Buletin Ilmiah Math, Stat, dan Terapannya (Bimaster)
Volume 07, No. 1 (2018), hal 33-40.

KARAKTER REPRESENTASI S_n

Megawati June, Helmi, Fransiskus Fran

INTISARI

Karakter merupakan trace pada setiap matriks representasi dari elemen grup. Karakter dikelompokkan menjadi karakter reducible dan karakter irreducible. Selain menggunakan matriks, karakter pada representasi S_n dapat dihitung menggunakan tablo Young. Tablo Young digunakan untuk menentukan tabloid dari λ partisi n $(\lambda \vdash n)$ untuk memperoleh nilai dimensi dan karakter dari M^λ yang merupakan representasi reducible dari S_n, sedangkan tablo Young standar digunakan untuk menentukan polytabloid dari $\lambda \vdash n$ untuk memperoleh nilai dimensi dan karakter dari S^λ yang merupakan representasi irreducible dari S_n.

***Kata Kunci** : grup permutasi, teori representasi, tablo Young*

PENDAHULUAN

Teori representasi diperkenalkan pada 1896 oleh matematikawan Jerman F. G. Frobenius [1]. Teori representasi merupakan cabang matematika yang mempelajari struktur aljabar abstrak dengan mendeskripsikan elemennya melalui matriks dan operasi aljabar. Salah satu objek aljabar yang menggunakan teori representasi yaitu grup. Pada teori representasi grup, elemen dari grup direpresentasikan melalui matriks nonsingular untuk memperoleh karakter dari representasi grup tersebut. Karakter dari representasi grup merupakan *trace* pada matriks representasi yang bersesuaian dari elemen grup.

Grup permutasi merupakan grup hingga yang memiliki elemen berupa himpunan permutasi dengan komposisi fungsi sebagai operasi grup. Selain menggunakan matriks representasi, cara lain yang digunakan untuk menghitung karakter grup permutasi adalah menggunakan tablo Young. Tablo Young merupakan objek kombinatorik yang digunakan dalam teori representasi grup permutasi yang diperkenalkan oleh Alfred Young, seorang matematikawan Cambridge University pada 1900 [2]. Oleh sebab itu, dalam penelitian ini dibahas cara menghitung karakter dari representasi grup permutasi S_n menggunakan tablo Young. Berdasarkan uraian tersebut maka dengan menggunakan tablo Young dapat diperoleh nilai karakter dari grup permutasi S_n. Contoh kasus pada penelitian ini menggunakan S_5.

Proses perhitungan karakter grup permutasi menggunakan tablo Young dimulai dengan menentukan jumlah elemen dari grup permutasi. Dari grup permutasi dapat diperoleh λ yang bersesuaian pada n. Untuk setiap partisi dari n dapat membentuk diagram Young. Selanjutnya didapat $n!$ tablo Young pada setiap diagram Young yang terbentuk dari λ partisi $(\lambda \vdash n)$. Tablo-tablo Young dengan baris yang *equivalent* dapat menghasilkan suatu tabloid. Jumlah tabloid yang dihasilkan merupakan dimensi representasi *reducible* dari S_n yang dikenal dengan modul permutasi. Karakter *reducible* S_n diperoleh dari jumlah tabloid yang barisnya tetap *equivalent* setelah dipermutasikan. Sedangkan untuk representasi *irreducible* dari S_n dikenal dengan modul Specht. Nilai dimensi diperoleh dari jumlah *polytabloid* standar dari λ partisi n $(\lambda \vdash n)$ dan nilai karakter *irreducible* diperoleh dari jumlah *polytabloid* yang tetap setelah dipermutasikan.

TEORI REPRESENTASI

Representasi dari grup G merupakan langkah untuk memvisualkan G sebagai grup matriks. Berikut diberikan definisi dari representasi grup.

Definisi 1 [3] *Diberikan G suatu grup hingga dan diberikan $GL(n,\mathbb{C})$ suatu grup dari matriks nonsingular derajat n atas $\mathbb{C}$. Representasi ρ dari grup hingga G adalah homomorpisma*

$$\rho : G \to GL(n,\mathbb{C})$$

Contoh 2 Diberikan $G = S_n$ dan $\pi \in S_n$. Lebih lanjut didefinisikan $\rho(\pi) = (x_{ij})_{n\times n}$ dengan

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } \pi(j) = i \\ 0 & \text{untuk lainnya.} \end{cases}$$

Matriks $\rho(\pi)$ disebut matriks permutasi, karena hanya memuat bilangan nol dan satu, dengan bilangan satu berada pada setiap baris dan kolom [4]. Karena matriks permutasi memenuhi sifat homomorfisma pada Definisi 1, maka matriks permutasi merupakan matriks representasi untuk S_n.
Untuk S_n dengan $n = 3$ dengan $\pi \in S_3$ diperoleh matriks permutasi sebagai berikut

$$\rho\big((e)\big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho\big((1\ 2)\big) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho((1\ 3)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho((2\ 3)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \rho((1\ 2\ 3)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \rho((1\ 3\ 2)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Representasi dikelompokkan menjadi dua yaitu representasi *reducible* dan representasi *irreducible*. Untuk mengelompokkan representasi tersebut digunakan G-modul. Adapun lebih jelasnya dapat dilihat pada Definisi 3, Teorema 4 dan Definisi 5 berikut.

Definisi 3 [3] *Diberikan V suatu ruang vektor atas $\mathbb{C}$ dan G suatu grup. Ruang vektor V dikatakan G-modul apabila terdapat perkalian vg, sedemikian sehingga*

i. $vg \in V$

ii. $v(gh) = (vg)h$

iii. $v1_G = v$

iv. $(\alpha v)g = \alpha(vg)$

v. $(u + v)g = ug + vg$

untuk setiap $g, h, \in G, u, v \in V$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{C}$.

Teorema 4 [3] *Misalkan $\rho : G \to GL(n,\mathbb{C})$ adalah representasi dari G atas $\mathbb{C}$ dan $V = \mathbb{C}^n$. Ruang vektor V merupakan G-modul jika didefinisikan perkalian $vg = v\big(\rho(g)\big)$ untuk setiap $v \in V$ dan $g \in G$.*

Definisi 5 [5] *Representasi dikatakan reducible apabila G-modul V memiliki basis $\mathcal{B}$ untuk setiap $g \in G$ yang menghasilkan bentuk matriks representasi berikut*

$$\rho(g) = \begin{bmatrix} A(g) & B(g) \\ 0 & C(g) \end{bmatrix}$$

atau

$$\rho(g) = \begin{bmatrix} A(g) & 0 \\ B(g) & C(g) \end{bmatrix}$$

dengan $A(g)$, $C(g)$ masing-masing merupakan matriks persegi dari derajat r, s dan $B(g)$ merupakan matriks $(r \times s)$ dengan $r \geq 1$, $s \geq 1$ dan $r + s = n$. Representasi dikatakan irreducible jika tidak reducible.

Contoh 6 Diberikan $G = S_3$, dan ruang vektor $V = \mathbb{C}^3$ memiliki basis $\mathcal{B} = \{v_1 + v_2 + v_3, v_2, v_3\}$. Representasi $\rho(e)$ merupakan matriks identitas derajat 3. Untuk $g = (1\ 2)$ diperoleh $\rho((1\ 2))$ sebagai berikut

$$(v_1 + v_2 + v_3)(1\ 2) = v_1 + v_2 + v_3;$$
$$v_2(1\ 2) = v_1 = (v_1 + v_2 + v_3) - v_2 - v_3;$$
$$v_3(1\ 2) = v_3$$

jadi

$$\rho((1\ 2)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan cara yang sama diperoleh $\rho(\pi)$ untuk 4 elemen lainnya dari S_3 yaitu

$$\rho((1\ 3)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \rho((2\ 3)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\rho((1\ 2\ 3)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \rho((1\ 3\ 2)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dapat dilihat bahwa seluruh matriks tersebut membentuk representasi *reducible* $\rho(\pi) = \begin{bmatrix} A(g) & B(g) \\ 0 & C(g) \end{bmatrix}$
dengan $A(g) = [1], B(g) = [b_{11} \quad b_{12}]$ dan $C(g) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$.

Contoh 7 Diberikan $G = S_3$, dan ruang vektor $V = \mathbb{C}^3$. Terdapat subruang W dengan basis $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ dengan $w_1 = v_1 - v_2$ dan $w_2 = v_2 - v_3$ dengan v_1, v_2 dan v_3 merupakan basis standar. Representasi $\rho(e)$ merupakan matriks identitas derajat 2. Untuk nilai $g = (1\ 2)$ diperoleh $\rho((1\ 2)\ )$ sebagai berikut

$$w_1(1\ 2)\ = (v_1 - v_2)(1\ 2)\ = -(v_1 - v_2) = -w_1;$$
$$w_2(1\ 2)\ = (v_2 - v_3)(1\ 2)\ = v_1 - v_3 = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) = w_1 + w_2;$$

jadi

$$\rho((1\ 2)\ ) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan cara yang sama diperoleh $\rho(\pi)$ untuk 4 elemen lainnya dari S_3 yaitu

$$\rho((1\ 3)) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \rho((2\ 3)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \rho((1\ 2\ 3)) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \rho((1\ 3\ 2)) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

Matriks yang dihasilkan membentuk representasi *irreducible* karena terdapat $g \in G$ sehingga

$$\rho(\pi) \neq \begin{bmatrix} A(g) & B(g) \\ 0 & C(g) \end{bmatrix} \text{ atau } \begin{bmatrix} A(g) & 0 \\ B(g) & C(g) \end{bmatrix}.$$

Nilai karakter dari representasi grup diperoleh dari *trace* pada setiap matriks representasi yang dihasilkan. Definisi karakter dapat dilihat pada Definisi 8 berikut.

Definisi 8 [3] *Diberikan $\rho(g)$ dengan $g \in G$ adalah representasi grup hingga G, maka karakter $dari$ ρ adalah $\chi(g) = tr(\rho(g))$. Karakter χ dikatakan karakter irreducible dari G jika χ merupakan karakter dari representasi irreducible, dan χ dikatakan reducible jika χ merupakan karakter dari representasi reducible.*

Contoh 9 Akan dihitung karakter dari representasi *irreducible* pada Contoh 7. Untuk $(1\ 2) \in S_3$ dengan $\rho((1\ 2)) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, karakter *irreducible* dari matriks representasi tersebut adalah

$$\chi((1\ 2)) = tr(\rho((1\ 2))) = tr \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1) + 1 = 0$$

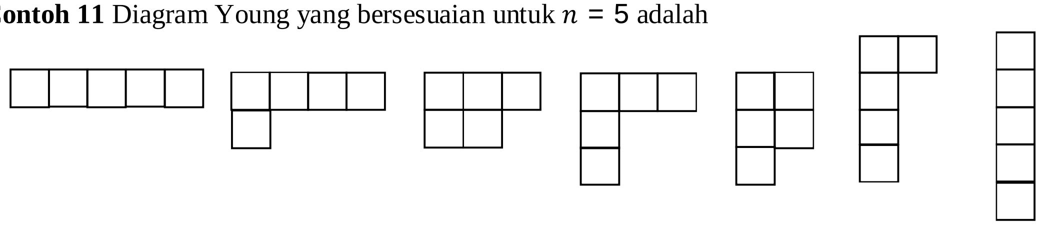
TABLO YOUNG

Selain menghitung *trace* pada matriks representasi yang dihasilkan, nilai karakter representasi S_n juga dapat diperoleh menggunakan konsep tablo Young. Melalui tablo Young, nilai karakter *reducible* dari representasi S_n dapat diperoleh secara langsung dari tabloid yang dihasikan pada tablo Young dan nilai karakter *irreducible* diperoleh secara langsung dari polytabloid yang dihasilkan pada tablo Young standar.

Grup permutasi S_n merupakan himpunan permutasi dari n elemen. Suatu partisi dari bilangan bulat n merupakan rangkaian dari bilangan bulat positif $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ dengan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0$ dan $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l$. Untuk menyatakan bahwa λ merupakan partisi dari n digunakan notasi $\lambda \vdash n$ [4]. Sebagai contoh, $n = 5$ memiliki partisi (5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1). Partisi digunakan untuk membentuk diagram Young. Adapun definisi diagram Young dapat dilihat pada Definisi 10 berikut ini.

Definisi 10 [6] *Diagram Young adalah kumpulan dari kotak-kotak yang membentuk baris yang bertumpu pada sebelah kiri, dengan jumlah kotak yang berurutan ke bawah sesuai urutan partisi. Diagram Young yang bersesuaian dengan $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ menunjukkan bahwa diagram Young memiliki l baris, d an λ_i kotak pada baris ke i.*

Contoh 11 Diagram Young yang bersesuaian untuk $n = 5$ adalah



(5) (4, 1) (3, 2) (3, 1, 1) (2, 2, 1) (2, 1, 1, 1) (1, 1, 1, 1, 1)

Apabila setiap kotak pada diagram Young diisi dengan bilangan dari satu sampai n, maka diagram tersebut dikatakan sebagai tablo Young dari partisi yang bersesuaian. Lebih jelasnya dapat dilihat pada Definisi 12 berikut.

Definisi 12 [4] *Suatu tablo T dari bentuk λ, diperoleh dengan mengisi kotak-kotak pada diagram Young dari λ dengan $1, 2, \dots, n$, dengan masing-masing bilangan terjadi tepat satu kali. Tablo Young dari bentuk λ juga disebut λ-tablo.*

Contoh 13 Salah satu tablo Young dari $\lambda = (4, 1)$ $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5 & 3 & 1 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$ adalah

Apabila bilangan yang ada di dalam tablo Young meningkat pada setiap baris dan kolomnya maka tablo Young tersebut disebut tablo Young standar. Definisi tablo Young standar dapat dilihat pada Definisi 14 berikut.

Definisi 14 [2] *Tablo Young standar adalah tablo Young yang bilangan-bilangannya dalam urutan meningkat dengan masing-masing baris atau kolom dari kiri ke kanan dan atas ke bawah.*

Contoh 15 Salah satu tablo Young standar dari $\lambda = (4, 1)$ $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$ adalah

Tablo Young dengan entri yang *equivalent* disetiap barisnya merupakan suatu tabloid. Tabloid digambarkan dengan tablo Young tanpa palang vertikal di setiap barisnya.

Definisi 16 [4] *Dua tablo T_1 dan T_2 adalah equivalent baris $T_1 \sim T_2$ jika baris yang bersesuaian dari dua tablo tersebut memuat elemen yang sama. Tabloid dari bentuk λ atau λ-tabloid dinotasikan dengan $\{T\} = \{T_1 | T_1 \sim T\}$ dengan T adalah λ-tablo.*

Contoh 17 Jika $T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$ maka $\{T\} = \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{5} \\ \cline{1-1}\end{array}$

MODUL PERMUTASI (M^{λ})

Modul permutasi M^{λ} merupakan representasi *reducible* dari S_n. Adapun definisi dari modul permutasi dapat dilihat pada Definisi 18 berikut ini.

Definisi 18 [4] *Misalkan $\lambda \vdash n$. Diberikan M^{λ} yang dinotasikan sebagai ruang vektor yang memiliki basis berupa himpunan dari λ-tabloid. Ruang vektor M^{λ} merupakan representasi reducible dari S_n yang dikenal sebagai modul permutasi yang bersesuaian pada λ.*

Contoh 19 Untuk $n = 5$, modul permutasi $M^{(4,1)}$ memiliki elemen basis sebagai berikut

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{4} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{5} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Dari Definisi 18 dapat disimpulkan bahwa dimensi dari M^{λ} merupakan banyaknya tabloid dari $\lambda \vdash n$. Rumus untuk menghitung dimensi dari M^{λ} diberikan pada Proposisi 20 berikut ini.

Proposisi 20 [4] *Jika* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$,

$$\dim(M^{\lambda}) = \frac{n!}{\lambda_1! \, \lambda_2! \, \dots \, \lambda_l!}.$$

Untuk nilai karakter dari M^{λ} diperoleh dari jumlah tabloid yang entri pada setiap barisnya tidak berubah setelah dipermutasikan. Perhitungan karakter modul permutasi juga dapat menggunakan Proposisi 21 berikut.

Proposisi 21 [6] *Misalkan $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ adalah partisi dari n dan $g \in S_n$. Diberikan $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ tipe cycle dari g. Karakter χ dari representasi S_n pada M^{λ} dievaluasi pada suatu elemen dari S_n yang equivalent dengan koefisien dari $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_l^{\lambda_l}$ dalam*

$$\prod_{i=1}^{m} (x_1^{\mu_1} + x_2^{\mu_2} + \dots + x_l^{\mu_l}).$$

Contoh 22 Karakter dari $M^{(4,1)}$ pada permutasi (1 2) dengan tipe *cycle* (2, 1, 1, 1) sama dengan koefisien ${x_1}^4 x_2$ yang ada pada $({x_1}^2 + {x_2}^2)(x_1 + x_2)^3$ yaitu 3.
Dapat dilihat kembali pada Contoh 19, apabila dari kelima tabloid yang dihasilkan dipermutasikan dengan (1 2) maka tabloid yang entri pada setiap barisnya tidak berubah adalah sebagai berikut.

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{4} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{5} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Nilai karakter lainnya dapat dihitung dengan cara yang sama, untuk nilai karakter M^{λ} dengan $n = 5$ ditunjukkan pada tabel berikut.

Tipe *cycle*	(1,1,1,1,1)	(2,1,1,1)	(2,2,1)	(3,1,1)	(3,2)	(4,1)	(5)
$M^{(5)}$	1	1	1	1	1	1	1
$M^{(4,1)}$	5	3	1	2	0	1	0
$M^{(3,2)}$	10	4	2	1	1	0	0

$M^{(3,1,1)}$	20	6	0	2	0	0	0
$M^{(2,2,1)}$	30	6	2	0	0	0	0
$M^{(2,1,1,1)}$	60	6	0	0	0	0	0
$M^{(1,1,1,1,1)}$	120	0	0	0	0	0	0

MODUL SPECHT (S^{λ})

Untuk tablo T dari n, grup baris dari T yang dinotasikan dengan R_T memuat permutasi yang hanya memindahkan elemen yang berada pada masing-masing baris pada T. Sedangkan, grup kolom C_T memuat permutasi yang hanya memindahkan elemen yang berada pada masing-masing kolom pada T [6]. Pada Definisi 23 berikut ini dijelaskan mengenai definisi *polytabloid* yang dihitung berdasarkan grup kolom.

Definisi 23 [4] *Jika T adalah suatu tablo Young, maka polytabloid adalah $e_T = K_T\{T\}$ dengan $K_T = \sum_{\pi \in C_T} sgn\,(\pi)\pi$ sehingga*

$$e_T = \sum_{\pi \in C_T} sgn(\pi)\pi\{T\}.$$

Contoh 24 Jika $T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$ maka $e_T = \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{5} \\ \cline{1-1}\end{array} - \begin{array}{|ccc|}\hline 5 & 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array}$

Modul Specht merupakan submodul dari modul permutasi yang direntang oleh *polytabloid* e_T. Lebih jelasnya diberikan pada Definisi 25 berikut ini.

Definisi 25 [4] *Untuk setiap partisi λ, modul Specht yang dinotasikan dengan S^{λ} merupakan submodul dari M^{λ} yang direntang oleh polytabloid e_T, dengan T adalah seluruh tablo dari bentuk λ.*

Teorema 26 [4] *Himpunan $\{e_T : T\ adalah\ \lambda - tablo\ standar\}$ merupakan basis untuk S^{λ}.*

Contoh 27 Untuk $n = 5$, modul Specht $S^{(4,1)}$ memiliki elemen basis sebagai berikut

$$e_{T_1} = \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \cline{1-1}\end{array} - \begin{array}{|cccc|}\hline 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$e_{T_2} = \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{4} \\ \cline{1-1}\end{array} - \begin{array}{|cccc|}\hline 4 & 2 & 3 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$e_{T_3} = \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array} - \begin{array}{|cccc|}\hline 3 & 2 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$e_{T_4} = \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{5} \\ \cline{1-1}\end{array} - \begin{array}{|cccc|}\hline 5 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Untuk menghitung dimensi dari modul Specht yang merupakan banyaknya tablo Young standar dari $\lambda \vdash n$ pada Teorema 30. Terlebih dahulu diberikan definisi panjang *hook* pada Definisi 28 berikut.

Definisi 28 [6] *Suatu kotak pada diagram Young dinotasikan dengan $u \in \lambda$, hook pada u merupakan himpunan seluruh kotak yang lurus ke kanan dari u dan lurus ke bawah dari u, termasuk u itu sendiri. Jumlah kotak di dalam hook disebut panjang hook pada u dan dinotasikan dengan h_{ij} dengan baris i dan kolom j.*

Contoh 29 Misalkan $\lambda = (4,3,3,2,1)$. Panjang *hook* dari masing-masing kotak adalah sebagai berikut

8	6	4	1
6	4	2	
5	3	1	
3	1		
1			

Teorema 30 [6] *Diberikan $\lambda \vdash n$ suatu diagram Young, maka jumlah tablo standar (f^λ) dari λ adalah $n!$ dibagi panjang hook yang dihasilkan dari setiap kotak.*

$$\dim(S^\lambda) = f^\lambda = \frac{n!}{\prod h_{ij}}.$$

Untuk nilai karakter dari S^λ diperoleh dari jumlah *polytabloid* yang tidak berubah setelah dipermutasikan. Perhitungan karakter modul Specht juga dapat menggunakan Teorema 31 berikut.

Teorema 31 [4] *Misalkan $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ adalah partisi dari n dan $g \in S_n$. Diberikan $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ tipe cycle dari g. Karakter dari representasi S_n pada S^λ dievaluasi pada suatu elemen dari S_n yang equivalent dengan koefisien dari $x_1^{\lambda_1+l-1} x_2^{\lambda_2+l-2} \dots x_l^{\lambda_l}$ dalam*

$$\prod_{1 \le i < j \le l} (x_i - x_j) \prod_{i=1}^{m} (x_1^{\mu_1} + x_2^{\mu_2} + \dots + x_l^{\mu_l}).$$

Contoh 32 Karakter dari $S^{(4,1)}$ pada permutasi (1 2) dengan tipe cycle (2, 1, 1, 1) sama dengan koefisien $x_1{}^5 x_2$ yang ada pada $(x_1 - x_2)(x_1{}^2 + x_2{}^2)(x_1 + x_2)^3$ yaitu 2.

Dapat dilihat kembali pada Contoh 27, apabila dari keempat *polytabloid* yang dihasilkan dipermutasikan dengan (1 2) maka diperoleh *polytabloid* berikut

$$e_{T_1}(1\ 2) = \begin{array}{|cccc|}\hline 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array} - \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \cline{1-1}\end{array} = -e_{T_1}$$

$$e_{T_2}(1\ 2) = \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{4} \\ \cline{1-1}\end{array} - \begin{array}{|cccc|}\hline 4 & 2 & 3 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array} = e_{T_2}$$

$$e_{T_3}(1\ 2) = \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array} - \begin{array}{|cccc|}\hline 3 & 2 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array} = e_{T_3}$$

$$e_{T_4}(1\ 2) = \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{5} \\ \cline{1-1}\end{array} - \begin{array}{|cccc|}\hline 5 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array} = e_{T_4}$$

Dapat dilihat bahwa *polytabloid* yang memenuhi $e_T(1\ 2) = e_T$ sebanyak tiga *polytabloid* dan $e_T(1\ 2) = -e_T$ sebanyak satu *polytabloid* sehingga jumlah keseluruhan sebanyak dua *polytabloid*.
Nilai karakter lainnya dapat dihitung dengan cara yang sama, untuk nilai karakter S^λ dengan $n = 5$ ditunjukkan pada tabel berikut.

Tipe *cycle*	(1,1,1,1,1)	(2,1,1,1)	(2,2,1)	(3,1,1)	(3,2)	(4,1)	(5)
$S^{(5)}$	1	1	1	1	1	1	1
$S^{(4,1)}$	4	2	0	1	-1	0	-1
$S^{(3,2)}$	5	1	1	-1	1	-1	0

$S^{(3,1,1)}$	6	0	-2	0	0	0	1
$S^{(2,2,1)}$	5	-1	1	-1	-1	1	0
$S^{(2,1,1,1)}$	4	-2	0	1	1	0	-1
$S^{(1,1,1,1,1)}$	1	-1	1	1	-1	-1	1

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan, dapat disimpulkan bahwa seluruh nilai karakter grup permutasi dapat dihitung menggunakan tablo Young. Dimensi M^{λ} dihitung berdasarkan banyaknya jumlah tabloid yang terbentuk dari tablo Young dan merupakan karakter M^{λ} dari elemen identitas pada grup permutasi, sedangkan dimensi S^{λ} dihitung berdasarkan banyaknya jumlah *polytabloid* standar dari tablo Young standar dan merupakan karakter S^{λ} dari elemen identitas pada grup permutasi. Nilai karakter dari M^{λ} dihitung berdasarkan banyaknya jumlah tabloid yang tetap setelah dipermutasikan, sedangkan nilai karakter dari S^{λ} dihitung berdasarkan banyaknya jumlah *polytabloid* standar yang tetap setelah dipermutasikan. Nilai karakter dari *reducible* dari S_5 selalu kurang dari atau sama dengan karakter *irreducible*.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Etingof P, Golberg O, Hensel S, Liu T, Schwendner A, Vaintrob D, Yudovina E. *Introduction to Representation Theory*. Providence: American Mathematical Society; 2011.
[2]. Laster, R. *Complex Representation of S_n and Young Tableaux*. Santa Cruz: University of California; 2016.
[3]. James G, Liebeck M. *Representation and Characters of Groups*. 2nd ed. Cambridge University Press. New York; 2001.
[4]. Sagan BE. *The Symmetric Group: Representation, Combinatorical Algorithms, and Symmetric Function*. New York: Springer Verlag; 2001.
[5]. Bannai E, Ito T. *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes*. Cummings Publishing Company, Inc. California; 1984.
[6]. Fulton W. *Young Tableaux: With Application to Representation Theory and Geometry*. New York: Cambridge University Press; 1997.

MEGAWATI JUNE : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
megawatijune@gmail.com
HELMI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
helmi132205@yahoo.co.id
FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
frandly88@gmail.com