Buletin Ilmiah Math, Stat, dan Terapannya (Bimaster)
Volume 07, No. 2 (2018), hal 71-76.

KESTABILAN SISTEM PENDULUM TERBALIK DENGAN MENGGUNAKAN METODE LQR

Irfant Bayu Pratama, Helmi, Yudhi

INTISARI

Sistem pendulum terbalik merupakan sistem yang tidak stabil dan nonlinear. Sistem ini tidak dapat mempertahankan kemiringan sudut pendulum, dikarenakan keberadaan gravitasi. Kemiringan sudut pendulum dapat mengubah kecepatan gerak kereta. Berdasarkan permasalahan tersebut, untuk mempertahankan keseimbangan sudut pendulum digunakan metode LQR. Langkah awal yang dilakukan adalah menentukan model dengan menggunakan persamaan Lagrange. Dari model tersebut dibuat persamaan state space, kemudian dilinearisasi menggunakan matriks Jacobi agar didapat persamaan yang linear. Dalam penelitian ini penerapan metode LQR dapat digunakan apabila pada karakteristiknya yaitu keterkontrolan mempunyai nilai rank empat. Hasil dari simulasi menunjukkan bahwa kereta mampu bergerak dengan kecepatan konstan dengan mempertahankan keadaan seimbang pendulum di sekitar nol radian.

***Kata Kunci** : nonlinear, persamaan Lagrange, state space*

PENDAHULUAN

Penelitian tentang pendulum terbalik sudah lama dilakukan diberbagai belahan dunia, dengan berbagai cara dan bentuk penelitian yang dilakukan agar dapat membuat kesimpulan tentang pengontrol pendulum terbalik. Prinsip kerja dari pendulum terbalik membuat banyak peneliti melakukan penelitian tentang pendulum terbalik salah satunya pada bidang model kereta, karakteristik dari sistem nonlinear yang sederhana tapi sulit untuk dikontrol pada bidang model kereta sehingga sering menggunakan berbagai metode untuk mengontrolnya.

Sistem pendulum terbalik merupakan sistem yang tidak stabil dan nonlinear [1], sehingga untuk mengontrolnya diperlukan teknik kontrol yang tidak mudah dibanding dengan teknik kontrol pada sistem yang linear dan stabil. Secara umum, sistem pendulum terbalik banyak digunakan sebagai bentuk nyata dalam suatu sistem kontrol.

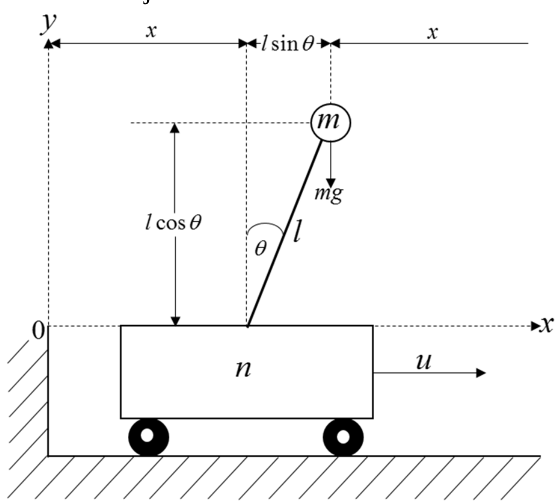
Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, sistem pendulum terbalik merupakan suatu sistem yang sangat penting dalam penelitian di bidang kontrol. Beberapa teori dan metode kontrol banyak diuji dan dibandingkan melalui pengujian terhadap sistem pendulum terbalik. Hal tersebut dikarenakan sistem pendulum terbalik merupakan sistem nonlinear yang kompleks dan tidak stabil, dapat dilinearisasi di sekitar titik kesetimbangan, serta mudah diterapkan dalam sistem aktual.

Sistem pendulum terbalik memiliki beberapa permasalahan kontrol diantaranya *swing-up*, stabilisasi, dan *tracking*. *Swing-up* merupakan kondisi sistem pendulum terbalik dalam mengayunkan batang pendulum dari posisi menggantung menjadi terbalik. Selanjutnya kondisi sistem pendulum terbalik dalam mempertahankan posisi pendulum dalam keadaan terbalik disebut stabilisasi. Sedangkan *tracking* adalah upaya untuk mengontrol kereta agar mengikuti sinyal referensi yang diberikan dengan mempertahankan pendulum pada posisi terbalik. Oleh karena itu, penelititan ini membahas tentang kestabilan dari sistem pendulum terbalik melalui *Linear Quadratic Regulator* (LQR) agar stabil dan dapat dikontrol [2].

Berdasarkan uraian tersebut maka tujuan pada penelitian ini adalah untuk membentuk model matematika dari sistem pendulum terbalik dan menganalisis kestabilan sistem pendulum terbalik dengan menggunakan metode LQR.

PEMBENTUKAN MODEL SISTEM PENDULUM TERBALIK

Pendulum terbalik merupakan sebuah bandul dengan massa bandul tersebut berada di atas titik tumpunya. Pada kasus ini titik tumpu diletakkan di atas sebuah kereta yang dapat digerakkan dalam arah horizontal. Berbeda dengan pendulum sederhana (tidak terbalik) yang memiliki sifat stabil, pendulum terbalik memiliki sifat yang tidak stabil, sehingga harus diatur sedemikian rupa agar pendulum tetap tegak dengan cara memberikan gaya pada titik tumpunya atau pada keretanya. Berikut rangkaian dari pendulum terbalik ditunjukkan dalam Gambar 1.



Gambar 1 Model dari pendulum terbalik

Gambar 1 adalah sebuah contoh dari pendulum terbalik. Dalam kasus ini, kereta yang dilengkapi motor hanya dapat bergerak dalam garis horizontal dan pendulum yang diletakkan di atas kereta berotasi dalam bidang yang sama. Gaya u diberikan kepada kereta melalui motor yang terdapat pada kereta tersebut, tanpa adanya gaya yang sesuai, pendulum akan jatuh. Sudut θ merupakan sudut antara pendulum dengan garis vertikal. Massa dari kereta dan pendulum masing-masing dilambangkan dengan n dan m. Sedangkan l merupakan panjang dari batang pendulum dan g adalah gravitasi bumi.

Jika kereta diberi gaya sebesar u maka timbul energi kinetik pada kereta dan sekaligus timbul energi kinetik pada pendulum. Energi kinetik merupakan usaha yang diberikan untuk menggerakkan sebuah benda dengan massa tertentu dari keadaan diam hingga bergerak untuk mencapai kecepatan tertentu [3]. Energi kinetik pada sistem pendulum terbalik adalah:

$$T = \frac{1}{2}(n+m)\dot{x}^2 + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\theta^2$$

Energi potensial adalah suatu energi yang dimiliki oleh benda karena kedudukan terhadap bumi [3]. Energi potensial pada sistem pendulum terbalik adalah:

$$V = mgl\cos\theta$$

Dengan menggunakan Persamaan *Lagrange* diperoleh energi mekanik dari sistem pendulum terbalik sebagai berikut:

$$L = \frac{1}{2}(n+m)\dot{x}^2 + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \tag{1}$$

Dari Persamaan (1) diperoleh bentuk gerak translasi dan gerak osilasi sistem pendulum terbalik sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=u$$

$$\left(n+m\right)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^{2}\sin\theta=u \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

$$m\ddot{x}l\cos\theta-m\dot{x}l\dot{\theta}\sin\theta+ml^{2}\ddot{\theta}-\left(-m\dot{x}l\dot{\theta}\sin\theta+mgl\sin\theta\right)=0$$

$$m\ddot{x}l\cos\theta+ml^{2}\ddot{\theta}-mgl\sin\theta=0 \tag{3}$$

diasumsikan bahwa θ dan $\dot{\theta}$ sangat kecil, sehingga didapat

$$\sin\theta=\theta$$

$$\cos\theta=1$$

$$\theta\dot{\theta}^{2}=0$$

Asumsi-asumsi tersebut disubstitusikan ke Persamaan (2) dan Persamaan (3) sehingga diperoleh model dari sistem pendulum terbalik sebagai berikut:

$$\ddot{x}=\frac{u-mg\theta}{n} \tag{4}$$

$$\ddot{\theta}=\frac{\left(n+m\right)g\theta-u}{nl} \tag{5}$$

ANALISIS KESTABILAN SISTEM DENGAN METODE LQR

Dengan mengacu pada model sistem pendulum terbalik yang diuraikan sebelumnya, dapat ditetapkan keadaan dengan $y(t)=(\theta,x)$ sebagai koordinat umum dan $x(t)=\left(\theta,\dot{\theta},x,\dot{x}\right)$ sebagai *state*. Bentuk *state* apabila dibawa ke dalam bentuk *state space* maka ditulis:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \ddot{\theta}\\ \dot{x}\\ \ddot{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}$$

Berdasarkan bentuk *state space* dari Persamaan (4) dan Persamaan (5), diperoleh:

$$\dot{x}_1=\dot{\theta}=x_2$$

$$\dot{x}_2=\ddot{\theta}=\frac{\left(n+m\right)gx_1-u}{nl}$$

$$\dot{x}_3=\dot{x}=x_4$$

$$\dot{x}_4=\ddot{x}=\frac{u-mgx_1}{n}$$

sehingga didapat persamaan *state space* dari sistem pendulum terbalik sebagai berikut:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(n+m)g}{nl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{n} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{nl} \\ 0 \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} u(t) \tag{6}$$

$$y = Cx(t) + Du(t)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \tag{7}$$

Dari persamaan *state space* ini, akan dilihat kestabilan dari sistem pendulum terbalik dengan melihat nilai eigen dari matriks A pada Persamaan (6), maka diperoleh:

$$\lambda_{1,2} = 0$$
$$\lambda_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{nl(n+m)g}}{nl}$$

Karena ada nilai dari sistem yang lebih besar dari nol, maka sistem pendulum terbalik tidak stabil.

Karena sistem pendulum terbalik tidak stabil, maka akan dilihat kekontrolan sistem pendulum terbalik tersebut dengan menggunakan teorema berikut:

Teorema 1 [4] *Sistem linear time-invariant*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

dikatakan terkontrol jika dan hanya jika matriks Kalman

$$M = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{(n-1)}B] \in \mathbb{R}^{nxn}$$

mempunyai rank sama dengan n.

Berdasarkan Teorema 1, maka diperoleh:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{nl} & 0 & -\frac{(n+m)g}{n^2l^2} \\ -\frac{1}{nl} & 0 & -\frac{(n+m)g}{n^2l^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & \frac{mg}{n^2l} \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{mg}{n^2l} & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

dengan melakukan operasi baris eselon tereduksi pada Persamaan (8), maka diperoleh

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga pendulum terbalik terkontrol karena mempunyai rank sama dengan empat.

Setelah sistem pendulum terbalik tidak stabil tetapi terkontrol, memilih vektor kontrol $u(t)$ yang memenuhi Persamaan (6) serta dapat meminimumkan indeks perilaku berbentuk:

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt$$

dengan Q adalah matriks semidefinit positif dan R adalah matriks definit positif.
Solusi dari LQR didapat dari matriks *gain Kalman* sebagai berikut:

$$K(t) = R^{-1} B^T P(t)$$

dengan matriks $P(t)$ yang dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *Riccati*, yaitu:

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0$$

SIMULASI MODEL SISTEM PENDULUM TERBALIK

Dengan mensubstitusikan nilai $n = 2,5$ kg, $m = 0,25$ kg, $l = 0,5$ m dan $g = 9,8$ m/s, diperoleh persamaan sistem pendulum terbalik sebagai berikut:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 21,56 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,98 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,8 \\ 0 \\ 0,4 \end{bmatrix} u(t) \qquad (9)$$

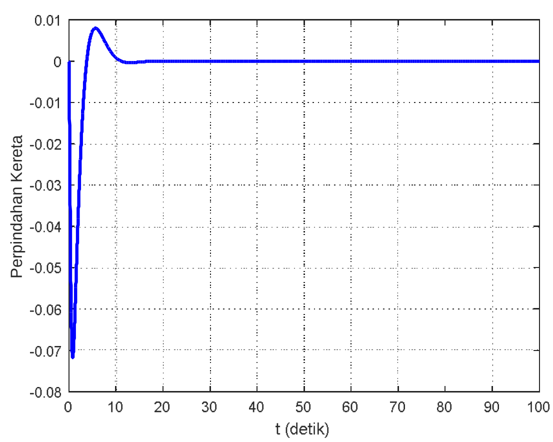
dan

$$y = Cx(t) + Du(t)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \qquad (10)$$

Dari Persamaan (9) dan Persamaan (10) didapat nilai dari matriks *gain Kalman* yaitu:

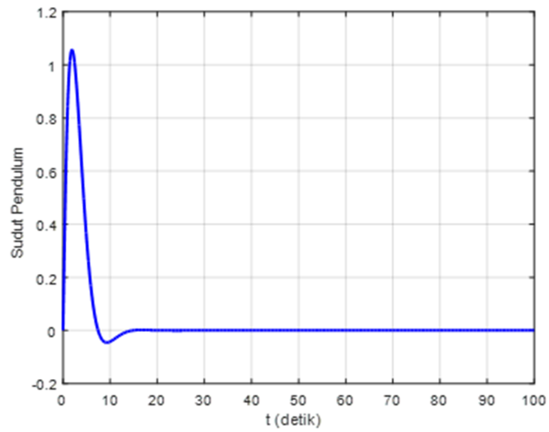
$$K = \begin{bmatrix} -64,7783 & -14,0658 & -1 & -2,7785 \end{bmatrix}$$

Hasil simulasi kestabilan pada kereta dan pendulum dari sistem pendulum terbalik diperoleh:



Gambar 2 Hasil simulasi kestabilan pada kereta dari sistem pendulum terbalik

Gambar 2 merupakan hasil dari simulasi kestabilan pada kereta. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa saat kereta pada $0 \le t \le 10$ dalam keadaan yang tidak stabil dan mulai kereta mulai stabil pada saat $t > 10$.



Gambar 3 Hasil simulasi kestabilan pada pendulum dari sistem pendulum terbalik

Sedangkan Gambar 3 merupakan hasil dari simulasi kestabilan pada pendulum. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa saat pendulum pada $0 \leq t \leq 12$ dalam keadaan yang tidak stabil dan mulai pendulum mulai stabil pada saat $t > 12$.

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan, maka dapat ditarik kesimpulan, yaitu:

1. Menggunakan teknik persamaan *Lagrange*, model dari sistem pendulum terbalik sebagai berikut:

$$\ddot{x} = \frac{u - mg\theta}{n}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(n+m)g\theta - u}{nl}$$

2. Sistem pendulum terbalik merupakan sistem yang tidak stabil, tetapi dapat distabilkan dengan menggunakan metode LQR.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Eizadiyan Muhammad Ali. Control of Inverted Pendulum Cart System by Use of PID Cotroller. *Sci.Int.(Lahore)* .2015; 27(2):1063-1068.

[2]. Putri RA dan Agustinah T. Kontrol Tracking Fuzzy-Optimal untuk Sistem Pendulum-Kereta. *Jurnal Teknik Pomits*. 2013; 2(2):333-338.

[3]. Bueche FJ dan Hecht E. *Collage Physics 9th edition*. McGraw-Hill: United State of America;1997.

[4]. Remsing CC. *AM3.2 – Linear Control*. Rhodes University: South Africa;2006.

IRFANT BAYU PRATAMA : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
irfantbayupratama@gmail.com

HELMI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
helmi132205@yahoo.co.id

YUDHI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
dhye_dhoank@yahoo.co.uk