Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 07, No. 4 (2018), hal 247– 254.

METODE CRAMER UNTUK MENENTUKAN SOLUSI SISTEM PERSAMAAN INTERVAL LINEAR

Misnawati, Helmi, Eka Wulan Ramadhani

INTISARI

Sistem Persamaan Interval (SPL) dengan koefisien-koefisien berupa interval dapat membentuk sebuah Sistem Persamaan Interval Linear (SPIL) yang merupakan perluasan dari SPL. Bentuk umum dari SPIL dapat ditulis sebagai $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Untuk memperoleh solusi dari SPIL digunakan matriks dengan entri berupa interval sebagaimana pada SPL. Dalam hal ini, matriks yang digunakan adalah matriks interval dengan entri-entri berupa interval. Salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan SPIL adalah dengan menggunakan metode Cramer. Metode ini dimulai dengan mengubah sistem persamaan interval linear ke dalam bentuk matriks interval $\tilde{A}$, kemudian menentukan matriks midpoint yang merupakan titik tengah pada masing-masing entri dari matriks interval. Kemudian menentukan determinan dari matriks $\tilde{A}$ dan diperoleh nilai x_1 dan x_2. Kemudian dihitung nilai gradien untuk menentukan elemen matriks baru dan jika ${x_i}^{(n+1)} > {x_i}^{(n)}$ maka didapat nilai $x_i = [\underline{x}, \overline{x}]$ yang diperoleh dari nilai x_i sebelumnya.

Kata kunci: *aritmatika interval, metode cramer.*

PENDAHULUAN

Ilmu aljabar merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang diantaranya mempelajari tentang SPL dan matriks. Suatu persamaan linear dalam n variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan suatu persamaan dalam bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, dengan $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta real. Sejumlah persamaan linear yang banyaknya berhingga dalam variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ disebut SPL [1].

Suatu SPL dengan koefisien-koefisien berupa interval dapat membentuk sebuah SPIL yang merupakan perluasan dari SPL untuk koefisien-koefisiennya berupa interval [2]. Bentuk umum dari SPIL dapat ditulis sebagai $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Menentukan solusi dari suatu SPL yang memuat persamaan dan variabel dapat menggunakan matriks. Secara umum entri-entri pada suatu matriks dapat berupa bilangan real atau bilangan kompleks, tetapi pada perkembangannya entri-entri matriks dapat juga berupa suatu interval yang disebut dengan matriks interval [3].

Matriks interval yaitu matriks yang entri-entrinya berupa interval, yang memiliki nilai *lower endpoint* dan *upper endpoint*. Matriks interval sama halnya dengan matriks real, yang memiliki operasi aritmatika untuk menyelesaikan persoalan pada matriks tersebut. Operasi aritmatika pada matriks interval didasarkan pada operasi aritmatika dalam interval. Operasinya dapat berupa penjumlahan, pengurangan, perkalian dan invers.

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan interval linear dengan menggunakan metode Cramer. Pada penelitian ini, entri-entri pada matriks interval berupa interval tertutup karena hanya berhubungan dengan *lower endpoint* dan *upper endpoint*.

Pada penelitian ini dimulai dengan menentukan matriks *midpoint* dari matriks interval $\tilde{A}$, kemudian menghitung nilai gradien dengan variabel baru $\nabla x_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial a_{11}}, \frac{\partial x_1}{\partial a_{12}}, \dots, \frac{\partial x_1}{\partial a_{nn}}, \frac{\partial x_1}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial x_1}{\partial b_n}\right)$.

Selanjutnya menentukan elemen matriks baru untuk menentukan *lower endpoint* dengan menggunakan ${a_{ij}}^{(n+1)} = {a_{ij}}^n - 0.01(\nabla x_i)$, untuk menentukan *upper endpoint* menggunakan ${a_{ij}}^{(n+1)} = {a_{ij}}^n + 0.01(\nabla x_i)$. Kemudian jika ${x_i}^{(n+1)} < {x_i}^{(n)}$ maka iterasi kembali dengan menentukan nilai nilai gradien baru, sedangkan jika ${x_i}^{(n+1)} > {x_i}^{(n)}$ maka didapat nilai $x_i = [\underline{x}, \overline{x}]$ yaitu nilai x_i yang diperoleh sebelumnya.

ARITMATIKA INTERVAL

Interval adalah himpunan bilangan-bilangan real yang ditunjukkan sebagai suatu pasangan berurut dan dinyatakan dalam suatu ketaksamaan. Suatu ketaksamaan interval dinyatakan dalam bentuk interval tertutup (**IR**) pada garis real. Didefinisikan bahwa interval tertutup merupakan himpunan semua bilangan real x yang dinyatakan dalam suatu ketaksamaan $\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$ untuk sebarang konstanta real $\underline{x}$ dan $\overline{x}$ dengan $\underline{x} \leq \overline{x}$ dan dinotasikan dengan $[\underline{x}, \overline{x}]$ [4].

Pada suatu interval $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$; dengan $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$ dikenal istilah titik tengah (*midpoint*) dan lebar (*width*) yang masing-masing didefinisikan sebagai berikut:

1. Titik tengah dari interval $\tilde{x}$ yang disebut *midpoint* $\tilde{x}$, dapat dituliskan sebagai berikut:
$$m(\tilde{x}) = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}$$
2. Lebar dari suatu interval $\tilde{x}$ yang disebut *width* $\tilde{x}$, dapat dituliskan sebagai berikut:
$$w(\tilde{x}) = \overline{x} - \underline{x}$$

Misal diberikan dua interval yaitu $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ dan $\tilde{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$; $\tilde{x}, \tilde{y} \in$ **IR**, sifat-sifat yang memenuhi operasi aritmatika interval $\tilde{x} * \tilde{y}$ adalah sebagai berikut [4]:

1. $\tilde{x} + \tilde{y} = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}]$.
2. $\tilde{x} - \tilde{y} = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}]$.
3. $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = \left[min\left\{\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\right\}, max\left\{\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\right\}\right]$.
4. $\tilde{x} \div \tilde{y} = \tilde{x} \cdot \frac{1}{\tilde{y}} = [\underline{x}, \overline{x}] \cdot \frac{1}{[\underline{y}, \overline{y}]}$, dengan $\frac{1}{[\underline{y}, \overline{y}]} = \left[\frac{1}{\overline{y}}, \frac{1}{\underline{y}}\right]$ untuk $0 \notin \tilde{y}$.
5. $\alpha + \tilde{x} = [\alpha + \underline{x}, \alpha + \overline{x}]$.
6. $\alpha \cdot \tilde{x} = [min\{\alpha \cdot \underline{x}, \alpha \cdot \overline{x}\}, max\{\alpha \cdot \underline{x}, \alpha \cdot \overline{x}\}]$.
7. Negatif dari suatu interval $\tilde{x}$ adalah
$$-\tilde{x} = [-\overline{x}, -\underline{x}]$$

MATRIKS INTERVAL DAN SISTEM PERSAMAAN INTERVAL LINEAR

Misalkan $\tilde{A}$ matriks berukuran $m \times n$, maka matriks interval dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\tilde{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix} = (\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$$

dengan $\tilde{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}] \in$ **IR**, untuk sebarang $\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}$ yang memenuhi $\underline{a}_{ij} \leq \overline{a}_{ij}$. Selanjutnya, untuk menyatakan himpunan semua matriks interval yang berukuran $m \times n$ digunakan notasi $M_{m\times n}$**(IR).**

Pada matriks interval juga dikenal istilah *midpoint* dan *width*. *Midpoint* dari matriks interval $\tilde{A}$ merupakan matriks dengan entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut.

$$m(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} m(\tilde{a}_{11}) & \cdots & m(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m(\tilde{a}_{m1}) & \cdots & m(\tilde{a}_{mn}) \end{bmatrix}$$

dan *width* matriks interval $\tilde{A}$ merupakan matriks dengan entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut:

$$w(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} w(\tilde{a}_{11}) & \cdots & w(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w(\tilde{a}_{m1}) & \cdots & w(\tilde{a}_{mn}) \end{bmatrix}$$

dengan entri-entri matriks $w(\tilde{A})$ selalu non negatif [2].

Aritmatika matriks interval merupakan generalisasi dari aritmatika matriks real, operasi yang digunakan sebelumnya pada aritmatika matriks interval menggunakan aturan-aturan yang berlaku pada operasi aritmatika interval. Berikut ini diberikan definisi mengenai operasi aritmatika pada matriks interval.

Definisi 1 [2] *Jika* $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbf{M}(\mathbf{IR})^{m\times n}, \tilde{C} \in \mathbf{M}(\mathbf{IR})^{n\times r}, \tilde{x} \in \mathbf{M}(\mathbf{IR})^{n}$ *dan* $\tilde{\alpha} \in \mathbf{IR}$, *maka berlaku:*

1. $\tilde{\alpha}\tilde{A} = \left(\tilde{\alpha}\tilde{a}_{ij}\right)_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$
2. $\tilde{A} + \tilde{B} = \left(\tilde{a}_{ij} + \tilde{b}_{ij}\right)_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$
3. $\tilde{A} - \tilde{B} = \left(\tilde{a}_{ij} - \tilde{b}_{ij}\right)_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$
4. $\tilde{A}\tilde{C} = \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{ik}\tilde{c}_{kj}\right)_{1\le i\le m,\ 1\le j\le r}$
5. $\tilde{A}\tilde{x} = \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\,\tilde{x}_j\right)_{1\le i\le m}$

Suatu sistem sebarang dari m persamaan interval linear dengan n faktor yang tidak diketahui dapat ditulis sebagai:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{a}_{11}\tilde{x}_1 & +\tilde{a}_{12}\tilde{x}_2 & +\cdots & +\tilde{a}_{1n}\tilde{x}_n & = \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{21}\tilde{x}_1 & +\tilde{a}_{22}\tilde{x}_2 & +\cdots & +\tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n & = \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1}\tilde{x}_1 & +\tilde{a}_{m2}\tilde{x}_2 & +\cdots & +\tilde{a}_{mn}\tilde{x}_n & = \tilde{b}_m \end{array}$$

dengan $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ adalah faktor yang tidak diketahui, $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ merupakan konstanta.

METODE CRAMER

Teorema 1 [2] *Diberikan sebuah sistem persamaan interval linear* $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. *Jika matriks interval* $\tilde{A}$ *berordo* $n \times n$ *punya invers, maka dapat diperoleh penyelesaian* $\tilde{x} = [\tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2 \quad \tilde{x}_3 \quad \dots \quad \tilde{x}_n]$ *dari* $\tilde{A}\tilde{x} \equiv \tilde{b}$, *dengan* $\tilde{x}_i = \frac{det\ (\tilde{A}_i)}{det(\tilde{A})}$ *dan* $\tilde{A}_i$ *matriks interval dengan mengganti kolom dari* $\tilde{A}$ *dengan vektor* $\tilde{b} = [\tilde{b}_1 \quad \tilde{b}_2 \quad \tilde{b}_3 \quad \dots \quad \tilde{b}_n]$.

Berikut langkah-langkah menentukan solusi sistem persamaan interval linear dengan metode Cramer

Langkah 1 : Menentukan matriks *midpoint* dari matriks interval.

Langkah 2: Menghitung gradien yang berkaitan dengan variabel baru.

$$\nabla x_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_{11}}, \frac{\partial x_i}{\partial a_{12}}, \dots, \frac{\partial x_i}{\partial a_{nn}}, \frac{\partial x_i}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial x_i}{\partial b_n}\right) \quad i = 1, \dots, n$$

dengan $x_i = f_i(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{nn}, b_1, \dots, b_n)$, $i = 1,2, \dots, n$.

atau pada matriks berordo 2×2 dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial a_{11}} &= \frac{a_{22}(b_2a_{12} - a_{22}b_1)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial a_{12}} &= \frac{a_{22}(a_{21}b_1 - b_2a_{11})}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial a_{21}} &= \frac{a_{12}(b_1a_{22} - a_{12}b_2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial a_{22}} &= \frac{a_{12}(a_{11}b_2 - a_{21}b_1)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial b_1} &= \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial b_2} &= \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Langkah 3: Menentukan elemen matriks baru adalah sebagai berikut:

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}, b_1, \dots, b_n)^{(m+1)} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots,$$

$$a_{nn}, b_1, \dots, b_n)^{(n)} - \mu\left(\frac{\partial x}{\partial a_{11}}, \frac{\partial x}{\partial a_{12}}, \dots, \frac{\partial x}{\partial a_{nn}}, \frac{\partial x}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial b_n}\right)$$

Langkah 4: Jika ${x_i}^{(n+1)} < {x_i}^{(n)}$ maka iterasi kembali ke langkah 2, jika ${x_i}^{(n+1)} > {x_i}^{(n)}$ maka didapat nilai $x_i = [\underline{x}, \overline{x}]$ yang diperoleh dari nilai x_i sebelumnya.

Contoh : Diberikan suatu sistem persamaan interval linear berikut:

$$[3,5]\tilde{x}_1 + [1,2]\tilde{x}_2 = [1,7]$$
$$[0,2]\tilde{x}_1 + [6,7]\tilde{x}_2 = [-1,1]$$

Langkah pertama diubah sistem persamaan interval linear ke dalam bentuk persamaan matriks interval sehingga diperoleh matriks interval $\tilde{A}$ dan $\tilde{b}$ sebagai berikut:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [3,5] & [1,2] \\ [0,2] & [6,7] \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} [1,7] \\ [-1,1] \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan solusi sistem persamaan interval linear dengan metode Cramer langkah-langkahnya sebagai berikut:

Untuk menentukan nilai $\underline{x}_i$.

1. Iterasi 1

Dari matriks $\tilde{A}$ dan $\tilde{b}$ diperoleh matriks *midpoint*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 1 & 6.5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian menentukan A_i yang dibentuk dari matriks A dengan mengganti kolom ke$-i$ dengan b. diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 1 & 6.5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \ A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 0 & 6.5 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian, diperoleh determinan dari A, A_1 dan A_2 sebagai berikut:

$\det A = 24.5$, $\det A_1 = 26$, $\det A_2 = -4$

kemudian diperoleh $\underline{x}_i$ sebagai berikut:

$${x_1}^{(1)} = \frac{\det A_1}{\det A} = 1.0612$$
$${x_2}^{(1)} = \frac{\det A_2}{\det A} = -0.1633$$

2. Iterasi 2

Berdasarkan persamaan (1.1) diperoleh nilai gradien sebagai berikut:

$\frac{\partial x}{\partial a_{11}} = -0.2815$ $\quad \frac{\partial x}{\partial a_{12}} = 0.0433$ $\quad \frac{\partial x}{\partial b_1} = 0.2653$

$\frac{\partial x}{\partial a_{21}} = 0.0650$ $\quad \frac{\partial x}{\partial a_{22}} = -0.0100$ $\quad \frac{\partial x}{\partial b_2} = -0.0612$

Selanjutnya diasumsikan $\mu = 0{,}01$ untuk mendapatkan a_{ij} sebagai berikut:

$${a_{ij}}^{(2)} = {a_{ij}}^{(1)} - 0.01(\nabla f)$$

diperoleh

$${a_{ij}}^{(2)} = (4,1.5,1,6.5,4,0) - 0.01(-0.2815,0.0433,0.0650,-0.0100,0.2653,-0.0612)$$
$$= (4.0141,1.4978,0.9968,6.5005,3.9867,0.0031)$$

Sehingga didapat elemen matriks baru yaitu

$A = \begin{bmatrix} 4.0028 & 1.4996 \\ 0.9994 & 6.5001 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3.9973 \\ 0.0006 \end{bmatrix}$
$A_1 = \begin{bmatrix} 3.9973 & 1.4996 \\ 0.0006 & 6.5001 \end{bmatrix}$
$A_2 = \begin{bmatrix} 4.0028 & 3.9973 \\ 0.9994 & 0.0006 \end{bmatrix}$

Kemudian, diperoleh determinan dari A, A_1 dan A_2 sebagai berikut:

$\det A = 24.5201, \det A_1 = 25.9822, \det A_2 = -3.9923$
diperoleh

$$\begin{bmatrix} 4.0028 & 1.4996 \\ 0.9994 & 6.5001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.9973 \\ 0.0006 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(2)} = 1.0596$$

$$x_2^{(2)} = -0.1628$$

karena $x_i^2 < x_i^1$ maka iterasi dilanjutkan.

Kemudian lanjutkan hingga ke iterasi 55 sebagai berikut.

3. Iterasi 55
Berdasarkan persamaan (1.1) diperoleh nilai gradien sebagai berikut:

$\frac{\partial x}{\partial a_{11}} = -0.2508$ $\frac{\partial x}{\partial a_{12}} = 0.0361$ $\frac{\partial x}{\partial b_1} = 0.2550$
$\frac{\partial x}{\partial a_{21}} = 0.0570$ $\frac{\partial x}{\partial a_{22}} = -0.0082$ $\frac{\partial x}{\partial b_2} = -0.0580$

Selanjutnya diasumsikan $\mu = 0{,}01$ untuk mendapatkan a_{ij} sebagai berikut:

$$a_{ij}^{(55)} = a_{ij}^{(54)} - 0.01(\nabla f)$$

diperoleh

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(55)} &= (4.1409, 1.4790, 0.9678, 6.5048, 3.8621, 0.0316) \\ &\quad - 0.01(-0.2508, 0.0361, 0.0570, -0.0082, 0.2550, 0.0580) \\ &= (4.1434, 1.4786, 0.9703, 6.5049, 3.8647, 0.0322) \end{aligned}$$

Sehingga didapat elemen matriks baru yaitu

$A = \begin{bmatrix} 4.1434 & 1.4786 \\ 0.9703 & 6.5049 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3.8647 \\ 0.0322 \end{bmatrix}$

$A_1 = \begin{bmatrix} 3.8647 & 1.4786 \\ 0.0322 & 6.5049 \end{bmatrix}$

$A_2 = \begin{bmatrix} 4.1434 & 3.3612 \\ 0.9703 & 0.0322 \end{bmatrix}$

Kemudian, diperoleh determinan dari A, A_1 dan A_2 sebagai berikut:

$\det A = 25.5177, \det A_1 = 25.0916, \det A_2 = -3.6168$

diperoleh

$$\begin{bmatrix} 4.1434 & 1.4786 \\ 0.9703 & 6.5049 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(55)} \\ x_2^{(55)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.8647 \\ 0.0322 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(55)} = 0.9833$$

$$x_2^{(55)} = -0.1417$$

karena $x_i^{55} > x_i^{54}$ maka iterasi dihentikan.
Sehingga diperoleh $\underline{x}_i$ yaitu nilai x_i yang diperoleh sebelumnya

$$\underline{x}_1 = 0.9833$$

$$\underline{x}_2 = -0.1417$$

Kemudian menentukan $\overline{x}_i$.

1. Iterasi 1

Menentukan matriks *midpoint* masing-masing entri dari matriks interval diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 1 & 6.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian menentukan A_i yang dibentuk dari matriks A dengan mengganti kolom ke$-i$ dengan b. diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 1 & 6.5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \ A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 0 & 6.5 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian, diperoleh determinan dari $\tilde{A}, \tilde{A}_1$ dan $\tilde{A}_2$ sebagai berikut:

$\det A = 24.5, \det A_1 = 26, \det A_2 = -4$

kemudian diperoleh $\overline{x}_i$ sebagai berikut:

$$x_1^{(1)} = \frac{\det A_1}{\det A} = 1.0612$$

$$x_2^{(1)} = \frac{\det A_2}{\det A} = -0.1633$$

2. Iterasi 2

Berdasarkan persamaan (1.1) diperoleh nilai gradien sebagai berikut:

$\frac{\partial x}{\partial a_{11}} = -0.2815$ $\frac{\partial x}{\partial a_{12}} = 0.0433$ $\frac{\partial x}{\partial b_1} = 0.2653$

$\frac{\partial x}{\partial a_{21}} = 0.0650$ $\frac{\partial x}{\partial a_{22}} = -0.0100$ $\frac{\partial x}{\partial b_2} = -0.0612$

Selanjutnya diasumsikan $\mu = 0{,}01$ untuk mendapatkan a_{ij} sebagai berikut:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + 0.01(\nabla f)$$

diperoleh

$$a_{ij}^{(2)} = (4,1.5,1,6.5,4,0) + 0.01(-0.2815,0.0433,0.0650,-0.0100,0.2653,-0.0612)$$
$$= (4.0141,1.4978,0.9968,6.5005,3.9867,0.0031)$$

Sehingga didapat elemen matriks baru yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 3.9972 & 1.5004 \\ 1.0006 & 6.4999 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4.0027 \\ -0.0006 \end{bmatrix}$$

$A_1 = \begin{bmatrix} 4.0027 & 1.5004 \\ -0.0006 & 6.4999 \end{bmatrix}$
$A_2 = \begin{bmatrix} 3.9972 & 4.0027 \\ 1.0006 & -0.0006 \end{bmatrix}$
Kemudian,diperoleh determinan dari A, A_1 dan A_2 sebagai berikut:

$\det A = 24.4799$, $\det A_1 = 26.0178$, $\det A_2 = -4.0077$

diperoleh

$$\begin{bmatrix} 3.9972 & 1.5004 \\ 1.0006 & 6.4999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0027 \\ -0.0006 \end{bmatrix}$$
$$x_1^{(2)} = 1.0628$$
$$x_2^{(2)} = -0.1637$$

karena $x_i^2 < x_i^1$ maka iterasi dilanjutkan.

Kemudian lanjutkan hingga ke iterasi 33 sebagai berikut.

3. Iterasi 33

Berdasarkan persamaan (1.1) diperoleh nilai gradien sebagai berikut:

$\frac{\partial x}{\partial a_{11}} = -0.3033$ $\quad \frac{\partial x}{\partial a_{12}} = 0.0485$ $\quad \frac{\partial x}{\partial b_1} = 0.3139$
$\frac{\partial x}{\partial a_{21}} = 0.0707$ $\quad \frac{\partial x}{\partial a_{22}} = -0.0113$ $\quad \frac{\partial x}{\partial b_2} = -0.0635$

Selanjutnya diasumsikan $\mu = 0{,}01$ untuk mendapatkan a_{ij} sebagai berikut:
$$a_{ij}^{(33)} = a_{ij}^{(32)} + 0.01(\nabla f)$$
diperoleh

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(33)} &= (3.9096, 1.5142, 1.0210, 6.4938, 4.0833, -0.0193) \\ &\quad + 0.01(-0.3033, 0.0485, 0.0707, -0.0113, 0.2724, -0.0635) \\ &= (3.9065, 1.5147, 1.0217, 6.4937, 4.0802, -0.0223) \end{aligned}$$

Sehingga didapat elemen matriks baru yaitu
$A = \begin{bmatrix} 3.9065 & 1.5147 \\ 1.0217 & 6.4937 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4.0802 \\ -0.0223 \end{bmatrix}$
$A_1 = \begin{bmatrix} 4.0802 & 1.5147 \\ -0.0223 & 6.4937 \end{bmatrix}$
$A_2 = \begin{bmatrix} 3.9065 & 4.0802 \\ 1.0217 & -0.0223 \end{bmatrix}$
Kemudian, diperoleh determinan dari A, A_1 dan A_2 sebagai berikut:
$\det A = 23.8202$, $\det A_1 = 26.5297$, $\det A_2 = -4.2560$
diperoleh

$$\begin{bmatrix} 3.9065 & 1.5147 \\ 1.0217 & 6.4937 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(33)} \\ x_2^{(33)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0802 \\ -0.0223 \end{bmatrix}$$
$$x_1^{(33)} = 1.1137$$
$$x_2^{(33)} = -0.1787$$

karena $x_i^{(33)} > x_i^{(32)}$ maka iterasi dihentikan.
Sehingga diperoleh $\bar{x}_i$ yaitu nilai yang diperoleh dari nilai x_i sebelumnya
$$\bar{x}_1 = 1.1137$$
$$\bar{x}_2 = -0.1787$$

Dari contoh diperoleh nilai $\tilde{x}_1$ sebagai berikut:

$$[\underline{x}_1, \overline{x}_1] = [0.9832, 1.1134]$$

dan $\tilde{x}_2$ sebagai berikut

$$[\overline{x}_2, \underline{x}_2] = [-0.1787, -0.1414]$$

PENUTUP

Langkah-langkah mencari solusi sitem persamaan interval linear dengan menggunakan metode Cramer:

1. Menentukan matriks *midpoint* dari matriks interval $\tilde{A}$ dan $\tilde{b}$.
2. Menghitung gradien dengan variabel baru.
$$\nabla x_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial a_{11}}, \frac{\partial x_1}{\partial a_{12}}, \dots, \frac{\partial x_1}{\partial a_{nn}}, \frac{\partial x_1}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial x_1}{\partial b_n}\right)$$
3. Menentukan elemen matriks baru dan diasumsikan bahwa $\mu = 0{,}01$ sebagai berikut:
$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}, b_1, \dots, b_n)^{(n+1)} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}, b_1, \dots, b_n)^{(m)} - \mu\left(\frac{\partial x}{\partial a_{11}}, \frac{\partial x}{\partial a_{12}}, \dots, \frac{\partial x}{\partial a_{nn}}, \frac{\partial x}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial b_n}\right)$$
4. Jika ${x_i}^{(n+1)} < {x_i}^{(n)}$ maka iterasi kembali ke langkah 2, jika ${x_i}^{(n+1)} > {x_i}^{(n)}$ maka didapat nilai $x_i = [\underline{x}, \overline{x}]$ yang diperoleh dari nilai x_i sebelumnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Rorres C. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan* [Indriasari R, trans]. Jakarta: Erlangga; 2004.

[2] Ganesan K. On Some Properties Of Interval Matrices. *International Journal Of Computational and Mathematical Sciences.* 2007; 1(1):25-32.

[3] Hansen, E., *Interval Arithmetic With Some Applications For Digital Computers*, Lockheed Missiles and Space Company, Palo Alto, California;1965.

[4] Moore RE, Kearfott BR, Cloud JM, *Introduction to Interval Analysis*, Society for Industrial And Applied Mathematics, Philadelphia; 2009.

MISNAWATI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, misnawati340@gmail.com

HELMI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, helmi132205@yahoo.co.id

EKA WULAN RAMADHANI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, ekawulan187@yahoo.co.id