Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 07, No. 4 (2018), hal 335-342.

METODE ALTERNATIF DALAM MENENTUKAN DETERMINAN MATRIKS $n \times n$

Eka Fitriyani, Helmi, Eka Wulan Ramadhani

INTISARI

Setiap matriks persegi memiliki suatu skalar yang disebut determinan. Jika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *dengan* $A=\left[a_{ij}\right]$ *adalah sebuah matriks persegi dengan elemen* a_{ij}, *determinan yang dinyatakan oleh* $|A|$ *merupakan jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari matriks A. Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan determinan dari suatu matriks, salah satunya adalah metode Salihu. Metode Salihu merupakan metode yang berdasarkan pada pengembangan metode kondensasi Dodgson. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji metode Salihu dan menentukan determinan suatu matriks menggunakan metode tersebut. Metode Salihu ini mereduksi determinan matriks A menjadi determinan matriks berordo* 2×2. *Langkah pertama dalam menentukan determinan matriks kompleks dengan metode Salihu adalah dengan menentukan empat determinan unik yang dinyatakan oleh* $|C|,|D|,|E|,|F|$ *berordo* $(n-1)\times(n-1)$ *dan satu determinan interior yang dinyatakan oleh* $|B|$ *berordo* $(n-2)\times(n-2)$ *dari matriks A. Selanjutnya, menghitung nilai determinan matriks A dengan rumus* $|A|=\frac{1}{|B|}\begin{vmatrix}|C| & |D|\\ |E| & |F|\end{vmatrix}$, *dengan syarat* $|B|\neq 0$. *Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa metode Salihu merupakan salah satu metode alternatif untuk menentukan determinan dari suatu matriks berordo* $n\times n, n\geq 3$.

Kata Kunci: *Permutasi, Metode Kodensasi Dodgson*

PENDAHULUAN

Matriks adalah jajaran berbentuk persegi panjang yang diatur berdasarkan baris dan kolom yang diletakkan antara dua tanda kurung. Entri-entri dari suatu matriks dapat berupa bilangan real atau bilangan kompleks. Matriks yang entri-entrinya berupa bilangan real disebut matriks real, sedangkan matriks yang entri-entrinya berupa bilangan kompeks disebut matriks kompleks [1]. Matriks memiliki berbagai macam jenis diantaranya matriks persegi, matriks diagonal, matriks segitiga, matriks identitas, dan matriks nol. Pada matriks persegi jumlah banyaknya baris dan kolom adalah sama, sehingga sering disebut sebagai matriks $n\times n$. Himpunan semua matriks persegi dinyatakan sebagai M_n. Setiap matriks persegi mempunyai nilai tunggal yang disebut determinan [2].

Misalkan $A\in M_n$ dan $A=\left[a_{ij}\right]$, determinan dari suatu matriks *A* yang dinyatakan sebagai $\det(A)$ atau $|A|$ merupakan jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari matriks *A* [2]. Dalam menentukan nilai determinan suatu matriks ada beberapa metode yang dapat digunakan diantaranya dengan aturan Sarrus, reduksi baris, dan metode ekspansi kofaktor. Selain itu, ada juga metode kondensasi Chio dan metode kondensasi Dodgson.

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, khususnya didunia pendidikan telah banyak peneliti yang menemukan metode baru untuk menentukan determinan dari suatu matriks yang berordo lebih dari tiga. Pada tahun 2012, seorang ilmuan bernama Armend Salihu menemukan sebuah metode baru untuk menghitung determinan matriks. Metode ini berdasarkan pengembangan pada metode kondensasi Dodgson. Dalam penyelesaiannya, metode Salihu mereduksi determinan suatu matriks berordo $n\times n$ menjadi determinan matriks berordo 2×2 dengan menghitung empat determinan unik dan satu determinan interior dari suatu matriks tersebut [3]. Sehingga perhitungan dengan metode ini lebih singkat dibandingkan dengan metode dasar untuk menentukan determinan matriks yang berordo lebih dari tiga.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji tentang metode Salihu pada determinan matriks $n \times n, n \geq 3$ dan menentukan determinan dari suatu matriks dengan metode Salihu. Pada penelitian ini, matriks yang digunakan merupakan matriks berukuran $n \times n$ atas dengan $n \geq 3$.

Langkah pertama pada penelitian ini adalah menentukan bahwa matriks yang digunakan merupakan matriks $A \in M_n(\mathbb{C})$. Langkah selanjutnya adalah menentukan satu determinan interior yang dinyatakan oleh $|B|$ berordo $(n-2)\times(n-2)$ dan empat determinan unik yang dinyatakan oleh $|C|,|D|,|E|,|F|$ berordo $(n-1)\times(n-1)$ dari matriks *A*. Apabila determinan interior $|B|=0$, maka perlu dilakukan proses pertukaran baris atau kolom pada matriks *A* sedemikian sehingga determinan interior $|B| \neq 0$. Kemudian, menghitung nilai determinan matriks *A* dengan rumus $|A| = \dfrac{1}{|B|}\begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix}$, dengan syarat $|B| \neq 0$, sehingga diperoleh determinan dari matriks *A*.

DETERMINAN MATRIKS

Misalkan $A \in M_n$ dan $A = \left[a_{ij}\right]$, determinan dari suatu matriks *A* yang dinyatakan sebagai $\det(A)$ atau $|A|$ merupakan jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari matriks *A* [2]. Berikut diberikan definisi lebih jelas tentang determinan dari suatu matriks.

Definisi 1 [2] *Determinan dari matriks persegi A berordo n adalah jumlah dari semua n! hasil kali bertanda dengan entri-entri matriks A tersebut. Dengan kata lain,*

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} sign(\sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

dengan $\sigma = (j_1, j_2, \cdots, j_n)$.

Berikut ini diberikan contoh menentukan determinan matriks berdasarkan Definisi 1,

Contoh 2

Tentukan determinan dari matriks *A*, jika diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Matriks *A* merupakan matriks 2×2, maka terdapat 2 hasil kali elementer bertanda dari matriks *A* yaitu $a_{11}a_{22}$ dan $-a_{12}a_{21}$, sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

METODE KONDENSASI DODGSON

Misalkan $A \in M_n$ dengan $n \geq 3$, metode kondensasi Dodgson merupakan metode yang digunakan untuk menentukan determinan matriks *A* dengan melakukan proses kondensasi (penyusutan) terhadap matriks *A* ke dalam bentuk determinan matriks berordo $(n-1)\times(n-1)$. Proses kondensasi pada metode ini akan terus dilakukan hingga diperoleh determinan matriks yang berordo 2×2. Selain itu, ditentukan juga determinan interior yang berordo $(n-2)\times(n-2)$ dari matriks *A* yang diperoleh dengan menghilangkan baris pertama kolom pertama dan baris terakhir kolom terakhir. Selanjutnya membagi determinan matriks yang diperoleh dengan determinan interior. Perlu diketahui bahwa setiap proses kondesasi pada metode ini dilakukan dengan membagi determinan matriks yang diperoleh dengan entri-entri determinan interior yang bersesuaian dari hasil proses kondensasi. Pada langkah pertama proses kondensasi akan terbentuk determinan matriks berordo $(n-1)\times(n-1)$, misalkan *B*, dengan entri b_{ij} merupakan determinan matriks berordo 2×2 yang dibentuk secara berturut dari matriks *A*. Langkah kedua proses kondensasi akan terbentuk determinan matriks berordo $(n-2)\times(n-2)$, misalkan *C*, dengan entri c_{ij} merupakan determinan matriks berordo 3×3 yang dibentuk secara berturut dari matriks *A*. Sedemikian sehingga pada langkah ke-*i*, proses kondensasi akan membentuk determinan matriks berordo $(n-i)\times(n-i)$,misalkan *K*, dengan entri k_{ij} merupakan determinan matriks berordo $(i+1)\times(i+1)$ yang dibentuk secara berturut dari matriks *A*. Lebih jelasnya, berikut ini diberikan teorema dari metode kondensasi Dodgson yang dipaparkan pada Teorema 3.

Teorema 3 [4] *Diberikan matriks A berukuran* $n\times n$. *Misalkan B adalah interior dari matriks A berukuran* $(n-2)\times(n-2)$ *yang diperoleh dengan menghapus baris pertama, baris terakhir, kolom pertama dan kolom terakhir, sedangkan C adalah matriks berukuran* $(n-1)\times(n-1)$ *yang diperoleh dengan menggantikan* c_{ij} *oleh* $\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i(j+1)} \\ a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} \end{vmatrix}$, *maka*

$$|A| = \frac{|C|}{|B|}, |B| \neq 0 .$$

METODE SALIHU PADA DETERMINAN MATRIKS

Metode Salihu merupakan metode yang digunakan untuk menentukan nilai determinan dari suatu matriks berordo $n\times n$. Metode ini juga merupakan metode yang didasarkan pada pengembangan metode kondensasi Dodgson. Perbedaannya adalah metode Salihu diselesaikan dengan mereduksi determinan matriks berordo $n\times n$ menjadi determinan matriks berordo 2×2. Pengembangan metode Salihu ini lebih berdasarkan pada metode kondensasi Dodgson, karena matriks berordo 2×2 pada metode Salihu merupakan matriks 2×2 yang terbentuk dari proses ke-$(i-1)$ pada metode kondensasi Dodgson.

Pada metode Salihu, proses perhitungan dilakukan dengan menentukan dan menghitung empat determinan unik dari matriks berukuran $(n-1)\times(n-1)$ yang diperoleh dengan menghilangkan baris terakhir kolom terakhir, baris terakhir kolom pertama, baris pertama kolom terakhir, dan baris pertama kolom pertama dari matriks berukuran $n\times n$ serta menentukan satu determinan interior dari matriks berukuran $(n-2)\times(n-2)$ yang diperoleh dengan menghilangkan baris pertama kolom pertama dan baris terakhir kolom terakhir dari matriks berukuran $n\times n$, dengan syarat determinan interior berukuran $(n-2)\times(n-2)\neq 0$. Apabila determinan interior adalah nol, maka perlu dilakukan pertukaran baris atau kolom pada matriks *A* sedemikian sehingga determinan interiornya tidak sama dengan nol. Berikut diberikan teorema tentang metode Salihu.

Teorema 3 [3] *Setiap determinan matriks yang berordo* $n\times n, n\geq 3$ *dapat direduksi menjadi determinan berordo* 2×2, *dengan menghitung 4 determinan berordo* $(n-1)\times(n-1)$ *dan 1 determinan berordo* $(n-2)\times(n-2)$ *dengan syarat determinan berordo* $(n-2)\times(n-2)$ *tidak sama dengan nol. Dengan kata lain,*
jika $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, *dengan* $n\geq 3$ *maka*

$$|A| = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix},\ |B| \neq 0$$

d*engan B adalah matriks berordo* $(n-2)\times(n-2)$. *Sedangkan C, D, E, dan F adalah matriks berordo* $(n-1)\times(n-1)$.

Bukti:

Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Misalkan C, D, E, dan F merupakan matriks berordo $(n-1)\times(n-1)$ yang diperoleh dari matriks A, sehingga $|C|,|D|,|E|,|F|$ adalah determinan matriks berordo $(n-1)\times(n-1)$ dan misalkan B merupakan matriks berordo $(n-2)\times(n-2)$ yang diperoleh dari matriks A, sehingga $|B|$ adalah determinan matriks berordo $(n-2)\times(n-2)$ dan diasumsikan $|B| \neq 0$.

Selanjutnya, dengan menggunakan induksi matematika dibuktikan bahwa metode Salihu merupakan pengembangan dari metode kondensasi Dodgson dan berlaku untuk matriks berordo $n\times n$,

(i) Dibuktikan untuk $n = 3$,

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

maka

$$|A| = \frac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix}}{a_{22}}$$

$$= \frac{1}{a_{22}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix}$$

Jadi, terbukti untuk $n = 3$ benar.■

(ii) Diasumsikan untuk $n=k$ benar, maka

$$|A| = \frac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1(k-1)} & a_{1k} \\ a_{2(k-1)} & a_{2k} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{2(k-1)} & a_{2k} \\ a_{3(k-1)} & a_{3k} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} \\ a_{k1} & a_{k2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{(k-1)2} & a_{(k-1)3} \\ a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{(k-1)(k-1)} & a_{(k-1)k} \\ a_{k(k-1)} & a_{kk} \end{vmatrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(k-1)} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1)2} & a_{(k-1)3} & \cdots & a_{(k-1)(k-1)} \end{vmatrix}}$$

Perlu diketahui bahwa langkah pertama proses kondensasi akan membentuk determinan berordo 2×2 secara berturut dari matriks *A*, sehingga terbentuk determinan matriks berordo $(n-1)\times(n-1)$. Pada langkah kedua akan membentuk determinan matriks berordo 3×3, sehingga terbentuk determinan matriks berordo $(n-2)\times(n-2)$. Pada langkah ke-*i* proses kondensasi akan membentuk determinan matriks berordo $(i+1)\times(i+1)$ dan matriks $k\times k$ terbentuk pada proses ke-$(k-1)$. Sehingga, pada langkah ke-$(k-2)$ proses kondensasi pada matriks $k\times k$ terbentuk detererminan berordo 2×2, yaitu

$$|A| = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(k-1)} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1)2} & a_{(k-1)3} & \cdots & a_{(k-1)(k-1)} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \cdots & a_{(k-1)(k-1)} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1)2} & a_{(k-1)3} & \cdots & a_{(k-1)k} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{k(k-1)} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix}$$

dengan asumsi $|B|\neq 0$, dimana matriks *A* berordo $k\times k$, matriks *B* berordo $(k-2)\times(k-2)$ yang diperoleh dengan menghilangkan baris pertama kolom pertama dan baris terakhir kolom terakhir dari matriks *A*, sedangkan matriks *C*, *D*, *E*, *F* berordo $(k-1)\times(k-1)$ yang diperoleh dengan menghilangkan baris terakhir kolom terakhir, baris terakhir kolom pertama, baris pertama kolom terakhir, dan baris pertama kolom pertama dari matriks *A*.

(iii) Dibuktikan untuk $n = k+1$ benar,

Misalkan matriks berordo $(k+1)\times(k+1)$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \cdots & a_{(k+1)(k+1)} \end{bmatrix}$$

maka

$$|A'| = \frac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{1(k+1)} \\ a_{2k} & a_{2(k+1)} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{2k} & a_{2(k+1)} \\ a_{3k} & a_{3(k+1)} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{k1} & a_{k2} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{k2} & a_{k3} \\ a_{(k+1)2} & a_{(k+1)3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{kk} & a_{k(k+1)} \\ a_{(k+1)k} & a_{(k+1)(k+1)} \end{vmatrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}}$$

Berdasarkan pada (ii), pada langkah ke-*i* proses kondensasi akan membentuk determinan matriks berordo $(i+1)\times(i+1)$. Sehingga, pada langkah ke-$(k-1)$ proses kondensasi pada matriks $(k+1)\times(k+1)$ akan membentuk determinan berordo $k\times k$ dan terbentuk detererminan matriks berordo 2×2, sehingga diperoleh

$$|A'| = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(k+1)} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{k(k+1)} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \cdots & a_{(k+1)k} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(k+1)} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k+1)2} & a_{(k+1)3} & \cdots & a_{(k+1)(k+1)} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|B'|} \begin{vmatrix} |C'| & |D'| \\ |E'| & |F'| \end{vmatrix}$$

Misalkan $|C'|, |D'|, |E'|, |F'|$ adalah determinan unik dari matriks A', sehingga C', D', E', F' adalah matriks berordo $k\times k$ yang diperoleh dengan menghilangkan baris terakhir kolom terakhir, baris terakhir kolom pertama, baris pertama kolom terakhir, dan baris pertama kolom pertama dari matriks A'. Misalkan $|B'|$ adalah determinan interior dari A', sehingga B' berordo $(k-1)\times(k-1)$

yang diperoleh dengan menghilangkan baris pertama, baris terakhir, kolom pertama, dan kolom terakhir dari matriks A'.

Berdasarkan pada (i), (ii), dan (iii) maka terbukti bahwa menentukan determinan dari matriks *A* dengan metode Salihu adalah

$$|A| = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix}, |B| \neq 0 .$$

Contoh 4

Diberikan matriks *A* berukuran 5×5 sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & 1-i & i & 2+2i \\ 3 & i & 1-2i & -2 & -i \\ -i & 2-i & 2 & 1-2i & 1-i \\ 1-i & -1 & 1+i & -1+i & 1 \\ 2+2i & 1+i & -2i & -1-i & 2i \end{bmatrix}$$

Tentukan determinan dari matriks *A* dengan menggunakan metode Salihu.

Penyelesaian:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+i & 1 & 1-i & i & 2+2i \\ 3 & i & 1-2i & -2 & -i \\ -i & 2-i & 2 & 1-2i & 1-i \\ 1-i & -1 & 1+i & -1+i & 1 \\ 2+2i & 1+i & -2i & -1-i & 2i \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} i & 1-2i & -2 \\ 2-i & 2 & 1-2i \\ -1 & 1+i & -1+i \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1+i & 1 & 1-i & i \\ 3 & i & 1-2i & -2 \\ -i & 2-i & 2 & 1-2i \\ 1-i & -1 & 1+i & -1+i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1-i & i & 2+2i \\ i & 1-2i & -2 & -i \\ 2-i & 2 & 1-2i & 1-i \\ -1 & 1+i & -1+i & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & i & 1-2i & -2 \\ -i & 2-i & 2 & 1-2i \\ 1-i & -1 & 1+i & -1+i \\ 2+2i & 1+i & -2i & -1-i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} i & 1-2i & -2 & -i \\ 2-i & 2 & 1-2i & 1-i \\ -1 & 1+i & -1+i & 1 \\ 1+i & -2i & -1-i & 2i \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{-15-8i}\begin{vmatrix} 25-66i & -1+61i \\ -15+9i & 12-42i \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{-15-8i}\left(-1938-918i\right)$$

$$= 126-6i$$

Jadi, diperoleh nilai determinan dari matriks *A* adalah $126-6i$.

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang dipaparkan maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Metode Salihu merupakan metode alternatif dalam menentukan determinan berordo $n \times n$. Metode Salihu juga merupakan metode yang berdasarkan pada pengembangan metode kondensasi Dodgson. Metode ini mereduksi determinan matriks berukuran $n \times n$ menjadi determinan matriks berukuran 2×2, hal ini dilakukan dengan cara menentukan empat determinan unik berukuran $(n-1)\times(n-1)$ dan menentukan satu determinan interior berukuran $(n-2)\times(n-2)$ dari matriks berukuran $n \times n$,

dengan syarat determinan matriks berukuran $(n-2)\times(n-2)\neq 0$.

2. Determinan suatu matriks kompleks juga dapat ditentukan dengan menggunakan metode Salihu. Berikut diberikan langkah-langkah dalam menentukan determinan matriks dengan metode Salihu,
   a. Misalkan matriks $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   b. Tentukan determinan interior $|B|$ dan determinan unik $|C|,|D|,|E|,|F|$ dari suatu matriks *A*, dengan $|B|\neq 0$
   c. Hitunglah determinan dari *A* dengan rumus

$$|A|=\frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix}$$

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Leon, SJ. *Aljabar Linear dan Aplikasinya.* ke-5 ed. Jakarta: Erlangga; 2001

[2]. Anton, H & Rorres, C. *Aljabar Linear Elementer.* Ke-8 ed. Jakarta: Erlangga; 2004

[3]. Salihu, A. New Method to Calculate Determinants of Matrix, by Reducing Determinants to 2nd Order. *International Journal of Algebra*.2012;6: 913-917.

[4]. Abeles, F. Determinants and Linear Systems. *The British Journal for the History of Science*. 2009;19(03): 331-335.

EKA FITRIYANI : FMIPA UNTAN, Pontianak, ekafitriyani69@gmail.com
HELMI : FMIPA UNTAN, Pontianak, helmi132205@yahoo.co.id
EKA WULAN RAMADHANI : FMIPA UNTAN, Pontianak, wulan2890@gmail.com