dilihat pada Gambar 2 di bawah ini.



Gambar 2 Graf multipartit $K_{1,2,2,3,3,4}$

ANALISIS GRAF PADA KODE GENETIK

Himpunan basa nitrogen yang terdiri dari basa purin dan pirimidin dinotasikan dengan N_c, dengan $N_c = \{\mathrm{A}, \mathrm{C}, \mathrm{G}, \mathrm{U}\}$. Himpunan N_c dapat dipetakan ke $\mathbb{Z}_4$, dengan $\mathbb{Z}_4 = [0], [1], [2], [3]$ [3]. Pemetaan ini mengakibatkan himpunan basa nitrogen isomorfis dengan $\mathbb{Z}_4$. Tabel 2 di bawah ini menunjukkan operasi penjumlahan pada himpunan basa nitrogen dan operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_4$.

Tabel 2 Tabel penjumlahan pada basa nitrogen dan $\mathbb{Z}_4$

Basa Nitrogen	+	A	C	G	U
	A	A	C	G	U
	C	C	G	U	A
	G	G	U	A	C
	U	U	A	C	G

Himpunan $\mathbb{Z}_4$	$+_4$	**[0]**	**[1]**	**[2]**	**[3]**
	[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
	[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
	[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
	[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

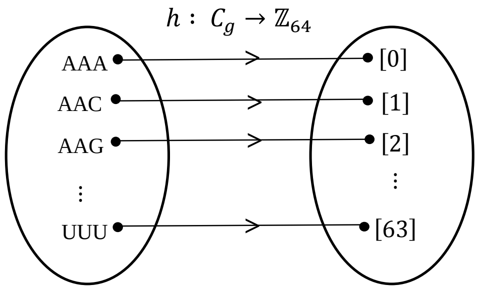
Himpunan N_c dapat dikombinasikan dengan perulangan sebanyak tiga kali sehingga menghasilkan sebanyak 64 buah triplet kodon. Himpunan kodon-kodon tersebut dinotasikan dengan C_g. Himpunan C_g kemudian dipetakan ke $\mathbb{Z}_{64}$, di mana diketahui

$$C_g = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{AAA, AAC, AAG, AAU, CAA, CAC, CAG, CAU} \\ \mathrm{GAA, GAC, GAG, GAU, UAA, UAC, UAG, UAU} \\ \mathrm{ACA, ACC, ACG, ACU, CCA, CCC, CCG, CCU} \\ \mathrm{GCA, GCC, GCG, GCU, UCA, UCC, UCG, UCU} \\ \mathrm{AGA, AGC, AGG, AGU, CGA, CGC, CGG, CGU} \\ \mathrm{GGA, GGC, GGG, GGU, UGA, UGC, UGG, UGU} \\ \mathrm{AUA, AUC, AUG, AUU, CUA, CUC, CUG, CUU} \\ \mathrm{GUA, GUC, GUG, GUU, UUA, UUC, UUG, UUU} \end{matrix} \right\},$$

dan

$$\mathbb{Z}_{64} = \{[0], [1], \cdots, [62], [63]\}$$

Selanjutnya himpunan C_g dipetakan ke himpunan $\mathbb{Z}_{64}$ oleh suatu fungsi h, di mana kodon AAA dipetakan ke $[0]$, kodon AAC dipetakan ke $[1]$ dan seterusnya hingga kodon UUU dipetakan ke $[63]$, pemetaan tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3 Pemetaan C_g ke $\mathbb{Z}_{64}$

Berdasarkan pemetaan di atas diperoleh :

$$h(\text{AAA}) = [0]$$
$$h(\text{AAC}) = [1]$$
$$h(\text{AAG}) = [2]$$
$$\vdots$$
$$h(\text{UUU}) = [63]$$

Apabila dibuat dalam bentuk tabel, pemetaan antara kodon dan elemen $\mathbb{Z}_{64}$ dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3 Tabel kode genetik

Basa Pertama	Basa Kedua												Basa Ketiga
	A			C			G			U			
	No	Kodon	Kode	No	Kodon	Kode	No	Kodon	Kode	No	Kodon	Kode	
A	0	AAA	K	16	ACA	T	32	AGA	R	48	AUA	I	A
	1	AAC	N	17	ACC	T	33	AGC	S	49	AUC	I	C
	2	AAG	K	18	ACG	T	34	AGG	R	50	AUG	M	G
	3	AAU	N	19	ACU	T	35	AGU	S	51	AUU	I	U
C	4	CAA	Q	20	CCA	P	36	CGA	R	52	CUA	L	A
	5	CAC	H	21	CCC	P	37	CGC	R	53	CUC	L	C
	6	CAG	Q	22	CCG	P	38	CGG	R	54	CUG	L	G
	7	CAU	H	23	CCU	P	39	CGU	R	55	CUU	L	U
G	8	GAA	E	24	GCA	A	40	GGA	G	56	GUA	V	A
	9	GAC	D	25	GCC	A	41	GGC	G	57	GUC	V	C
	10	GAG	E	26	GCG	A	42	GGG	G	58	GUG	V	G
	11	GAU	D	27	GCU	A	43	GGU	G	59	GUU	V	U
U	12	UAA	-	28	UCA	S	44	UGA	-	60	UUA	L	A
	13	UAC	Y	29	UCC	S	45	UGC	C	61	UUC	F	C
	14	UAG	-	30	UCG	S	46	UGG	W	62	UUG	L	G
	15	UAU	Y	31	UCU	S	47	UGU	C	63	UUU	F	U

Catatan : Kode "-" berarti tidak mengkode asam amino apapun (kodon *stop*)

Sumber : Graph in Genetic Code Algebra, Adil Akhtar 2015

Pemetaan pada Gambar 3 menunjukkan bahwa untuk setiap $xyz, x'y'z \in C_g, xyz \neq x'y'z'$ dengan x dan x' adalah basa pertama kodon, y dan y' adalah basa kedua kodon, serta z dan z' adalah basa ketiga pada kodon, berlaku $h(xyz) \neq h(x'y'z')$, sehingga h dikatakan pemetaan satu-satu (injektif). Selanjutnya untuk setiap $[a] \in \mathbb{Z}_{64}$ terdapat $xyz \in C_g$ berlaku $h(xyz) = [a]$, pemetaan h dikatakan pada (surjektif). Suatu pemetaan yang injektif sekaligus surjektif dikatakan sebagai pemetaan bijektif, oleh karenanya pemetaan h merupakan pemetaan yang bijektif.

Sebelum dibahas lebih jauh mengenai isomorfisma, terlebih dahulu akan didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian pada himpunan kodon C_g. Operasi penjumlahan pada himpunan C_g dinotasikan dengan $\oplus$. Jika $xyz, x'y'z' \in C_g$ maka algoritma penjumlahan $xyz \oplus x'y'z'$ menghasilkan $x''y''z'' \in C_g$ dinyatakan sebagai berikut :

(i) Pertama, operasikan $z + z'$ dengan mengikuti operasi penjumlahan pada Tabel 2 sehingga menghasilkan basa ketiga yang dinotasikan dengan z''.
(ii) Jika z'' yang dihasilkan pada langkah (i) urutannya lebih dulu dari z dan z', maka penjumlahan pada langkah berikutnya ditambah dengan basa C.
(iii) Kemudian, operasikan $x + x'$ sehingga menghasilkan basa pertama yang dinotasikan x'' dengan mengikuti operasi penjumlahan pada Tabel 2. (Aturan pada langkah (ii) tetap berlaku)
(iv) Terakhir, operasikan $y + y'$ mengikuti operasi pada Tabel 2. Dengan demikian, didapatlah kodon hasil penjumlahan yaitu $x''y''z''$.

Contoh 14:
Akan dicari penjumlahan dari AGC dan UGU. Diketahui $xyz = \text{AGC}$ dan $x'y'z' = \text{UGU}$
(i) Akan dicari basa ketiga z'', diperoleh $z'' = \text{C} + \text{U} = \text{A}$. Karena basa A mendahului basa C atau U pada urutan $\{\text{A}, \text{C}, \text{G}, \text{U}\}$ maka C ditambahkan ke langkah penjumlahan berikutnya.
(ii) Akan dicari basa pertama x'', di mana $x'' = (\text{A} + \text{U}) + \text{C} = \text{U} + \text{C} = \text{A}$. Karena basa A mendahului basa U pada urutan $\{\text{A}, \text{C}, \text{G}, \text{U}\}$ maka C ditambahkan ke langkah penjumlahan berikutnya.
(iii) Basa kedua $y'' = (\text{G} + \text{G}) + \text{C} = \text{A} + \text{C} = \text{C}$.

Berdasarkan langkah (i), (ii), dan (iii) maka diperoleh $x'' = \text{A}, y'' = \text{C}, z'' = \text{A}$. Dengan demikian kodon $A\text{GC} + \text{UGU} = \text{ACA}$. Selanjutnya dibuat tabel operasi penjumlahan pada C_g.

Tabel 4 Tabel operasi penjumlahan pada C_g

$\oplus$	**AAA**	**AAC**	**AAG**	**AAU**	$\cdots$	**UUU**
AAA	AAA	AAC	AAG	AAU	$\cdots$	UUU
AAC	AAC	AAG	AAU	CAA	$\cdots$	AAA
AAG	AAG	AAU	CAA	CAC	$\cdots$	AAC
AAU	AAU	CAA	CAC	CAG	$\cdots$	AAG
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
UUU	UUU	AAA	AAC	AAG	$\cdots$	UUG

Langkah berikutnya adalah mendefinisikan operasi perkalian pada himpunan kodon. Operasi $\otimes$ merupakan operasi perkalian pada C_g. Perkalian antara $k \in (\mathbb{Z}_{64}, +)$ dengan $xyz \in (C_g, \oplus)$ didefinisikan sebagai penjumlahan berulang kodon xyz sebanyak k kali. Grup $(C_g, \oplus)$ memiliki pembangun, yaitu AAC. Untuk setiap kodon $u, v \in C_g$ dapat ditulis $u = k(xyz), v = k'(xyz)$ dimana $k, k' \in \mathbb{Z}_{64}$ dan $xyz = \text{AAC}$. Selanjutnya perkalian antara dua kodon $u \in C_g$ dan $v \in C_g$ didefinisikan sebagai berikut :

$$u \otimes v = k(xyz) \otimes k'(xyz) = k \times k'(xyz)$$

dengan $\times$ merupakan operasi perkalian pada $\mathbb{Z}_{64}$.

Contoh 15 :
Akan dicari perkalian dari AGC dan UGU. Diketahui bahwa $h(\text{AGC}) = [33]$, dan $h(\text{UGU}) = [47]$, sehingga AGC dan UGU merupakan penjumlahan berulang dari kodon AAC sebanyak k kali, dengan demikian

$$\begin{aligned}\text{AGC} &= \text{AAC} + \text{AAC} + \cdots + \text{AAC}\ (sebanyak\ 33\ kali)\\ &= [33](\text{AAC})\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\text{UGU} &= \text{AAC} + \text{AAC} + \cdots + \text{AAC}\ (sebanyak\ 47\ kali)\\ &= [47](\text{AAC})\end{aligned}$$

maka perkalian antara AGC dan UGU sebagai berikut

$$\begin{aligned}\text{AGC} \otimes \text{UGU} &= [33](\text{AAC}) \otimes [47](\text{AAC})\\ &= [33 \times 47](\text{AAC})\end{aligned}$$

$$= [15](\text{AAC})$$
$$= \text{AAC} + \text{AAC} + \cdots + \text{AAC}\ (sebanyak\ 15\ kali)$$
$$= \text{UAU}$$

Berikut diberikan tabel operasi perkalian pada C_g.

Tabel 5 Tabel operasi perkalian pada C_g

$\otimes$	**AAA**	**AAC**	**AAG**	**AAU**	$\cdots$	**UUU**
AAA	AAA	AAA	AAA	AAA	$\cdots$	AAA
AAC	AAA	AAC	AAG	AAU	$\cdots$	UUU
AAG	AAA	AAG	CAA	CAG	$\cdots$	UUG
AAU	AAA	AAU	CAG	GAC	$\cdots$	UUC
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
UUU	AAA	UUU	UUG	UUC	$\cdots$	AAC

Berdasarkan Tabel 4 dan Tabel 5 dapat disimpulkan bahwa $(C_g, \oplus, \otimes)$ merupakan ring komutatif. Kemudian ditunjukkan bahwa h suatu homomorfisma. Suatu homomorfisma mengawetkan dua operasi, yakni operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}_{64}$ dan C_g sehingga untuk setiap $xyz \in C_g$ berlaku $h(xyz \oplus x'y'z') = h(xyz) + h(x'y'z')$ dan $h(xyz \otimes x'y'z') = h(xyz) \times h(x'y'z')$. Berikut diberikan contoh kasus $xyz = \text{CUU}$ dan $x'y'z' = \text{AGA}$ untuk menunjukkan bahwa h homomorfisma.

Contoh 16 :

Akan ditunjukkan bahwa h mengawetkan operasi penjumlahan. Diambil $\text{CUU}, \text{AGA} \in C_g$ sedemikian sehingga berlaku

$$h(\text{CUU} \oplus \text{AGA}) = h(\text{CCU})$$
$$= [23]$$

dan

$$h(\text{CUU}) + h(\text{AGA}) = [55] + [32]$$
$$= [23]$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa h mengawetkan operasi perkalian. Diambil $\text{CUU}, \text{AGA} \in C_g$ sedemikian sehingga berlaku

$$h(\text{CUU} \otimes \text{AGA}) = h(\text{AGA})$$
$$= [32]$$

dan

$$h(\text{CUU}) \times h(\text{AGA}) = [55] \times [32]$$
$$= [32]$$

Berdasarkan pengerjaan di atas, diperoleh $h(\text{CUU} \oplus \text{AGA}) = h(\text{CUU}) + h(\text{AGA})$ dan $h(\text{CUU} \otimes \text{AGA}) = h(\text{CUU}) \times h(\text{AGA})$. Berdasarkan Contoh 16, pemetaan h juga mengawetkan operasi penjumlahan dan perkalian untuk sebarang $xyz, x'y'z' \in C_g$, maka dapat disimpulkan bahwa h merupakan homomorfisma. Telah diketahui sebelumnya bahwa h pemetaan yang bijektif. Suatu homomorfisma yang pemetaannya satu-satu dan pada (bijektif) merupakan isomorfisma. Dengan demikian, h merupakan suatu isomorfisma ring sehingga menyebabkan $(C_g, \oplus, \otimes)$ isomorfis dengan ring $(\mathbb{Z}_{64}, +, \times)$.

Sebelum membentuk graf pembagi nol dan graf total dari kode genetik, terlebih dahulu dicari pembagi nol dan pembagi nol khusus dari ring komutatif $\mathbb{Z}_{64}$. Diketahui bahwa $\mathbb{Z}_{64} = \{[0], [1], \cdots, [62], [63]\}$. Berdasarkan Definisi 1 dan Definisi 3 maka diperoleh :

i. Pembagi nol $\mathbb{Z}_{64}$

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_{64}$, dipilih $a = 2$ terdapat $b = 32$ sehingga berlaku

$$(a \cdot b) \bmod 64 = (2 \cdot 32) \bmod 64 = 0$$

maka $a = 2$ merupakan pembagi nol $\mathbb{Z}_{64}$.

Kemudian dipilih $a = 4$ terdapat $b = 16$ sedemikian sehingga berlaku

$$(a \cdot b) \bmod 64 = (4 \cdot 16) \bmod 64 = 0$$

maka $a = 4$ merupakan pembagi nol $\mathbb{Z}_{64}$.

Demikian seterusnya sampai dipilih $a = 62$ terdapat $b = 32$ sedemikian sehingga berlaku

$$(a \cdot b) \bmod 64 = (62 \cdot 32) \bmod 64 = 0$$

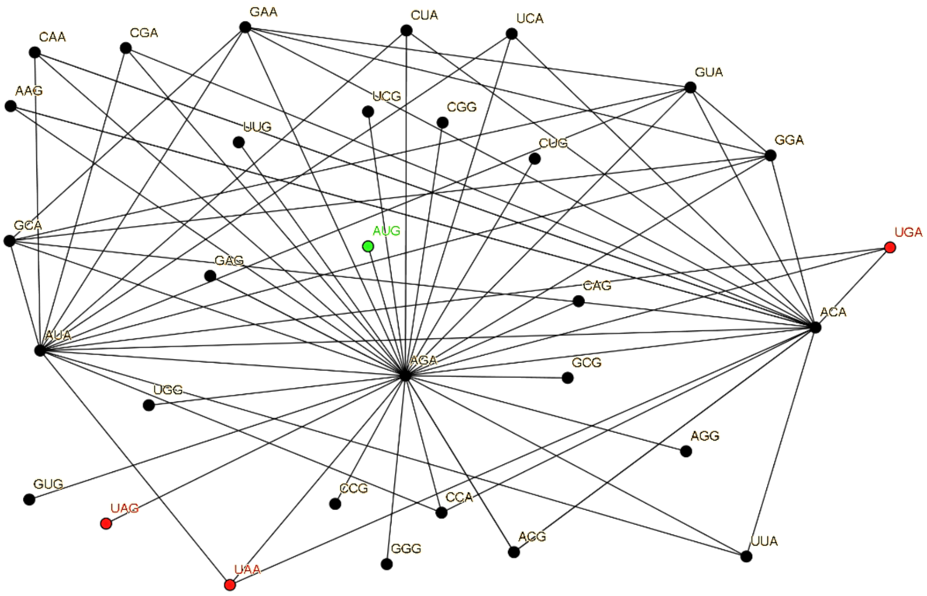
sehingga diperoleh pembagi nol ring $\mathbb{Z}_{64}$ yaitu $Z(\mathbb{Z}_{64}) = \{[2], [4], \cdots, [60], [62]\}$.

ii. Pembagi nol khusus $\mathbb{Z}_{64}$

Pembagi nol khusus merupakan elemen dari pembagi nol. Untuk setiap $[a] \in Z(\mathbb{Z}_{64})$ dan $a|64$ maka diperoleh

$$Z(\mathbb{Z}_{64})^{\#} = \{[2], [4], [8], [16], [32]\}$$

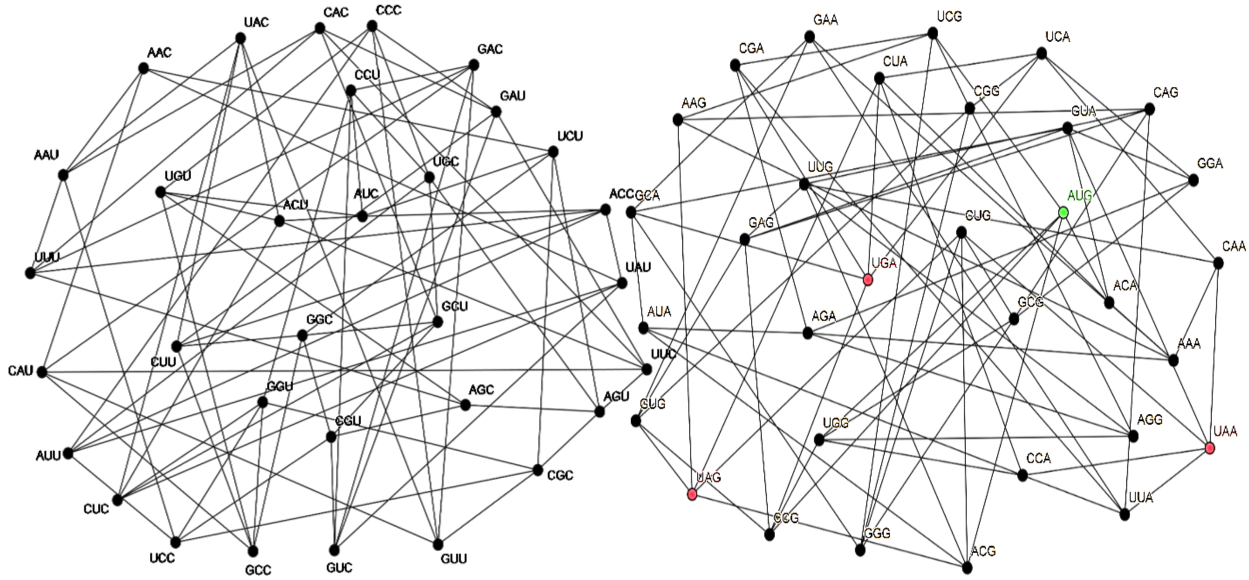
Selanjutnya pembagi nol yang telah diperoleh direpresentasikan menjadi graf pembagi nol dan graf total berdasarkan definisi yang telah diberikan sebelumnya. Pada graf pembagi nol, pembagi nol tersebut akan direpresentasikan sebagai simpul. Ring $\mathbb{Z}_{64}$ ternyata memiliki pembagi nol bilangan genap, oleh karenanya simpul yang terdapat pada graf pembagi nol adalah kodon yang bernomor genap pula. Agar lebih memudahkan dalam pembacaan graf, kodon diwarnai dengan tiga warna sesuai dengan peranannya. Kodon AUG sebagai kodon *start* diwarnai hijau sedangkan kodon UAG, UAA, dan UGA sebagai kodon *stop* diwarnai dengan warna merah. Simpul lain yang tidak mempunyai peranan khusus dalam sintesis protein diwarnai dengan warna hitam. Gambar 4 di bawah ini merupakan graf pembagi nol dari kode genetik.



Gambar 4 Graf pembagi nol pada kode genetik $K_{1,1,1,1,1,1,25}$

Berdasarkan gambar di atas, dapat dilihat bahwa kodon AGA yang mengkode asam amino arginin bertetangga dengan semua kodon. Kodon ACA (treonin) bertetangga dengan 16 kodon lain, sedangkan AUA (isoleusin) bertetangga dengan 14 kodon. Kodon yang lain hanya bertetangga dengan dua atau tiga kodon, bahkan ada juga yang hanya bertetangga dengan satu kodon. Hal ini terjadi dikarenakan adanya perbedaan ikatan hidrogen pada masing-masing asam amino tersebut. Semakin banyak hidrogen yang dimiliki oleh suatu asam amino mengakibatkan semakin mudah asam amino tersebut berkaitan dengan asam amino yang lain.

Setelah graf pembagi nol, selanjutnya akan dilakukan pembahasan tentang graf total. Simpul-simpul pada graf total berbeda dengan simpul pada graf pembagi nol. Graf pembagi nol hanya menggunakan sebagian dari jumlah kodon, sedangkan graf total menggunakan semua kodon sebagai simpulnya. Dengan demikian, semua kodon pada kode genetik dapat direpresentasikan menjadi bentuk graf agar keterhubungannya lebih mudah terbaca. Dua kodon saling terhubung pada graf total apabila jika hasil penjumlahan keduanya merupakan pembagi nol khusus. Gambar 5 di bawah ini merupakan graf total khusus dari kode genetik dengan 64 kodon.



Gambar 5 Graf total khusus pada kode genetik $K_{12,15,18,19}$

Graf total khusus yang terbentuk dari 64 kodon menghasilkan dua subgraf yang saling terpisah. Apabila Gambar 5 dipisahkan maka akan terbentuk graf dengan kodon bernomor ganjil dan graf dengan kodon bernomor genap. Berdasarkan pengertian graf total dan pemetaannya ke $\mathbb{Z}_{64}$, kodon yang bernomor ganjil hanya terhubung dengan kodon bernomor ganjil, demikian pula kodon yang bernomor genap. Agar graf lebih mudah diamati, selanjutnya dilakukan pemisalan untuk masing-masing subgraf. Graf G_1 merupakan graf kodon bernomor ganjil, sedangkan graf G_2 merupakan graf kodon bernomor genap [7]. Suatu kodon akan terhubung dengan kodon lainnya apabila kodon tersebut berbeda pada basa pertama, berbeda pada basa kedua, atau berbeda pada basa ketiga.

Suatu rantai polipeptida tentunya tidak hanya tersusun dari simpul kodon yang bernomor ganjil ataupun tidak hanya genap, tetapi mengandung kedua jenis simpul. Oleh sebab itu, diperlukan suatu fungsi yang memetakan himpunan kodon bernomor ganjil ke himpunan kodon bernomor genap maupun sebaliknya. Fungsi f didefinisikan sebagai fungsi yang memetakan G_1 ke G_2 sedangkan fungsi g memetakan G_2 ke G_1. Fungsi tersebut adalah sebagai berikut

$f: G_1 \rightarrow G_2$ sedemikian sehingga

$$f(\text{XYZ}) = \begin{cases} \text{XYA, jika Z} = \text{C} \\ \text{XYG, jika Z} = \text{U} \end{cases} \quad \forall \text{XYZ} \in G_1$$

dan $g: G_2 \rightarrow G_1$ sedemikian sehingga

$$g(\text{XYZ}) = \begin{cases} \text{XYC, jika Z} = \text{A} \\ \text{XYU, jika Z} = \text{G} \end{cases} \quad \forall \text{XYZ} \in G_2$$

Himpunan G_1 dan G_2 mempunyai perbedaan pada basa ketiga. Himpunan G_1 mempunyai pirimidin (C dan U) sebagai basa ketiga, sedangkan himpunan G_2 mempunyai purin (A dan G) pada basa ketiga.

APLIKASI GRAF TOTAL PADA KODE GENETIK

Salah satu contoh aplikasi graf total pada kode genetik dapat dilihat pada gambar di bawah ini. Gambar 5 merupakan contoh potongan barisan DNA manusia yang dipublikasikan oleh GenBank NCBI. Barisan DNA mengandung basa nitrogen Timin (T), akan tetapi pada RNA tidak memiliki timin sehingga timin digantikan dengan Urasil (U).

```
 1 gaattcttca ggtagcttcc tagggtttcc aaggcaatac aagaagaatt ttgataggca
61 ggaaaatgca tgctacatac acatattatt attctctgat ttcctttcac atgtaaaaat
```

Sumber : GenBank NCBI, https://www.ncbi.nlm.nih.gov/nuccore/BA000005.3?report=fasta

Gambar 6 Barisan DNA

Potongan barisan DNA di atas dimulai dari kodon GAA, kemudian dilanjutkan dengan UUC, UUC, dan seterusnya. Apabila dikaitkan dengan penomoran kodon, kodon GAA memiliki nomor 8. Oleh karena GAA bernomor genap, seharusnya kodon setelah GAA juga bernomor genap. Akan tetapi, kodon UUC bernomor ganjil 61. Apabila dipetakan ke himpunan G_2 maka UUC akan sama dengan kodon UUA yang bernomor 60. Kodon GAA dan UUA sudah bisa terhubung karena hasil penjumlahan nomornya merupakan elemen pembagi nol $\mathbb{Z}_{64}$. Selanjutnya kodon UUA akan kembali terhubung dengan kodon UUA (kodon UUC yang sudah dipetakan ke G_2). Setelah itu dilanjutkan dengan terhubungnya antara kodon UUA dan AGG (kodon AGG tidak perlu dipetakan karena termasuk dalam himpunan yang sama dengan UUA). Demikian proses pemetaan suatu kodon dari G_1 ke G_2 ataupun sebaliknya akan terus berlanjut hingga bertemu dengan kodon *stop*.

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan, dapat disimpulkan bahwa graf pembagi nol dan graf total sama-sama menggunakan pembagi nol dalam pembentukan graf. Pada beberapa kasus untuk nilai n yang diberikan, graf pembagi nol berbentuk graf bipartit lengkap, sedangkan graf total berbentuk graf multipartit. Graf pembagi nol pada kode genetik berbentuk graf multipartit $K_{1,1,1,1,1,1,25}$, sedangkan graf total kode genetik berbentuk graf multipartit $K_{12,15,18,19}$. Graf total membuat himpunan kodon terpisah menjadi dua bagian, yaitu kodon bernomor ganjil G_1 dan kodon bernomor genap G_2, dimana terdapat perbedaan basa ketiga pada G_1 dan G_2. Serta penentuan urutan rantai polipeptida sebaiknya menggunakan graf total karena simpul yang terdapat pada graf total mewakili semua kodon pada kode genetik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Suwarno. *Panduan Pembelajaran Biologi*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional; 2009.

[2] Sanchez R, Morgado E, dan Grau R. Gene Algebra from a Genetic Code Algebraic Structure. *J. Math Biol*. 2005; 51:431-457.

[3] Gallian JA. *Contemporary Abstract Algebra.* United States of America: Cengage Learning; 2013.

[4] Anderson DF dan Livingston PS. The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring. *Journal of Algebra*. 1998; 217:434-447.

[5] Budadoddi, K., 2016, *Some Studies On Domination Parameters Of Euler Totient Cayley Graphs, Zero Divisor Graphs And Line Graph Of Zero Divisor Graphs*. Sri Khrisnadevaraya University, Andhra Pradesh (India), (Tesis).

[6] Anderson DF dan Badawi A. The Total Graph of a Commutative Ring. *Journal of Algebra*. 2008; 320:2706-2719.

[7] Akhtar A, Ali T, dan Gohain N. Graph in Genetic Code Algebra. *Journal of Bioinformatics and Intelligent Control,* 2015; 4:1-4.

BETI RIYANTI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
beti.math13@gmail.com

MARIATUL KIFTIAH : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
frandly88@gmail.com