Buletin Ilmiah Math. Stat. Dan Terapannya (Bimaster)
Volume 07, No.2 (2018), hal 101-110.

ESTIMASI PARAMETER MODEL SURVIVAL DISTRIBUSI EKSPONENSIAL DATA TERSENSOR DENGAN METODE BAYESIAN GELF MENGGUNAKAN PRIOR INFORMATIF DAN NON-INFORMATIF

Surati, Helmi, Setyo Wira Rizki

INTISARI

Data *survival* adalah data yang menunjukkan waktu suatu individu atau objek dapat bertahan hidup hingga terjadinya suatu kegagalan atau kejadian tertentu. Data dikatakan tersensor apabila data tidak dapat diamati secara lengkap karena objek penelitian hilang atau mengundurkan diri atau sampai akhir penelitian objek tersebut belum mengalami kejadian tertentu. Tujuan pada penelitian ini adalah menentukan estimasi parameter model *survival* distribusi Eksponensial pada data tersensor dengan metode Bayesian GELF menggunakan prior Gamma sebagai prior informatif dan prior *Jeffreys* sebagai prior non-informatif dan menerapkan pada kasus penderita kanker paru-paru. Setelah diperoleh estimator dari kedua prior, selanjutnya diterapkan pada data pasien penderita kanker paru-paru berdistribusi Eksponensial yang diambil dari program R versi 3.3.0 untuk mengetahui peluang individu dapat bertahan hidup. Nilai MSE yang diperoleh untuk fungsi *survival* dan fungsi *hazard* untuk prior Gamma ialah 0.000135766 dan 1.2999E-07, sedangkan fungsi *survival* dan fungsi *hazard* untuk prior *Jeffreys* ialah 0.000186044 dan 1.76866E-07. Berdasarkan nilai MSE dari estimator pada penelitian ini, diperoleh metode Bayesian GELF prior Gamma lebih baik dari pada metode Bayesian GELF prior *Jeffreys*. Salah satu contoh hasil dari olah data metode Bayesian GELF prior Gamma, diperoleh peluang hidup pasien pada kasus ini yang mengidap penyakit kanker paru-paru selama 1 hari adalah 0.992169551, selama 80 hari adalah 0.5331772256, selama 250 hari adalah 0.14011148, selama 587 hari adalah 0.009906501, dan selama 999 hari adalah 0.000388427.

Kata Kunci: *Distribusi Eksponensial, Metode Bayesian GELF, Prior Gamma, Prior Jeffreys, Survival.*

PENDAHULUAN

Analisis *survival* adalah penyelidikan tentang daya tahan hidup suatu unit atau komponen pada keadaan operasional tertentu [1]. Analisis *survival* dapat digunakan untuk memodelkan data *survival*. Data *survival* dibedakan menjadi dua jenis yaitu data tersensor dan data tidak tersensor. Data dikatakan tersensor apabila data tidak dapat diamati secara lengkap karena objek penelitian hilang atau mengundurkan diri atau sampai akhir penelitian objek tersebut tidak mengalami kejadian (*event*).

Pada analisis *survival*, terdapat dua model untuk menganalisis data *survival*, yaitu model parametrik dan model non-parametrik. Model parametrik adalah model *survival* dengan data yang mengikuti suatu distribusi tertentu. Beberapa model parametrik terdiri dari distribusi Eksponensial, distribusi Weibull, distribusi Log-Normal, distribusi Log-Logistik dan distribusi Gamma. Model non-parametrik adalah jika distribusi pada data *survival* tidak mengikuti suatu distribusi tertentu

Adapun dalam penelitian ini digunakan model *survival* berdistribusi Eksponensial. Saat ini dikenal dua metode untuk mengestimasi parameter yaitu metode klasik dan metode Bayesian. Metode Bayesian merupakan metode estimasi yang menggabungkan distribusi prior dan fungsi *likelihood*. Distribusi prior adalah distribusi awal yang memberikan informasi tentang suatu parameter. Fungsi *likelihood* yang digabungkan dengan distribusi prior menghasilkan suatu distribusi baru yaitu distribusi posterior yang menyatakan tingkat keyakinan mengenai suatu parameter setelah sampel diamati [2]. Terdapat beberapa pendekatan dari metode Bayesian yang dapat digunakan untuk mengestimasi parameter yaitu *General Non-informatif Prior*, *Lindley Aproximation*, *General Entroppy Loss Function* (GELF), dan *Squared Error Loss Function* (SELF).Penelitian ini membahas tentang Bayesian GELF yang mana menyangkut fungsi kesalahan Asimetri.

Al-Kutubi dan Ibrahim [3] melakukan penelitian tentang estimasi Bayesian untuk distribusi Eksponensial dengan ekstensi informasi prior *Jeffreys*. Data yang digunakan adalah data simulasi untuk melihat tingkat kesalahannya menggunakan *mean square error* (MSE) dan *mean percentage error* (MPE). Penelitian ini mencari informasi prior dengan *loss function* untuk mengestimasi parameter dari distribusi Eksponensial. Guure dan Ibrahim [4] juga melakukan penelitian mengenai fungsi *survival* dan fungsi *hazard* dengan distribusi Weibull untuk data tersensor dengan metode Bayesian menggunakan pendekatan seperti *General Non-informatif Prior*, *Linear Eksponential Loss Function*, *Lindley Approximation*, *General Entropy Loss Function* (GELF), dan *Squared Error Loss Function* (SELF). Penelitian lain juga dilakukan oleh Fitria [5] membahas tentang estimasi parameter menggunakan MLE dan Bayesian SELF untuk model *survival* distribusi Eksponensial data tersensor. Penelitian ini membandingkan kedua metode dengan melihat MSE terkecil. Hasil dari penelitian diperoleh bahwa estimasi Bayesian adalah yang terbaik dibandingkan MLE. Penelitian lain juga dilakukan oleh Rizki [6] tentang estimasi Bayesian data tersensor menggunakan Linex Loss Function dengan asumsi data berdistribusi Eksponensial untuk pasien penderita kanker setelah menerima perawatan. Distribusi prior yang digunakan adalah prior Gamma. Hasil dari estimasi Bayesian dibandingkan dengan metode MLE (*Maximum Likelihood Estimation*) dan diperoleh estimasi Bayesian adalah metode terbaik karena menghasilkan MSE yang lebih kecil.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan estimasi parameter model *survival* berdistribusi Eksponensial pada data tersensor dan menerapkan pada kasus penderita kanker paru-paru dengan menggunakan metode Bayesian GELF. Adapun distribusi prior yang digunakan adalah prior Gamma sebagai prior informatif dan prior *Jeffreys* sebagai prior non-informatif. Distribusi prior informatif mengacu pada pemberian parameter dari distribusi prior yang telah dipilih baik distribusi prior sekawan atau tidak. Pemberian nilai parameter pada distribusi prior ini didasarkan pada informasi yang diperoleh dari data, sedangkan distribusi prior non-informatif adalah jika penentuan parameter distribusi prior tidak didasarkan pada data yang ada atau distribusi prior yang tidak mengandung informasi tentang parameter θ, salah satu pendekatan dari non-informatif prior adalah prior *Jeffreys*.

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data kasus penderita kanker paru-paru yang diambil dari program R versi 3.3.0 dengan melakukan uji *Kolmogorov-Smirnov* sehingga diketahui data berdistribusi Eksponensial. Langkah pertama adalah menentukan distribusi kumulatif, fungsi *survival* dan fungsi *hazard* dari distribusi Eksponensial. Langkah kedua menentukan fungsi *likelihood*, distribusi prior dan distribusi posterior untuk metode Bayesian. Langkah ketiga menentukan estimasi parameter dari metode Bayesian GELF. Selanjutnya, pada langkah keempat melakukan perhitungan fungsi *survival* dan fungsi *hazard* dari hasil estimasi Bayesian GELF. Langkah terakhir ialah menghitung nilai MSE untuk fungsi *survival* dan fungsi *hazard* dari hasil estimasi Bayesian GELF prior Gamma dan prior *Jeffreys*, dan menerapkan pada kasus penderita kanker paru-paru.

DISTRIBUSI WAKTU SURVIVAL

Distribusi waktu *survival* dapat dinyatakan dengan tiga fungsi yaitu, fungsi kepadatan peluang, fungsi *survival* dan fungsi *hazard*. Waktu *survival* (T) merupakan variabel random non-negatif yang mewakiliwaktu *survival* individu-individu dalam populasi yang merupakan variabel random kontinu dalam interval $[0,\infty)$ atau waktu *survival* pada waktu t dengan $t>0$ [7].

1. Fungsi Kepadatan Peluang

Fungsi kepadatan peluang adalah peluang suatu individu mati atau mengalami kejadian sesaat dalam interval waktu t sampai $t+\Delta t$ yang dirumuskan sebagai berikut:

$$f(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{P\left(t<T<(t+\Delta t)\right)}{\Delta t}\right]=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}\right]$$

Jika T merupakan variabel random non-negatif pada interval $\left[0,\infty\right)$, maka $F\left(t\right)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif kontinu dari T yaitu:

$$F\left(t\right)=P\left(T\leq t\right)=\int_{0}^{t}f\left(t\right)dt \tag{1}$$

2. Fungsi *Survival*

Fungsi *survival* $S\left(t\right)$ didefinisikan sebagai peluang suatu individu dapat bertahan hidup dengan waktu *survival* sampai dengan waktu t dengan $\left(t>0\right)$ yaitu:

$$S\left(t\right)=1-P\left(T\leq t\right)=1-F\left(t\right) \tag{2}$$

3. Fungsi *Hazard*

Fungsi *hazard* didefinisikan sebagai kelajuan suatu individu mati dalam interval waktu dari t sampai $t+\Delta t$, jika diketahui individu tersebut masih dapat bertahan hidup sampai dengan waktu t. Fungsi *hazard* dinyatakan sebagai berikut:

$$h\left(t\right)=\frac{f\left(t\right)}{S\left(t\right)},\qquad S\left(t\right)\neq 0 \tag{3}$$

DISTRIBUSI EKSPONENSIAL

Jika *t* adalah waktu *survival* dari variabel random kontinu *T* yang mengikuti distribusi Eksponensial dengan parameter θ, fungsi kepadatan peluang distribusi Eksponensial adalah [8]:

$$f\left(t\right)=\theta e^{-\theta t},\qquad t\geq 0,\ \theta>0$$

fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi Eksponensial adalah:

$$F\left(t;\theta\right)=1-e^{-\theta t}$$

Fungsi *survival* dari distribusi Eksponensial adalah:

$$S\left(t;\theta\right)=e^{-\theta t}$$

Sehingga fungsi *hazard* adalah:

$$h\left(t;\theta\right)=\theta$$

METODE BAYESIAN

Inferensi statistik dengan metode Bayesian memandang parameter θ sebagai variabel random yang memiliki distribusi yang disebut distribusi prior. Dari distribusi prior digabungkan dengan fungsi likelihood sehingga dapat ditentukan distribusi posterior, sehingga diperoleh estimasi Bayesian.

1. Fungsi *likelihood*

Fungsi *likelihood* pada data pengamatan $\left(t_i,\delta_i\right)$ $i=1,2,...,n$ ialah [7]:

$$L\left(\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}\left[f\left(t_i\right)\right]^{\delta_i}\left[S\left(t_i\right)\right]^{1-\delta_i}$$

Dengan δ_i adalah indikator penyensoran, bernilai 1 jika data tersensor dan bernilai 0 jika data tidak tersensor. Nilai t_i diperoleh dari $\min\left(T_i,C_i\right)$ $i=1,2,\cdots,n$, dengan T_i adalah waktu hidup individu ke i dengan $i=1,2,\cdots,n$, dan C_i adalah waktu penyensoran individu ke i dengan $i=1,2,\cdots,n$. Sehingga fungsi *likelihood* dari distribusi Eksponensial untuk data tersensor adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}L\left(t_i;\theta,\delta\right)&=\prod_{i=1}^{n}\left[\theta e^{-\theta t}\right]^{\delta_i}\left[e^{-\theta t_i}\right]^{1-\delta_i}\\&=\theta^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)}\end{aligned} \tag{4}$$

2. Distribusi prior

Dalam metode Bayesian, ketika suatu populasi mengikuti distribusi tertentu dengan suatu parameter didalamnya (dalam hal ini θ), maka parameter θ mengikuti suatu distribusi peluang yang disebut distribusi prior. Dalam kasus ini, distribusi Gamma ditetapkan sebagai prior informatif dan prior *Jeffreys* sebagai prior non-informatif, sehingga distribusi prior untuk prior Gamma dan prior *Jeffreys* ialah:

$$f(\theta)_G = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}, \qquad \alpha>0,\ \beta>0,\ \theta>0 \tag{5}$$

$$f(\theta)_J = k\frac{\sqrt{n}}{\theta}, \qquad \theta>0 \tag{6}$$

3. Distribusi posterior

Dalam estimasi Bayesian, setelah informasi sampel diambil dan prior telah ditentukan maka distribusi posteriornya dicari dengan menggabungkan priornya dengan informasi sampel yang diperoleh dari fungsi *Likelihood*, dimana prior ini independen terhadap fungsi *Likelihood* [9]. Distribusi posterior dinyatakan sebagai berikut:

$$f(\theta \mid t_i) = \frac{f(\theta)\,f(t_i \mid \theta)}{\int_0^\infty f(\theta)\,f(t_i \mid \theta)\,d\theta}, \qquad \theta>0,\ t_i>0$$

Fungsi kepadatan peluang $f(\theta \mid t_i)$ dan $f(\theta)$ masing-masing menunjukkan distribusi posterior dan distribusi prior, sedangkan $f(t_i \mid \theta)$ menunjukkan fungsi *likelihood*. Berdasarkan Persamaan (4) dan (5) distribusi posterior untuk model survival berdistribusi Eksponensial data tersensor menggunakan prior Gamma ialah:

$$f(\theta \mid t_i)_G = \frac{\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}\right)\left(\theta^{\sum_{i=1}^n \delta_i} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)}\right)}{\int_0^\infty \left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}\right)\left(\theta^{\sum_{i=1}^n \delta_i} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)}\right)d\theta}$$

$$= \frac{\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\sum_{i=1}^n \delta_i+\alpha-1} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^n t_i+\beta\right)}}{\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i+\beta}\right)^{\sum_{i=1}^n \delta_i+\alpha}\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \delta_i+\alpha\right)}$$

$$f(\theta \mid t_i)_G = \frac{\left(\sum_{i=1}^n t_i+\beta\right)^{\sum_{i=1}^n \delta_i+\alpha}\theta^{\sum_{i=1}^n \delta_i+\alpha-1} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^n t_i+\beta\right)}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \delta_i+\alpha\right)}, \qquad \delta_i>0,\ \alpha>0 \tag{7}$$

Berdasarkan Persamaan (7) dapat diketahui bahwa distribusi posterior dari distribusi Eksponensial ialah berdistribusi Gamma $\left(\sum_{i=1}^n \delta_i+\alpha, \sum_{i=1}^n t_i+\beta\right)$.

Berdasarkan Persamaan (4) dan (6) distribusi posterior untuk model survival berdistribusi Eksponensial data tersensor menggunakan prior *Jeffreys* ialah:

$$f(\theta \mid t_i)_J = \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)} k\frac{\sqrt{n}}{\theta}}{\int_0^\infty \theta^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)} k\frac{\sqrt{n}}{\theta}\, d\theta}$$

$$= \frac{k\sqrt{n}\ \theta^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i - 1} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)}}{k\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} t_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i} \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)}$$

$$f(\theta \mid t_i)_J = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i} \theta^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i - 1} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)}, \qquad \delta_i \geq 0 \tag{8}$$

METODE BAYESIAN GELF

Estimasi parameter yang digunakan pada penelitian ini menggunakan *General Entropy Loss Function* (GELF) dimana menyangkut pada fungsi kerugian *assymetric* yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathrm{L}\left(\theta, \hat{\theta}\right) = \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^{\alpha_1} - \alpha_1 \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1$$

Untuk $\alpha_1 \neq 0$, $0 < \theta < \infty$ dengan α_1 menunjukkan penyimpangan asimetri dan $\hat{\theta}$ merupakan estimator Bayesian GELF untuk parameter θ.

Estimasi Bayesian GELF dari θ pada distribusi Eksponensial diperoleh dengan meminimumkan ekspektasi *Loss Function* yang diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{d\left[E\left(\mathrm{L}\left(\hat{\theta}, \theta\right)\right)\right]}{d\theta} = 0$$

$$\frac{d\left[E\left(\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^{\alpha_1} - \alpha_1 \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1\right)\right]}{d\theta} = 0$$

$$E\left[\frac{\alpha_1 \hat{\theta}^{\alpha_1 - 1}}{\theta^{\alpha_1}} - \alpha_1 \frac{1}{\hat{\theta}}\right] = 0$$

$$\alpha_1 \hat{\theta}^{\alpha_1 - 1} E\left[\theta^{-\alpha_1}\right] = \frac{\alpha_1}{\hat{\theta}}$$

$$\hat{\theta} = \left(\left(E\left[\theta^{-\alpha_1}\right]\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}$$

Sehingga diperoleh:

$$\hat{\theta} = E\left[\theta^{-\alpha_1}\right]^{\frac{-1}{\alpha_1}} \tag{9}$$

Berdasarkan Persamaan (9) maka estimasi parameter dengan metode Bayesian GELF menggunakan prior Gamma ialah:

$$E\left[\theta^{-\alpha_1}\right]=\int_0^\infty \theta^{-\alpha_1} f\left(\theta \mid t_i\right) d\theta$$

$$=\int_0^\infty \theta^{-\alpha_1} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i+\beta\right)^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha\right)} \theta^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha-1} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n} t_i+\beta\right)} d\theta$$

$$=\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha-\alpha_1\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha\right)}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} t_i+\beta}\right)^{-\alpha_1}$$

Maka,

$$E\left[\theta^{-\alpha_1}\right]^{\frac{-1}{\alpha_1}}=\left(\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha-\alpha_1\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha\right)}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} t_i+\beta}\right)^{-\alpha_1}\right)^{\frac{-1}{\alpha_1}}$$

$$=\left(\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha-\alpha_1\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha\right)}\right)^{\frac{-1}{\alpha_1}}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} t_i+\beta}\right)$$

sehingga diperoleh $\hat{\theta}$ untuk prior Gamma adalah,

$$\hat{\theta}_G=\left(\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha-\alpha_1\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha\right)}\right)^{\frac{-1}{\alpha_1}}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} t_i+\beta}\right) \tag{10}$$

Estimasi parameter fungsi *survival* dan fungsi *hazard* dengan metode Bayesian GELF dari distribusi Eksponensial pada data tersensor menggunakan prior Gamma diperoleh:

$$\hat{S}_G\left(t_i;\hat{\theta}_G\right)=e^{-\hat{\theta}_G t}=e^{-\left(\left(\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha-\alpha_1\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha\right)}\right)^{\frac{-1}{\alpha_1}}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} t_i+\beta}\right)\right)t_i} \tag{11}$$

$$\hat{h}_G\left(t_i;\hat{\theta}_G\right)=\hat{\theta}_G=\left(\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha-\alpha_1\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\alpha\right)}\right)^{\frac{-1}{\alpha_1}}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} t_i+\beta}\right) \tag{12}$$

Berdasarkan Persamaan (9) maka estimasi parameter dengan metode Bayesian GELF menggunakan prior *Jeffreys* ialah:

$$E\left[\theta^{-\alpha_1}\right]=\int_0^\infty \theta^{-\alpha_1} f\left(\theta \mid t_i\right) d\theta$$

$$= \int_0^\infty \theta^{-\alpha_1} \frac{\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)^{\sum_{i=1}^n \delta_i} \theta^{\sum_{i=1}^n \delta_i - 1} e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \delta_i\right)} d\theta$$

$$= \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \delta_i - \alpha_1\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \delta_i\right)} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i}\right)^{-\alpha_1}$$

maka,

$$E\left[\theta^{-\alpha_1}\right]^{\frac{-1}{\alpha_1}} = \left(\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \delta_i - \alpha_1\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \delta_i\right)}\right)^{\frac{-1}{\alpha_1}} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i}\right)$$

sehingga diperoleh $\hat{\theta}$ untuk prior *Jeffreys* adalah,

$$\hat{\theta}_J = \left(\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \delta_i - \alpha_1\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \delta_i\right)}\right)^{\frac{-1}{\alpha_1}} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i}\right) \tag{13}$$

Estimasi parameter fungsi *survival* dan fungsi *hazard* dengan metode Bayesian GELF dari distribusi Eksponensial pada data tersensor menggunakan prior *Jeffreys* diperoleh:

$$\hat{S}_J\left(t_i;\hat{\theta}_J\right) = e^{-\hat{\theta}_J t} = e^{-\left(\left(\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \delta_i - \alpha_1\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \delta_i\right)}\right)^{\frac{-1}{\alpha_1}} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i}\right) t_i\right)} \tag{14}$$

$$\hat{h}_J\left(t_i;\hat{\theta}_J\right) = \hat{\theta}_J = \left(\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \delta_i - \alpha_1\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \delta_i\right)}\right)^{\frac{-1}{\alpha_1}} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i}\right) \tag{15}$$

STUDI KASUS

Estimasi parameter yang diperoleh dari metode Bayesian GELF prior Gamma dan prior *Jeffreys* dibandingkan menggunakan nilai *Mean Square Error* (MSE) dengan menggunakan data 137 pasien penderita kanker paru-paru yang diambil dari program R versi 3.3.0. MSE dari estimator untuk fungsi *survival* dan fungsi *hazard* didefinisikan sebagai berikut:

$$MSE\left(\hat{S}\right) = E\left[\left(\hat{S} - S\right)^2\right] \tag{16}$$

$$MSE\left(\hat{h}\right) = E\left[\left(\hat{h} - h\right)^2\right] \tag{17}$$

Dari data kanker paru-paru diperoleh $E(T)$=121.627, $\sum_{i=1}^n \delta_i = 128$, $\sum_{i=1}^n t_i = 16663$, dan $\beta = 0,008221$ maka untuk estimasi parameter fungsi *survival* dan fungsi *hazard* dengan metode Bayesian GELF prior Gamma disajikan dalam Tabel 1 dan 2 sebagai berikut:

Tabel 1 Hasil estimasi fungsi *survival* dari metode Bayesian GELF prior Gamma

No	t_i	Fungsi Survival	Fungsi Survival menggunakan Bayesian GELF prior Gamma (α_1)									
			5	4	3	2	1	-1	-2	-3	-4	-5
1	1	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992
2	1	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992
3	2	0,984	0,984	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986	0,984	0,984	0,984
4	3	0,976	0,976	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977
5	4	0,968	0,969	0,969	0,969	0,969	0,968	0,969	0,969	0,969	0,969	0,969
6	7	0,944	0,946	0,946	0,947	0,947	0,948	0,947	0,947	0,947	0,947	0,946
7	7	0,944	0,946	0,946	0,947	0,947	0,948	0,947	0,947	0,945	0,945	0,946
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
137	999	4E-04	5E-04	5E-04	5E-04	5E-04	5E-04	5E-04	4E-04	4E-04	4E-04	4E-04

Tabel 2 Hasil estimasi fungsi *hazard* dari metode Bayesian GELF prior Gamma

Fungsi Hazard	Fungsi Hazard menggunakan Bayesian GELF prior Gamma									
	$\alpha_1 = 5$	$\alpha_1 = 4$	$\alpha_1 = 3$	$\alpha_1 = 2$	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 = -1$	$\alpha_1 = -2$	$\alpha_1 = -3$	$\alpha_1 = -4$	$\alpha_1 = -5$
0.00822	0.0076	0.0076	0.0076	0.0077	0.0077	0.0077	0.0078	0.0078	0.0078	0.0079

Estmasi parameter fungsi *survival* dan fungsi *hazard* dengan metode Bayesian GELF prior *Jeffreys* disajikan dalam Tabel 3 dan 4 sebagai berikut:

Tabel 3 Hasil estimasi fungsi *survival* dari metode Bayesian GELF prior *Jeffreys*

No	t_i	Fungsi Survival	Fungsi Survival menggunakan Bayesian GELF prior *Jeffreys* (α_1)									
			5	4	3	2	1	-1	-2	-3	-4	-5
1	1	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992
2	1	0,992	0,999	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992
3	2	0,984	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,984
4	3	0,976	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977
5	4	0,966	0,967	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,969	0,969	0,969
6	7	0,944	0,948	0,948	0,948	0,948	0,948	0,948	0,947	0,947	0,947	0,947
7	7	0,944	0,948	0,948	0,948	0,948	0,948	0,948	0,947	0,947	0,947	0,947
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
137	999	4E-04	5E-04	4E-04	4E-04	5E-04	4E-04	4E-04	4E-04	4E-04	4E-04	4E-04

Tabel 4 Hasil estimasi fungsi *hazard* dari metode Bayesian GELF prior *Jeffreys*

Fungsi Hazard	Fungsi Hazard menggunakan Bayesian GELF prior *Jeffreys*									
	$\alpha_1 = 5$	$\alpha_1 = 4$	$\alpha_1 = 3$	$\alpha_1 = 2$	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 = -1$	$\alpha_1 = -2$	$\alpha_1 = -3$	$\alpha_1 = -4$	$\alpha_1 = -5$
0.00822	0.0075	0.0075	0.0076	0.0076	0.0076	0.0077	0.0077	0.0077	0.0078	0.0078

Selanjutnya, nilai MSE yang dihitung menggunakan Persamaan (7) dan (8) disajikan pada Tabel 5 sebagai berikut:

Tabel 5 Hasil perbandingan MSE metode Bayesian GELF menggunakan prior Gamma dan prior *Jeffreys*

α_1	MSE Survival		MSE Hazard	
	Gamma	Jeffreys	Gamma	Jeffreys
5	0.000469022	0.000562179	4.36426E-07	5.1932E-07
4	0.000425585	0.00051418	3.97453E-07	4.76722E-07
3	0.000384459	0.000468548	3.60352E-07	4.36001E-07
2	0.000345611	0.000425247	3.25114E-07	3.97149E-07
1	0.000309008	0.000384245	2.91732E-07	3.60158E-07
-1	0.000242409	0.000309004	2.30505E-07	2.91728E-07
-2	0.000212351	0.0002747	2.02645E-07	2.60274E-07
-3	0.000184412	0.000242566	1.7661E-07	2.3065E-07
-4	0.000158563	0.000212572	1.52394E-07	2.0285E-07
-5	0.000134775	0.000184686	1.2999E-07	1.76866E-07

Dari Tabel 5 menunjukkan bahwa semakin kecil nilai α_1 maka semakin kecil pula nilai MSE yang diperoleh, akan tetapi pada prior Gamma memiliki nilai MSE lebih kecil dari pada nilai MSE pada prior *Jeffreys*. Berdasarkan nilai MSE hasil estimasi pada penelitian ini, maka diperoleh metode Bayesian GELF prior Gamma lebih baik dibandingkan prior *Jeffreys* untuk mengestimasi model *survival* berdistribusi Eksponensial pada data tersensor pada penelitian kanker paru-paru yang diambil dari program R versi 3.3.0

Dari hasil estimasi metode Bayesian GELF prior Gamma, jika dilihat dari α_1 maka $\alpha_1 = -5$ yang memiliki nilai MSE terkecil, sehingga jika diambil sebarang nilai t_i pada data penderita kanker paru-paru dengan $t_1 = 1$, $t_2 = 80$, $t_3 = 250$, $t_4 = 587$ dan $t_5 = 999$ maka dapat diketahui peluang individu dapat bertahan hidup sebagai berikut:

$$\hat{S}\left(t_1;\hat{\theta}\right) = e^{-\left(\left(\frac{\Gamma(134)}{\Gamma(129)}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{16663+0.008221}\right)\right)(1)} = 0.992169551$$

$$\hat{S}\left(t_2;\hat{\theta}\right) = e^{-\left(\left(\frac{\Gamma(134)}{\Gamma(129)}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{16663+0.008221}\right)\right)(80)} = 0.5331772256$$

$$\hat{S}\left(t_3;\hat{\theta}\right) = e^{-\left(\left(\frac{\Gamma(134)}{\Gamma(129)}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{16663+0.008221}\right)\right)(250)} = 0.14011148$$

$$\hat{S}\left(t_4;\hat{\theta}\right) = e^{-\left(\left(\frac{\Gamma(134)}{\Gamma(129)}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{16663+0.008221}\right)\right)(587)} = 0.009906501$$

$$\hat{S}\left(t_5;\hat{\theta}\right) = e^{-\left(\left(\frac{\Gamma(134)}{\Gamma(129)}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{16663+0.008221}\right)\right)(999)} = 0.000388427$$

Pada kasus ini diketahui peluang hidup seseorang untuk bertahan hidup apabila mengidap penyakit kanker paru-paru selama 1 hari adalah 0.992169551, selama 80 hari adalah 0.5331772256, selama 250 hari adalah 0.14011148, selama 587 hari adalah 0.009906501, dan selama 999 hari adalah 0.000388427.

Dari hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa semakin lama seseorang mengidap penyakit paru-paru maka peluang hidupnya semakin kecil (mendekati nol), hingga pada akhirnya mengalami kematian.

PENUTUP

Estimasi parameter model *survival* distribusi Eksponensial data tersensor dengan menggunakan metode Bayesian GELF prior Gamma dan prior *Jeffreys* dilakukan dengan data waktu *survival* 137 pasien penderita kanker paru-paru yang diambil dari program R versi 3.3.0. Nilai MSE dengan $\alpha_1 = -5$ adalah yang terkecil, MSE fungsi *survival* dan fungsi *hazard* untuk prior Gamma ialah 0.000135766 dan 1.2999E-07, sedangkan MSE fungsi *survival* dan fungsi *hazard* untuk prior *Jeffreys* ialah0.000186044 dan 1.76866E-07. Dapat dilihat nilai MSE prior Gamma lebih kecil dibandingkan dengan prior *Jeffreys*. Berdasarkan hasil estimasi parameter metode Bayesian GELF prior Gamma untuk studikasus kanker paru-paru dapat diketahui peluang hidup pasien jika mengidap penyakit kanker paru-paru selama 1 hari adalah 0.992169551, selama 80 hari adalah 0.5331772256, selama 250 hari adalah 0.1401114799, selama 587 hari adalah 0.0099065012, dan selama 999 hari adalah 0.0003884266.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Kleinbaum, D. G. & Klein, M., 2005. *Survival Analysis: A Self-Learning Text.* 2nd ed. New York: Springer Science Business Media, Inc.

[2]. Berger, J. O., 1985. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis.* New York: Springer.

[3]. Al-Kutubi, H. S. & Ibrahim, N. A., 2009. Bayes Estimator for Exponential Distribution with Extension of Jeffreys Prior Information. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences,* III(3), pp. 297-313.

[4]. Guure, C. B. & Ibrahim, N. A., 2012. Bayesia Analysis of the Survival Function and Failure Rate of Weibull Distribution with Censored Data. *Journal Mathematical Problem in Enginering,* Volume 2012.

[5]. Fitria, S., Helmi & Rizki, S. W., 2016. Estimasi Parameter Model Survival Distribusi Eksponensial Data Tersensor dengan Metode Maksimum Likelihood dan Bayesian SELF. *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster),* V(3), pp. 213-220.

[6]. Rizki, S. W., Mara, M. N. & Sulistianingsih, E., 2017. Survival Bayesian Estimation of Exponential-Gamma Under Linex Loss Function. *Journal of Physics: conf series 885, 012036.*

[7]. Lawless, J.F., 1982. *Statistical Methods for Survival Data Analysis.* 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, Inc.

[8]. Lee, E. T. & Wang, j. w., 2003. *statistical Methods for Survival Data Analysis.* 3rd ed. Canada: A John Wiley & Sons, Inc.

[9]. Bolstad, W. M., 2007. *Introduction to Bayesian Statistics.* 2nd ed. America: A John Wiley & Sons, Inc.

SURATI : Fakultas MIPA Universitas Tanjungpura, Pontianak,
Ratihlesnanda@gmail.com
HELMI : Fakultas MIPA Universitas Tanjungpura, Pontianak,
Helmi132205@yahoo.co.id
SETYO WIRA RIZKI : Fakultas MIPA Universitas Tanjungpura, Pontianak,
Setyo.wirarizki@math.untan.ac.id