

MODEL MIKROSKOPIK DAN MAKROSKOPIK PENYEBARAN HIV-AIDS

Ady Febrisutisyanto, Mariatul Kiftiah, Yudhi

INTISARI

AIDS adalah penyakit yang menyerang sistem kekebalan tubuh manusia yang disebabkan oleh virus HIV dan tersebar dilebih dari 100 negara di dunia. Penyebaran HIV-AIDS dapat diinterpretasikan menggunakan persamaan diferensial dalam bentuk model matematika. Model matematika yang dibentuk dalam penelitian ini terbagi menjadi dua yaitu, model mikroskopik dan makroskopik. Model mikroskopik penyebaran HIV-AIDS terdiri dari laju perubahan posisi dan laju perubahan kondisi kesehatan individu. Laju perubahan posisi dipengaruhi oleh proses Wiener dan laju perubahan kondisi kesehatan individu dipengaruhi oleh fungsi potensial \mathcal{H} dan fungsi interaksi antar individu \mathcal{K} . Dari model mikroskopik yang dibentuk, selanjutnya ditransformasikan menjadi persamaan kinetik menggunakan Mean-Field Limit. Model makroskopik penyebaran HIV-AIDS dimulai dengan membagi populasi menjadi tiga sub-populasi, yaitu sub-populasi susceptible, sub-populasi infected dan sub-populasi AIDS cases. Dari model makroskopik yang terbentuk diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium E_1 dan E_2 . Dari hasil analisis kestabilan sistem disekitar titik ekuilibrium diperoleh sistem di sekitar titik ekuilibrium E_1 dan E_2 stabil asimtotik.

Kata kunci: Model Mikroskopik, Model Makroskopik, Mean-Field Limit, Kestabilan

PENDAHULUAN

Human Immunodeficiency Virus (HIV) adalah virus yang menyebabkan terjadinya penyakit Acquired Immunodeficiency Syndrome (AIDS), dimana virus ini menyerang sistem kekebalan pada tubuh manusia. Virus HIV ini mengakibatkan kehilangan kemampuan pada sistem kekebalan tubuh manusia untuk melawan penyakit, sehingga orang yang terinfeksi virus HIV akan mudah terkena penyakit-penyakit lainnya yang disebabkan oleh virus, bakteri, jamur atau parasit [1]. Cara penularan virus HIV paling sering terjadi karena adanya hubungan kelamin. Faktanya 71% penularan HIV terjadi karena hubungan kelamin heteroseksual, 15% karena hubungan kelamin homoseksual serta 14% karena tranfusi darah, penggunaan alat suntik yang terkontaminasi virus HIV dan sebab lainnya [2]. Ketika pada tubuh seseorang terdeteksi virus HIV maka orang itu dikatakan seropositif atau HIV positif, perlu waktu kira-kira 5 sampai 10 tahun bagi seropositif untuk menjadi pengidap AIDS [3]. HIV-AIDS merupakan salah satu masalah kesehatan yang selalu mendapat perhatian khusus dimata dunia. Hal tersebut terjadi karena sampai saat ini belum ada obat yang dapat menyembuhkan penyakit ini. Sampai akhir tahun 2015, jumlah penderita dengan HIV-AIDS sebanyak 36,9 juta orang yang tersebar dilebih dari 100 negara di dunia termasuk Indonesia dengan penderita orang dengan HIV-AIDS selalu meningkat setiap tahunnya [4].

Pemodelan matematika menjadi alat pendekatan yang menarik dalam memahami penyakit menular. Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk merepresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau permasalahan yang ada dalam kehidupan sehari-hari dalam pernyataan matematika. Berdasarkan pemodelan berbasis komputer, pemodelan matematika biasanya dibedakan menjadi pemodelan makroskopik dan pemodelan mikroskopik. Perbedaan antara pemodelan makroskopik dengan pemodelan mikroskopik terletak pada jumlah individu dalam sistem dan bentuk fungsi yang mempresentasikan kasus yang diangkat. Dalam penelitian ini dibentuk model

mikroskopik dan makroskopik penyebaran HIV-AIDS dan menginterpretasi hasil simulasi numerik dari model mikroskopik dan makroskopik.

Penelitian diawali dengan melakukan studi pustaka dengan menelusuri literatur-literatur yang berhubungan dengan penelitian ini. Hal ini bertujuan untuk mencari dan mempelajari teori-teori yang berkaitan dengan model-model mikroskopik dan makroskopik. Literatur-literatur yang digunakan bersumber dari buku, jurnal dan informasi dari internet. Selanjutnya langkah-langkah pada penelitian ini adalah menyusun asumsi-asumsi untuk membentuk model mikroskopik penyebaran HIV-AIDS. Kemudian model mikroskopik yang terbentuk, dianalisis komponen-komponen penyusun modelnya. Hal ini dilakukan agar model mikroskopik penyebaran HIV-AIDS sesuai dengan realita yang terjadi.

Langkah selanjutnya adalah menentukan persamaan kinetik dari model mikroskopiknya menggunakan *mean-field* limit. Persamaan kinetik dari model mikroskopik ini dapat dikatakan sebagai model mesoskopik dari penyebaran HIV-AIDS. Kemudian langkah selanjutnya adalah menyusun asumsi-asumsi untuk membentuk model makroskopik penyebaran HIV-AIDS. Setelah itu dicari titik ekuilibrium dari model makroskopiknya. Model makroskopik yang dibentuk dalam penelitian ini adalah persamaan diferensial nonlinear. Selanjutnya dilakukan linearisasi dari model makroskopik tersebut dengan membentuk matriks Jacobian dari sistem. Untuk mengetahui kriteria kestabilan disekitar titik ekuilibrium dapat diperoleh dengan mencari nilai eigen dari matriks Jacobian yang dibentuk. Langkah terakhir adalah melakukan simulasi numerik dari model mikroskopik dan makroskopik penyebaran HIV-AIDS dan menginterpretasi hasil simulasi numerik yang diperoleh.

PEMBENTUKAN MODEL MIKROSKOPIK PENYEBARAN HIV-AIDS

Model mikroskopik penyebaran HIV-AIDS adalah suatu sistem persamaan diferensial yang menggambarkan penyebaran HIV-AIDS pada N individu yang dipengaruhi oleh laju perubahan posisi dan laju perubahan kondisi kesehatan. Dalam hal ini, dibentuk sistem persamaan diferensial dengan N individu pada posisi $X_t^i \in P \subset \mathbb{R}^d$ dan kondisi kesehatan $U_t^i \in Q \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$ pada waktu ke- $t \in [0, T]$, untuk $T \in \mathbb{R}^+$ [5]. Adapun pembentukan model mikroskopik dijelaskan sebagai berikut,

- a. Pembentukan persamaan laju perubahan posisi

Setiap individu pasti memiliki kecenderungan untuk bergerak. Pergerakan tersebut mengakibatkan terjadinya perubahan posisi pada individu tersebut. Posisi-posisi tiap individu harus bersifat acak. Selain itu, perubahan posisi yang terjadi tidak dipengaruhi oleh posisi sebelumnya. Dengan demikian, agar memenuhi hal tersebut dipilih proses *Wiener* (W) dan koefisien $\sqrt{2\sigma}$. Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh persamaan laju perubahan posisi yaitu,

$$dX_t^i = \sqrt{2\sigma}dW_t^i \quad (1)$$

- b. Pembentukan persamaan laju perubahan kondisi kesehatan

Laju perubahan kondisi kesehatan diasumsikan akan mengalami penurunan karena adanya laju perubahan fungsi potensial yang ada pada individu dalam menghadapi serangan penyakit ($\mathcal{H}'(U_t^i)$). Fungsi interaksi antar individu \mathcal{K} diasumsikan akan mempengaruhi peningkatan pada laju perubahan kondisi kesehatan. Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh persamaan laju perubahan kondisi kesehatan yaitu,

$$dU_t^i = -\mathcal{H}'(U_t^i)dt + \frac{1}{N}\sum_{i \neq j} \mathcal{K}(X_t^i, X_t^j, U_t^i, U_t^j)dt \quad (2)$$

Dari asumsi-asumsi yang telah dipaparkan pada (1) dan (2) diperoleh model matematika penyebaran HIV-AIDS adalah sebagai berikut

$$\begin{cases} dX_t^i = \sqrt{2\sigma}dW_t^i \\ dU_t^i = -\mathcal{H}'(U_t^i)dt + \frac{1}{N}\sum_{i \neq j} \mathcal{K}(X_t^i, X_t^j, U_t^i, U_t^j)dt \end{cases} \quad (3)$$

dengan $W_t^i \in \mathbb{R}^d$ adalah proses *Wiener*, $\mathcal{H}: Q \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi potensial dari transisi kondisi kesehatan pada individu dan $\mathcal{K}: R \times R \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi interaksi antara individu pada $R := P \times Q$.

Diasumsikan $Q = [-1, 1]$, apabila nilai kondisi kesehatan $U_t^i = -1$ artinya individu tersebut berada pada fase *susceptible* dan $U_t^i = 1$ artinya individu tersebut berada pada fase AIDS Cases. Interval Q dibagi menjadi tiga bagian yang menunjukkan tiga fase pada kondisi kesehatan. Dinotasikan $\mathcal{S} = [-1, u_*)$ mempresentasikan fase *susceptible* dengan $u_* := \max_{u \in \mathcal{J}} \mathcal{H}(u)$, $\mathcal{I} = [u_*, \bar{u}]$ menunjukkan fase *infected* dengan nilai $\bar{u} \in (u_*, 1]$, dan $\mathcal{A} = (\bar{u}, 1]$ merupakan kondisi pada fase AIDS cases.

Diberikan definisi sebagai berikut untuk membentuk fungsi pada model mikroskopik penyebaran HIV-AIDS:

Definisi 1 Fungsi potensial \mathcal{H} dikatakan *feasible* jika $\mathcal{H} \in Lip(Q)$,

1. Mempunyai dua titik lokal minimum di $u = 1$ dan $u = -1$
2. Mempunyai satu titik global maksimum di $u_* \in (-1, 1)$.

Fungsi interaksi antar individu \mathcal{K} dikatakan *feasible* jika $\mathcal{K} \in Lip(R \times R)$

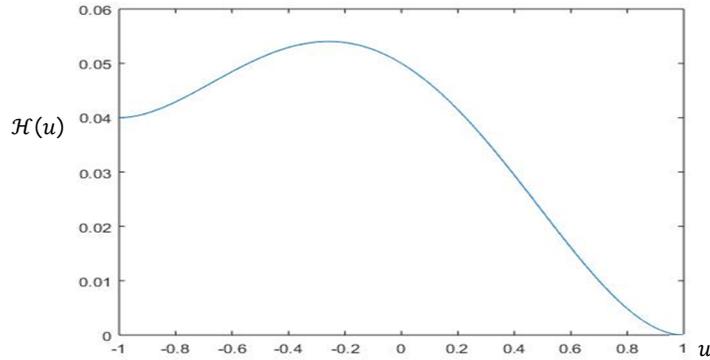
1. $\mathcal{K}(x, u, y, u)$ vanishes untuk sebarang $x, y \in \theta$ dan $u \in Q$
2. $\mathcal{K}(x, u, y, v)$ vanishes untuk sebarang $x, y \in \theta$, $u \in \mathcal{I}$ dan $v \in \mathcal{A}$.

Berdasarkan Definisi 1, adapun pembentukan fungsi potensial \mathcal{H} dan fungsi interaksi antar individu \mathcal{K} adalah sebagai berikut:

- a. Fungsi potensial \mathcal{H} merupakan fungsi potensial yang ada pada individu dalam menghadapi serangan penyakit. Sehingga dapat dikatakan fungsi potensial \mathcal{H} merupakan faktor internal dalam mempengaruhi suatu kondisi kesehatan. Adapun fungsi potensial \mathcal{H} yang dibentuk agar memenuhi Definisi 1 yaitu:

$$\mathcal{H}_{\alpha, \theta}(u) = \alpha(u^2 - 1)^2 + \theta \left(1 - \sin \frac{\pi u}{2}\right) \tag{4}$$

dengan parameter $\alpha, \theta \geq 0$.

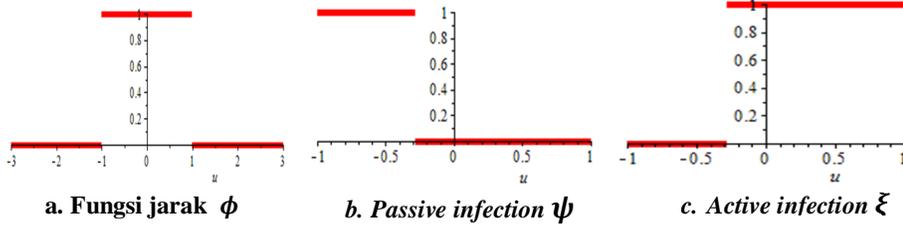


Gambar 1 Grafik fungsi potensial \mathcal{H}

- b. Interaksi antar individu dideskripsikan dengan fungsi \mathcal{K} yang bergantung dengan jarak $r = \|X_t^i - X_t^j\|$ pada individu ke- i dan j , dan hubungan aktifitas pada individu ke- i dan j dalam mempengaruhi kondisi kesehatan U_t^i dan U_t^j . Adapun fungsi yang dibentuk yaitu:

$$\mathcal{K}(x, u, y, v) = \phi(x - y)\psi(u)\xi(v), \quad (x, u), (y, v) \in S \tag{5}$$

Fungsi ϕ haruslah merupakan fungsi non-negatif dengan syarat $\phi(-r) = \phi(r)$ yang menjelaskan dua individu berada pada jarak yang memungkinkan terjadinya interaksi. Sedangkan pada fungsi ψ mengindikasikan *passive infection potential* dan fungsi ξ mengindikasikan *active infection potential*. Individu yang berada pada fase *susceptible* memiliki nilai 1 pada *passive infection potential* dan nilai 0 pada *active infection potential*, sedangkan individu *infected* dan AIDS cases memiliki nilai 0 pada *passive infection potential* dan nilai 1 pada *active infection potential*.



Gambar 2 Grafik fungsi interaksi antar individu \mathcal{K}

PERSAMAAN KINETIK DENGAN MENGGUNAKAN *MEAN-FIELD LIMIT*

Didefinisikan $f^N(t) = f^N(\cdot, \cdot, t) = f^N(x, u, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i(t)) \delta(u - u_i(t))$ adalah fungsi bernilai ukuran dengan $\delta(\cdot)$ adalah delta-Dirac dan $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ruang probabilitas pada \mathbb{R}^d . Diketahui $t \in [0, T]$ maka diperoleh bahwa $(x_i(t), u_i(t)) \in S$ kompak dengan demikian diperoleh bahwa fungsi $f^N(t)$ juga kompak. Karena $f^N(t)$ kompak hal ini mengakibatkan terdapat sub-barisan $(f^{N_k})_k$ dan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ sedemikian sehingga f^{N_k} konvergen ke f untuk $k \rightarrow \infty$. Diberikan fungsi φ yang turunannya kontinu pada (\mathbb{R}^d) atau $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ dan $\varphi \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle f^N(t), \varphi \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \varphi(x_i(t), u_i(t)) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{du_i}{dt} \right] \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nabla_x \varphi \cdot \sqrt{2\sigma} W_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nabla_u \varphi \cdot \left[-\mathcal{H}'(u) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi(x_i - x_j) \psi(u_i) \xi(u_j) \right] \\
 &= \langle f^N(t), \nabla_x \varphi \cdot \sqrt{2\sigma} W \rangle - \langle f^N(t), \nabla_u \varphi \cdot \mathcal{H}'(u) \rangle \\
 &\quad + \left\langle f^N(t), \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla_u \varphi \cdot \phi(x - x_j) \psi(u) \xi(u_j) \right\rangle
 \end{aligned}$$

Dimisalkan:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi(x - x_j) \psi(u) \xi(u_j) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^d} (\phi(x - y) \psi(u) \xi(u_j) \delta(y - x_j)) dy \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle \phi(x - y) \psi(u) \xi(u_j), \delta(y - x_j) \rangle_y \\
 &= (\phi \cdot \psi \cdot \xi) * \rho_{f^N}(x, t)
 \end{aligned}$$

dimana $\rho_{f^N}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} f^N(x, u, t) du = \langle 1, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \delta(u - u_j) \rangle$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle f^N(t), \varphi \rangle &= \langle f^N(t), \nabla_x \varphi \cdot \sqrt{2\sigma} W - \nabla_u \varphi \cdot \mathcal{H}'(u) + \nabla_u \varphi (\phi \cdot \psi \cdot \xi) * \rho_{f^N}(x, t) \rangle \\
 \Leftrightarrow \left\langle \frac{\partial f^N}{\partial t}, \varphi \right\rangle &= \langle \nabla_x f^N \sqrt{2\sigma} W - \nabla_u f^N \mathcal{H}'(u) + \nabla_u f^N (\phi \cdot \psi \cdot \xi) * \rho_{f^N}(x, t), \varphi \rangle \\
 \Leftrightarrow \left\langle \frac{\partial f^N}{\partial t} - \nabla_x f^N \sqrt{2\sigma} W - \nabla_u f^N [\mathcal{H}'(u) - (\phi \cdot \psi \cdot \xi) * \rho_{f^N}(x, t)], \varphi \right\rangle &= 0
 \end{aligned}$$

Diketahui $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^{2d})$ dan $\varphi \neq 0$, dengan demikian jelas bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^N}{\partial t} - \nabla_x f^N \sqrt{2\sigma} W - \nabla_u f^N [\mathcal{H}'(u) - (\phi \cdot \psi \cdot \xi) * \rho_{f^N}(x, t)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial f^N}{\partial t} = \nabla_x f^N \sqrt{2\sigma} W + \nabla_u f^N [\mathcal{H}'(u) - (\phi \cdot \psi \cdot \xi) * \rho_{f^N}(x, t)] \end{aligned} \quad (6)$$

Untuk $k \rightarrow \infty$ jelas bahwa sub-barisan f^{N_k} konvergen ke f , sehingga Persamaan (6) dapat ditransformasikan menjadi

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla_x f \sqrt{2\sigma} W + \nabla_u f [\mathcal{H}'(u) - (\phi \cdot \psi \cdot \xi) * \rho_f(x, t)] \quad (7)$$

Persamaan (7) adalah persamaan kinetik dari model mikroskopik penyebaran HIV-AIDS pada Persamaan (3).

PEMBENTUKAN MODEL MAKROSKOPIK PENYEBARAN HIV-AIDS

Pembentukan model makroskopik penyebaran HIV-AIDS dimulai dengan membagi populasi menjadi tiga sub-populasi, yaitu *susceptible*, *infected*, dan *AIDS cases* [6].

a. Pembentukan persamaan laju perubahan jumlah individu pada sub-populasi *susceptible*

Sub-populasi *susceptible* merupakan sub-populasi yang berisi individu-individu yang rentan terkena virus HIV (S). Pada suatu waktu diasumsikan penurunan jumlah individu pada sub-populasi *susceptible* juga dipengaruhi oleh tingkat penularan dari proporsi sub-populasi *infected* terhadap sub-populasi *susceptible* (β) dan tingkat penularan dari proporsi sub-populasi *AIDS cases* terhadap sub-populasi *susceptible* (ω). Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh persamaan laju perubahan jumlah individu pada sub-populasi *susceptible*, yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S \frac{I}{N} - \omega S \frac{A}{N} \quad (8)$$

b. Pembentukan persamaan laju perubahan jumlah individu pada sub-populasi *infected*

Sub-populasi *infected* merupakan sub-populasi yang berisi individu-individu yang terinfeksi HIV (I). Tingkat penularan dari proporsi sub-populasi *infected* terhadap sub-populasi *susceptible* (β) dan tingkat penularan dari proporsi sub-populasi *AIDS cases* terhadap sub-populasi *susceptible* (ω) diasumsikan akan mempengaruhi peningkatan jumlah individu pada sub-populasi *infected*. Seseorang yang telah berada pada sub-populasi *infected* selanjutnya akan berpindah menjadi sub-populasi *AIDS cases*. Hal ini tentu mengakibatkan tingkat penjangkitan (γ) dari sub-populasi *infected* kepada sub-populasi *AIDS cases* diasumsikan akan mempengaruhi penurunan jumlah individu pada sub-populasi *infected*. Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh persamaan laju perubahan jumlah individu pada sub-populasi *infected*, yaitu:

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} + \omega S \frac{A}{N} - \gamma I \quad (9)$$

c. Pembentukan persamaan laju perubahan jumlah individu pada sub-populasi *AIDS cases*

Sub-populasi *AIDS cases* merupakan sub-populasi yang berisi individu-individu yang terjangkit penyakit AIDS

(A). Dalam kurun waktu tertentu HIV akan berkembang menjadi penyakit AIDS. Tingkat penjangkitan (γ) dari sub-populasi *infected* kepada sub-populasi *AIDS cases* diasumsikan akan mempengaruhi peningkatan jumlah individu pada sub-populasi *AIDS cases*. Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh persamaan laju perubahan jumlah individu pada sub-populasi *AIDS cases*, yaitu:

$$\frac{dA}{dt} = \gamma I \quad (10)$$

Dari asumsi-asumsi yang telah dipaparkan pada proses pembentukan model makroskopik, diperoleh model matematika penyebaran HIV-AIDS adalah sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta S \frac{I}{N} - \omega S \frac{A}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} + \omega S \frac{A}{N} - \gamma I \\ \frac{dA}{dt} &= \gamma I \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

dengan β adalah tingkat penularan dari individu yang terinfeksi HIV kepada individu yang rentan, ω adalah tingkat penularan dari individu yang terinfeksi AIDS kepada individu yang rentan, γ adalah tingkat penjangkitan dari individu yang terinfeksi menjadi pengidap penyakit AIDS, S adalah jumlah individu pada sub-populasi *susceptible*, I adalah jumlah individu pada sub-populasi *infected*, A adalah jumlah individu pada sub-populasi AIDS *cases* dan N adalah jumlah populasi manusia, dimana $\Lambda, \beta, \mu, \gamma, \delta, S, I, A > 0$ dan $N(t) = S(t) + I(t) + A(t)$.

TITIK EKUILIBRIUM DAN ANALISIS KESTABILAN DISEKITAR TITIK EKUILIBRIUM

Titik ekuilibrium pada Persamaan (11) diperoleh ketika $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \text{ dan } \frac{dA}{dt} = 0$ [7], sehingga didapat sistem persamaan sebagai berikut,

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\beta S \frac{I}{N} - \omega S \frac{A}{N} \\ 0 &= \beta S \frac{I}{N} + \omega S \frac{A}{N} - \gamma I \\ 0 &= \gamma I \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Dari Sistem Persamaan (12) diperoleh, (i) $\gamma I = 0 \Leftrightarrow I = 0$ dan (ii) $\beta S \frac{I}{N} + \omega S \frac{A}{N} - \gamma I = 0 \Leftrightarrow \omega S \frac{A}{N} = 0$. Dari (ii) didapat jika $S = 0$ maka didapat $A = A$, begitu juga jika $A = 0$ maka $S = S$. Selanjutnya dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa Sistem Persamaan (11) memiliki dua titik ekuilibrium yaitu $E_1 = (S, I, A) = (S, 0, 0)$ dan $E_2 = (S^*, I^*, A^*) = (0, 0, A)$.

Untuk menyelidiki kestabilan sistem di sekitar titik ekuilibrium E_1 dan E_2 , Sistem Persamaan (11) yang merupakan persamaan diferensial nonlinear harus dilinearisasi menggunakan matriks Jacobian [8]. Matriks Jacobian dari Sistem Persamaan (11) adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\frac{dS}{dt})}{\partial S} & \frac{\partial(\frac{dS}{dt})}{\partial I} & \frac{\partial(\frac{dS}{dt})}{\partial A} \\ \frac{\partial(\frac{dI}{dt})}{\partial S} & \frac{\partial(\frac{dI}{dt})}{\partial I} & \frac{\partial(\frac{dI}{dt})}{\partial A} \\ \frac{\partial(\frac{dA}{dt})}{\partial S} & \frac{\partial(\frac{dA}{dt})}{\partial I} & \frac{\partial(\frac{dA}{dt})}{\partial A} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Substitusikan Sistem Persamaan (11) ke dalam matriks Jacobian (13), sehingga diperoleh

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I}{N} - \frac{\omega A}{N} & -\frac{\beta S}{N} & -\frac{\omega S}{N} \\ \frac{\beta I}{N} + \frac{\omega A}{N} & \frac{\beta S}{N} - \gamma & \frac{\omega S}{N} \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Kestabilan disekitar titik ekuilibrium E_1 diperoleh dengan terlebih dahulu mensubstitusikan nilai E_1 ke dalam Matriks (14) sehingga didapat

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta S}{N} & -\frac{\omega S}{N} \\ 0 & \frac{\beta S}{N} - \gamma & \frac{\omega S}{N} \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Selanjutnya, akan ditentukan kriteria kestabilan sistem di sekitar titik ekuilibrium E_1 .

Teorema 1 Jika $\frac{\beta S}{N} < \gamma$ maka sistem di sekitar titik ekuilibrium E_1 stabil asimtotik lokal.

Bukti:

Dari Persamaan (15) dicari nilai-nilai eigennya menggunakan ekspansi kofaktor.

$$\det(J - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \left(\begin{pmatrix} 0 & \frac{-\beta S}{N} & \frac{-\omega S}{N} \\ 0 & \frac{\beta S}{N} - \gamma & \frac{\omega S}{N} \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{-\beta S}{N} & \frac{-\omega S}{N} \\ 0 & \frac{\beta S}{N} - \gamma - \lambda & \frac{\omega S}{N} \\ 0 & \gamma & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-\lambda) \begin{vmatrix} \frac{\beta S}{N} - \gamma - \lambda & \frac{\omega S}{N} \\ \gamma & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Diperoleh $\lambda_1 = 0$. Selanjutnya diselidiki nilai eigen dari sub-matriks J_1 :

$$J_1 = \begin{pmatrix} \frac{\beta S}{N} - \gamma & \frac{\omega S}{N} \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Jika trace negatif ($tr(J_1) < 0$) dan determinannya positif ($\det(J_1) > 0$) maka semua nilai eigen (λ) dari J_1 mempunyai bagian real yang negatif [9]. Oleh karena itu, diperoleh

$tr(J_1) < 0 \Leftrightarrow \frac{\beta S}{N} - \gamma < 0 \Leftrightarrow \frac{\beta S}{N} < \gamma$ dan $\det(J_1) > 0 \Leftrightarrow \frac{\omega S \gamma}{N} > 0$. Selanjutnya didapat, jika $\frac{\beta S}{N} < \gamma$ maka $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$. Jadi terbukti bahwa, Jika $\frac{\beta S}{N} < \gamma$ maka sistem di sekitar titik ekuilibrium E_1 stabil asimtotik lokal.

Kestabilan disekitar titik ekuilibrium E_2 diperoleh dengan terlebih dahulu mensubstitusikan nilai E_2 ke dalam Matriks (14) sehingga didapat

$$J = \begin{pmatrix} \frac{-\omega A}{N} & 0 & 0 \\ \frac{\omega S}{N} & -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa sistem disekitar titik ekuilibrium E_2 stabil asimtotik lokal.

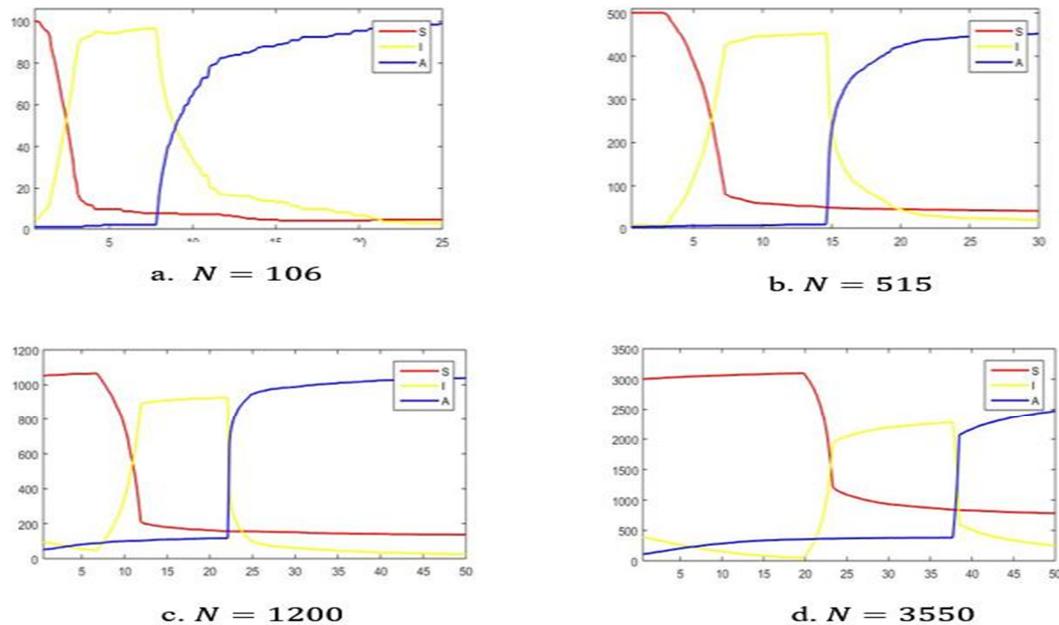
$$\det(J - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \left(\begin{pmatrix} \frac{-\omega A}{N} & 0 & 0 \\ \frac{\omega S}{N} & -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \frac{-\omega A}{N} - \lambda & 0 & 0 \\ \frac{\omega S}{N} & -\gamma - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{-\omega A}{N} - \lambda \right) (-\gamma - \lambda) (-\lambda) = 0 \quad (17)$$

Dari Persamaan (17) diperoleh nilai $\lambda_1 = \frac{-\omega A}{N}$, $\lambda_2 = -\gamma$ dan $\lambda_3 = 0$, sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem disekitar titik ekuilibrium E_2 stabil asimtotik lokal.

SIMULASI MODEL MIKROSKOPIK DAN MAKROSKOPIK PENYEBARAN HIV-AIDS

Simulasi numerik yang dilakukan bertujuan untuk mengetahui gambaran dinamika penyebaran HIV-AIDS dari model mikroskopik dan makroskopik yang terbentuk. Pertama dilakukan simulasi pada model mikroskopik dengan memberikan nilai-nilai pada parameter σ, α dan θ . Hasil simulasi dengan kondisi $\sigma = 0,01, \alpha = 0,03$ dan $\theta = 0,02$ adalah sebagai berikut,

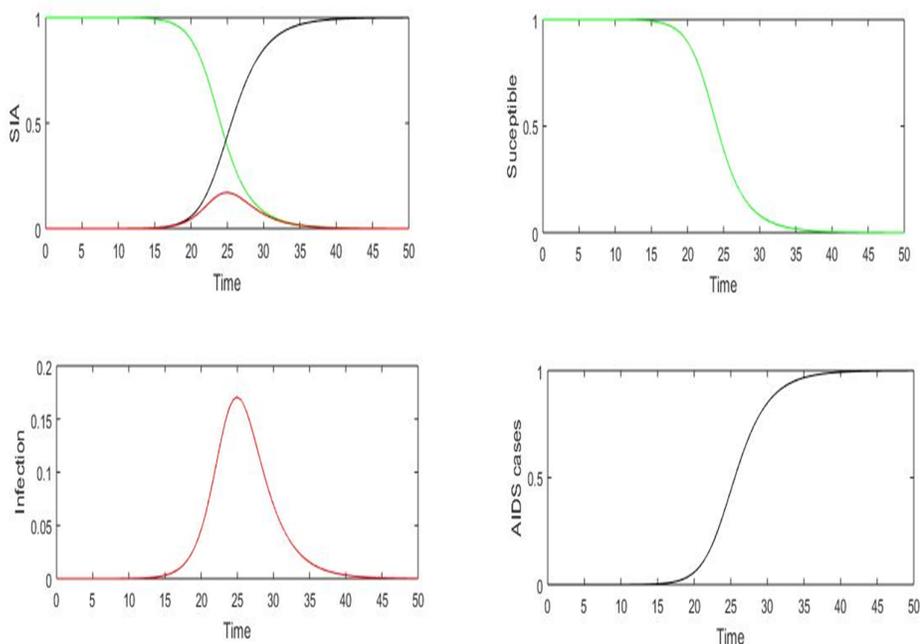


Gambar 3 Grafik Model Mikroskopik Penyebaran HIV-AIDS

Pada Gambar 3 disajikan grafik model mikroskopik penyebaran HIV-AIDS dengan jumlah N individu yaitu 106, 515, 1200 dan 3550. Jumlah individu *susceptible* pada mulanya tetap, namun jumlah tersebut akan menurun secara signifikan pada waktu tertentu. Hal ini dikarenakan berubahnya status kondisi kesehatan individu *susceptible* menjadi *infected* akibat adanya hubungan antara individu *susceptible* dengan individu *infected* atau AIDS cases. Penurunan yang signifikan yang terjadi pada individu *susceptible* mulai mengalami perubahan menjadi penurunan yang tidak signifikan untuk tahun-tahun kedepannya. Untuk individu *infected* pada beberapa tahun awal akan mengalami penurunan akibat berubahnya status kondisi kesehatan individu *infected* menjadi AIDS cases. Namun pada tahun-tahun selanjutnya jumlah individu *infected* akan mengalami peningkatan yang signifikan. Hal ini terjadi akibat adanya perubahan status kondisi kesehatan dari individu *susceptible* menjadi *infected*.

Setelah terjadi peningkatan yang signifikan tersebut dalam jangka waktu beberapa tahun peningkatan yang terjadi pada individu *infected* tidak terlalu signifikan. Sampai pada waktu tertentu jumlah individu *infected* akan selalu mengalami penurunan untuk tahun-tahun kedepannya karena status kondisi kesehatan individu *infected* akan kembali berubah menjadi AIDS cases. Sedangkan untuk individu AIDS cases beberapa tahun awal hanya sedikit mengalami peningkatan. Namun seiring berjalannya waktu dan meningkatnya jumlah individu *infected* maka pada waktu tertentu jumlah individu AIDS cases akan mengalami peningkatan yang signifikan dan selanjutnya jumlah individu AIDS cases akan mengalami peningkatan yang stabil untuk tahun-tahun kedepannya.

Selanjutnya dilakukan simulasi numerik pada model makroskopik dengan menentukan nilai awal pada parameter β , ω dan γ terlebih dahulu. Hasil simulasi dengan kondisi $\beta = 0,88$, $\omega = 0,3$ dan $\gamma = 0,65$ adalah sebagai berikut,



Gambar 4 Grafik Model Makroskopik Penyebaran HIV-AIDS

Pada Gambar 4 individu yang berada pada sub-populasi *susceptible* awalnya konstan akan tetapi pada waktu tertentu proporsi antara individu pada sub-populasi *susceptible* selalu mengalami penurunan setiap tahunnya. Hal ini dikarenakan selalu adanya interaksi antara individu pada sub-populasi *susceptible* dengan individu pada sub-populasi *infected* dan AIDS cases, akibatnya individu pada sub-populasi *susceptible* akan mengalami perpindahan menjadi individu pada sub-populasi *infected*. Kondisi grafik yang turun pada sub-populasi *susceptible* akan berjalan terus menerus hingga menuju suatu titik dan stabil asimtotik di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$. Hal ini berarti, pada sub-populasi *susceptible* sudah tidak ada lagi populasi manusia yang terinfeksi penyakit HIV-AIDS.

Proporsi individu pada sub-populasi *infected* awalnya konstan, selanjutnya pada waktu $15 \leq t \leq 25$ individu pada sub-populasi *infected* mengalami peningkatan. Peningkatan yang terjadi karena adanya perpindahan individu pada sub-populasi *susceptible* menjadi individu pada sub-populasi *infected*. Ketika $t > 25$ proporsi individu pada sub-populasi *infected* mengalami penurunan akibat berpindahnya individu pada sub-populasi *infected* menjadi individu pada sub-populasi AIDS cases. Kondisi grafik yang turun pada sub-populasi *infected* akan berjalan terus menerus hingga menuju suatu titik dan stabil asimtotik di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$. Hal ini berarti, populasi manusia yang berada pada sub-populasi *infected* telah berubah seluruhnya menjadi manusia dengan status AIDS cases.

Sedangkan untuk individu pada sub-populasi AIDS cases awalnya konstan akan tetapi pada waktu tertentu akan mengalami peningkatan setiap tahunnya. Hal ini terjadi akibat adanya perpindahan individu pada sub-populasi *infected* menjadi individu pada sub-populasi AIDS cases. Kondisi grafik yang naik pada sub-populasi AIDS cases akan berjalan terus menerus hingga menuju suatu titik dan stabil asimtotik di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan, maka dapat ditarik kesimpulan, yaitu:

1. Model mikroskopik penyebaran HIV-AIDS adalah

$$dX_t^i = \sqrt{2\sigma} dW_t^i$$

$$dU_t^i = -\mathcal{H}'(U_t^i)dt + \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} \mathcal{K}(X_t^i, X_t^j, U_t^i, U_t^j)dt$$

dengan fungsi potensial \mathcal{H} yaitu $\mathcal{H}_{\alpha, \theta}(u) = \alpha(u^2 - 1)^2 + \theta \left(1 - \sin \frac{\pi u}{2}\right)$ dan fungsi interaksi antar individu \mathcal{K} yaitu $\mathcal{K}(x, u, y, v) = \phi(x - y)\psi(u)\xi(v)$, $(x, u), (y, v) \in S$.

2. Persamaan kinetik dari model mikroskopik penyebaran HIV-AIDS dengan menggunakan *Mean-Limit* adalah $\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla_x f \sqrt{2\sigma} W + \nabla_u f [\mathcal{H}'(u) - (\phi \cdot \psi \cdot \xi) * \rho_f(x, t)]$

3. Model makroskopik penyebaran HIV-AIDS adalah

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S \frac{I}{N} - \omega S \frac{A}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} + \omega S \frac{A}{N} - \gamma I$$

$$\frac{dA}{dt} = \gamma I$$

4. Model makroskopik penyebaran HIV-AIDS menghasilkan dua titik ekuilibrium yaitu, $E_1 = (S, I, A) = (S, 0, 0)$ dan $E_2 = (S^*, I^*, A^*) = (0, 0, A)$ dengan analisis kestabilan disekitar kedua titik ekuilibrium tersebut stabil asimtotik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. El-Hia M, Balatif O, Ferjouchia H, Labriji EH, Rachik M. Modelling the Spread of HIV/AIDS in Morocco. *International Journal of Computer Science Issues* Morocco; 2010;9(6).
- [2]. Pratt, Robert. *HIV & AIDS A Strategy for Nursing Care*. Anthony Inc: New York; 1995.
- [3]. Sutimin, Imamudin. Model Dinamika Penularan Human Immunodeficiency Virus (HIV). *Jurnal Sains dan Matematika Universitas Diponegoro*; 2009;17(1).
- [4]. WHO. Data and Statistics : HIV-AIDS [Internet]. 2017 [update 2017 Des 29] Available from: <https://www.who.int/hiv/data/en/>.
- [5]. Schmidtchen N, Oliver T, Stephen W. *A Multiscale Approach For Spatially Inhomogeneous Disease Dynamics*. arXiv:1602.05927; 2016.
- [6]. Hariyanto D. *Pemodelan Matematika dan Analisis Penyebaran HIV-AIDS* [skripsi]. Pontianak: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Tanjungpura; 2015.
- [7]. Perko, Lawrence. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third Edition. New York: Springer; 2001.
- [8]. Murray JD. *Mathematical Biology*. Third Edition. New York: Springer Verlag; 2002.
- [9]. Bowong S, Kamgang JC, Tewa JJ. Stability Analysis of the Transmission Dynamics of Tuberculosis Models. *World Journal of Modelling and Simulation*. England UK; 2011:7(2).

ADY FEBRISUTISYANTO : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
ady.febrisutisyanto@yahoo.com

MARIATUL KIFTIAH : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

YUDHI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
dhye_dhoank@yahoo.co.uk