Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 06, No. 3(2017), hal 203 – 210.

EKSENTRISITAS DIGRAF PADA GRAF TANGGA

Andri Royani, Mariatul Kiftiah, Yudhi

INTISARI

Misalkan G adalah graf dengan himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Jarak dari simpul v ke simpul u adalah panjang lintasan dari simpul v ke u, dinotasikan $d(v,u)$. Jarak adalah jumlah sisi-sisi yang di lewati dari satu titik ke titik yang lain. Jarak pada graf berbobot yang dihitung adalah jumlah bobot pada setiap sisinya, sedangkan pada graf tak berbobot yang dihitung adalah banyaknya sisi yang dilalui. Eksentrisitas simpul v dalam graf G adalah jarak terjauh dari titik v ke setiap simpul di G, dinotasikan dengan $ec(v)$. Simpul u merupakan titik eksentrik dari v jika $d(v,u) = ec(v)$. Eksentrik digraf dari suatu graf G dinotasikan dengan $ED(G)$. Eksentrik digraf adalah graf yang mempunyai himpunan simpul yang sama dengan himpunan simpul di G, dan arc yang menghubungkan simpul v ke simpul u adalah eksentrisitas dari simpul v ke simpul u. Penelitian ini bertujuan menentukan eksentrisitas digraf pada graf tangga L_n. Diberikan graf tangga dengan n simpul, kemudian menentukan jarak dari setiap simpul v_i dan u_i ke semua simpul di G. Selanjutnya dicari titik eksentrik dari setiap simpul di G ke semua simpul di G. Didapat bahwa titik eksentrik dari simpul v_i adalah $u_j$dengan $i \neq j$ dengan jarak $(n-i)+1$, kemudian titik eksentrik dari u_i adalah $v_n$dengan jarak $(n-i)+1$. Setelah mendapat titik eksentrik dari setiap simpul maka selanjutnya mengkonstruksikan eksentrik digraf ke dalam graf berarah.

Kata Kunci: *komplemen graf, graf lintasan, jarak terjauh*

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang memiliki pokok bahasan yang banyak penerapannya pada masa kini. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh ahli matematika asal Swiss, Leonard Euler pada tahun 1736. Ide besarnya muncul sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan Königsberg. Dari permasalahan itu, akhirnya Euler mengembangkan beberapa konsep mengenai teori graf [1].

Graf G merupakan suatu pasangan himpunan (V,E) dimana V (*vertex*) tidak kosong dan E (*edge*) mungkin kosong. Himpunan sisi (*edge*) merupakan pasangan tak terurut dari elemen V. Elemen V disebut sebagai simpul dari G dan elemen E disebut *edge* atau sisi dari G. Simpul biasanya digambarkan dengan titik-titik pada bidang, dan sisi digambarkan dengan garis yang menghubungkan dua simpul pada bidang. Garis dapat berupa garis lurus atau kurva [1].

Beberapa jenis graf memiliki ciri-ciri khusus, diantaranya graf lintasan (P_n) dan graf tangga (L_n). Graf lintasan adalah suatu graf dimana setiap dua simpul yang berbeda dihubungkan oleh tepat satu sisi. Graf lintasan adalah graf dengan $n+1$ simpul yaitu simpulnya $v_0, v_1, \dots, v_n$ dengan n sisi $v_0v_1, v_1v_2, \dots v_{n-1}v_n$. Simpul $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ berderajat dua kecuali untuk simpul awal dan simpul akhir berderajat satu [2]. Graf tangga adalah graf sederhana tak berarah dengan simpul $2n$. Graf tangga L_n didefinisikan sebagai hasil kali kartesian dari P_2 dan P_n [3].

Penelitian mengenai teori graf terus mengalami perkembangan. Salah satu pembahasan yang terus berkembang pada teori graf adalah eksentrisitas digraf dari suatu graf. Secara umum eksentrisitas pada suatu graf dapat diartikan sebagai jarak terjauh dari setiap titik yang berada didalam G ke setiap titik lain yang berada di G, dapat dituliskan $ec(v) = \max\{d(v,u|\forall u \in V(G))\}$. Sedangkan simpul v merupakan simpul eksentrik dari simpul u jika $d(u,v) = ec\,(u)$. Eksentrik digraf dari graf G (ED(G)) adalah graf yang mempunyai himpunan simpul yang sama dengan G, $V(ED(G) = V(G)$ dan terdapat *arc* (sisi berarah) yang menghubungkan setiap simpul dalam G ke simpul eksentriknya. Suatu *arc* didalam digraf D dikatakan *arc* simetri jika *arc* tersebut menghubungkan simpul u dan simpul v, demikian juga sebaliknya [4].

Penggunaan eksentrisitas diberbagai bidang telah dipelajari oleh banyak peneliti. Bidang tersebut antara lain menentukan batas jaringan struktur protein, jaringan *Asynchronus Transfer Mode* (ATM), dan jaringan radio. Sedangkan penelitian eksentrik digraf dari beberapa kelas graf telah banyak dipublikasikan oleh beberapa peneliti. Dalam penelitian ini diselidiki eksentrik digraf pada kelas graf yang lain yaitu graf tangga.

Tujuan penelitian yang dilakukan adalah untuk mengetahui cara mengkonstruksikan eksentrik digraf dan bentuk eksentrik digraf dari graf tangga. Batasan masalah dalam penelitian ini adalah hanya untuk graf sederhana dan graf berhingga.

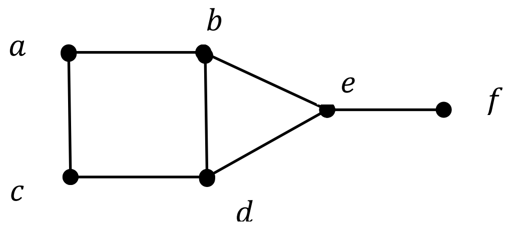
Untuk menentukan eksentrisitas digraf pada graf tangga diperlukan tiga langkah, yaitu langkah pertama adalah menentukan jarak dari setiap simpul ke simpul yang lain dalam graf G yang merupakan panjang lintasan terpendek dari simpul u ke simpul v atau sebaliknya. Langkah kedua menentukan simpul eksentrik dari setiap simpul, dinotasikan dengan $ec(u_i)$ dan $ec(v_i)$, yaitu simpul dalam graf G yang memiliki jarak terjauh dari u_i dan v_i. Simpul v adalah suatu simpul eksentrik dari u jika $d(u,v) = ec(u)$. Langkah ketiga, menghubungkan setiap simpul yang berada pada G dengan simpul eksentriknya dengan suatu $arc\ d$ diperoleh eksentrik digraf dari graf yang diberikan [5].

EKSENTRISITAS DIGRAF

Eksentrisitas digraf pertama kali diperkenalkan oleh Fred Buckley pada tahun 90-an. Eksentrisitas digraf $ED(G)$ didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di G atau $V(Ed(G)) = V(G)$, dimana *arc* menghubungkan simpul u ke v jika v adalah titik eksentrik dari u, titik eksentrik merupakan titik terjauh dari suatu simpul, sedangkan eksentrisitas merupakan jarak antara suatu simpul dengan simpul yang lainnya.

Buckley menyimpulkan bahwa hampir setiap graf G, eksentrik digrafnya adalah $ED(G) = (G)^*$, dimana $(G)^*$ adalah komplemen dari G yang setiap sisinya diganti dengan arc simetrik. Eksentrisitas digraf atau dapat dinotasikan $ec(v)$ pada titik v dalam graf G adalah jarak terjauh dari titik v ke setiap simpul lain di G, dapat dituliskan: $ec(v) = \max\{d(v,u) | \forall u \in V(G)\}$ [6].

Diberikan sebuah graf G, carilah titik eksentrik dari setiap simpul, radius dari graf G, eksentrisitas digraf dan center dari graf G.



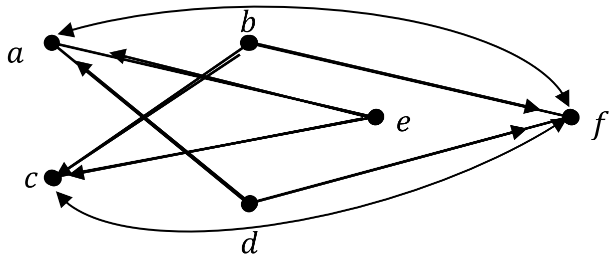
Gambar 1 Graf G dengan 6 titik dan 7 sisi

Berdasarkan Gambar 1 graf G diperoleh tabel 1 sebagai berikut:

Tabel 1 Eksentrisitas dari graf G

Simpul	Eksentrisitas	Titik eksentrik
a	$ec(a) = 3$	f
b	$ec(b) = 2$	c, f
c	$ec(c) = 3$	f
d	$ec(d) = 2$	a, f
e	$ec(e) = 2$	a, c
f	$ec(f) = 3$	a, c

Setelah didapat eksentrisitas dan titik eksentrik digraf dari graf G, selanjutnya akan dikonstruksikan eksentrik digraf dari graf G.



Gambar 2 Eksentrik digraf dari graf G

GRAF TANGGA

Graf tangga L_n adalah adalah graf sederhana tak berarah dengan banyak simpul $2n$ dan banyaknya sisi adalah $3n-2$. Graf tangga L_n adalah graf yang dibentuk dari hasil kali Kartesian dari graf lintasan P_n dan graf lintasan P_2 atau yang dapat dinotasikan $L_n = P_n \times P_2$. Himpunan simpul-simpul (*verteks*) yang terdiri dari himpunan simpul $\{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dan himpunan sisi (*edge*) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ [3].

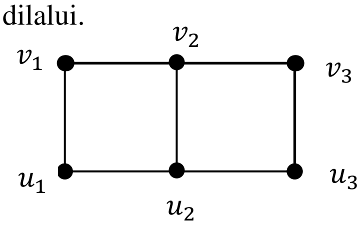
EKSENTRISITAS DIGRAF PADA GRAF TANGGA

Graf tangga L_n adalah graf yang dibentuk dari graf lintasan P_n dan graf lintasan P_2 atau yang dapat dinotasikan $L_n = P_n \times P_2$. Himpunan simpul-simpul (*verteks*) yang terdiri dari himpunan simpul $\{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dan himpunan sisi (*edge*) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ [2].

Diperlukan tiga langkah dalam menentukan eksentrisitas digraf dari graf tangga dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan jarak setiap simpul $u_i, i = 1,2,3, \dots, n$ dan $v_j, j = 1,2,3, \dots, n$ dengan i dan j adalah bilangan bulat positif ke semua simpul dalam graf G, dinotasikan dengan $d(u_i, v_j)$ yaitu lintasan terpendek dari simpul u ke semua simpul yang berada pada graf G dan menentukan lintasan terpendek dari simpul v ke semua simpul.

   Sebagai ilustrasi, akan diberikan sebuah graf kemudian akan ditentukan jarak setiap simpul dan juga lintasan-lintasan yang dapat dilalui.



Gambar 3 graf tangga L_3

Dari Gambar 3 didapat penyelesaiannya sebagai berikut:

Tabel 2 Eksentrisitas dari graf tangga L_3

Simpul	Eksentrisitas	Titik eksentrik
v_1	3	u_3
v_2	2	u_1, u_3
v_3	3	u_1
u_1	3	v_3
u_2	2	v_1, v_3
u_3	3	v_1

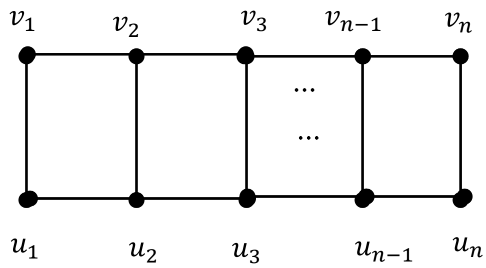
Akan dicari beberapa lintasan dari setiap simpul ke simpul yang lain sebagai berikut;

a. Untuk lintasan pada simpul v_1 ke simpul u_3 adalah
   Lintasan pertama melalui lintasan v_1, v_2, v_3, u_3.
   Lintasan kedua melalui lintasan $v_1, u_1, u_2, v_2, v_3, u_3$.
   Lintasan pertama merupakan lintasan terpendek dengan jaraknya 3, sedangkan lintasan kedua merupakan lintasan terpanjang dengan jarak 5.
b. Untuk lintasan pada simpul v_2 ke simpul u_1 dan u_3 adalah
   Lintasan pertama melalui lintasan v_2, v_1, u_1.
   Lintasan kedua melalui lintasan v_2, v_3, u_3.
   Lintasan ketiga melalui lintasan v_2, v_3, u_3, u_2, u_1.
   Lintasan ke empat melalui lintasan v_2, v_1, u_1, u_2, u_3.
   Lintasan pertama dan kedua merupakan lintasan terpendek denan jarak 2, sedangkan lintasan ketiga dan keempat merupakan lintasan terpanjang dengan jarak 4.
c. Untuk lintasan pada simpul v_3 ke simpul u_1 adalah
   Lintasan pertama melalui lintasan v_3, v_2, v_1, u_1..
   Lintasan kedua melalui lintasan $v_3, u_3, u_2, v_2, v_1, u_1$.
   Lintasan pertama merupakan lintasan terpendek dengan jaraknya 3, sedangkan lintasan kedua merupakan lintasan terpanjang dengan jarak 5.

Untuk menentukan lintasan pada u_i dapat mengikuti langkah2 seperti diatas.

2. Menentukan simpul eksentrik dari simpul u_i, dinotasikan dengan $ec(u_i)$, dan menentukan simpul eksentrik dari simpul v_j yaitu simpul dalam graf G yang memiliki jarak terjauh dari u_i dan v_j. Simpul v_j adalah suatu simpul eksentrik dari u_i jika $d(u_i, v_j) = e(u_i)$ atau sebaliknya.
3. Membangun digraf $ED(G)$ dengan himpunan titik $V(ED(G)) = V(G)$ dan himpunan sisi $E(ED(G)) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ v_j adalah titik eksentrik dari u_i atau sebaliknya.

Misalkan bahwa graf tangga L_n mempunyai himpunan simpul $V(L_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ dan himpunan sisi $E(L_n) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$.



Gambar 4 Graf tangga L_n dengan n simpul

1. Menentukan jarak dari setiap simpul u_i dan v_j ke semua simpul dalam G.
   Akan diambil beberapa simpul sebagai contoh menentukan jarak dari suatu simpul ke simpul yang lain.

i. Dari simpul v_1 menuju simpul u_1 adalah 1.
ii. Dari simpul v_1 menuju simpul v_2 adalah 1.
iii. Dari simpul v_1 menuju simpul u_2 adalah 2.
iv. Dari simpul v_1 menuju simpul v_3 adalah 2.
v. Dari simpul v_1 menuju simpul u_3 adalah 3.
vi. Dari simpul v_1 menuju simpul v_4 adalah 3.
vii. Dari simpul u_1 menuju simpul v_1 adalah 1.
viii. simpul u_1 menuju simpul u_2 adalah 1
ix. Dari simpul u_1 menuju simpul v_2 adalah 2.

x. Dari simpul u_1 menuju simpul u_3 adalah 2
xi. Dari simpul u_1 menuju simpul v_3 adalah 3.

Kemudian dari cara yang sama dengan diatas maka dapat disimpulkan bahwa:

i. Dari simpul v_i menuju simpul v_j adalah $|i-j|$.
ii. Dari simpul v_i menuju simpul u_j adalah $|i-j|+1$.
iii. Dari simpul u_i menuju simpul v_j adalah$|i-j|+1$.
iv. Dari simpul u_i menuju simpul u_j adalah $|i-j|$.

2. Menentukan titik eksentrik
   i. Graf tangga L_n untuk $n=1$

$$ec(v_1)=u_1=1$$
$$ec(u_1)=v_1=1$$

Sehingga eksentrisitas dari simpul v_1 adalah 1 dan u_1 adalah 1. Titik eksentrik dari simpul v_1 adalah u_1 dan titik eksenstrik dari u_1 adalah v_1.

ii. Graf tangga L_n, untuk $n=2$.

$$ec(v_1)=u_2=2$$
$$ec(v_2)=u_1=2$$
$$ec(u_1)=v_2=2$$
$$ec(u_2)=v_1=2$$

Sehingga eksentrisitas dari simpul v_i adalah 2 dan u_i adalah 2. Titik eksentrik dari simpul v_1 adalah u_2, titik eksentrik dari simpul v_2 adalah u_1, titik eksentrik dari simpul u_1 adalah v_2 dan titik eksentrik dari simpul u_2 adalah v_1.

iii. Graf tangga L_n, untuk $n=3$.

$$ec(v_1)=u_3=3$$
$$ec(u_1)=v_3=3$$
$$ec(v_2)=u_1 \text{ dan } u_3=2$$
$$ec(u_2)=v_1 \text{ dan } v_3=2$$
$$ec(v_3)=u_1=3$$
$$ec(u_3)=v_1=3$$

Untuk menentukan graf tangga L_n dengan $n>3$, kita dapat menggunakan rumus umum sebagai berikut:

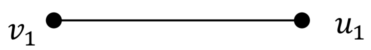
i. Untuk menentukan eksentrisitas semua simpul pada graf tangga L_n, dengan n ganjil dapat menggunakan rumus secara umum yaitu:
   a. untuk $v_i, i=\frac{n+1}{2}$ dan $u_i, i=\frac{n+1}{2}$, maka eksentrisitas nya adalah $\frac{n+1}{2}$ dan titik eksentrik dari u_i adalah v_1 dan v_n, sedangkan titik eksentrik dari v_i adalah u_1 dan u_n.
   b. Untuk v_i, $i<\frac{n+1}{2}$ dan $u_i, i<\frac{n+1}{2}$, maka eksentrisitas nya $(n-i)+1$ dan titik eksentrik dari u_i adalah v_n, sedangkan titik eksentrik dari v_i adalah u_n.
   c. Untuk v_i, $i>\frac{n+1}{2}$ dan $u_i, i>\frac{n+1}{2}$, maka eksentrisitas nya i dan titik eksentrik dari u_i adalah v_1, sedangkan titik eksentrik dari v_i adalah u_1.

ii. Untuk menentukan eksentrisitas semua simpul pada graf tangga L_n, dengan n genap dapat menggunakan rumus secara umum yaitu:
   a. Untuk v_i, $i\leq\frac{n}{2}$ dan $u_i, i\leq\frac{n}{2}$, maka eksentrisitas nya $(n-i)+1$ dan titik eksentrik dari u_i adalah v_n, sedangkan titik eksentrik dari v_i adalah u_n.

b. Untuk v_i, $i > \frac{n}{2}$ dan $u_i, i > \frac{n}{2}$ maka eksentrisitas nya $(n-i)+1$ dan titik eksentrik dari u_i adalah v_1, sedangkan titik eksentrik dari v_i adalah u_1.

3. Membangun eksentrik digraf atau dinotasikan $ED(G)$ dengan himpunan titik $V(ED(G)) = V(G)$ dan himpunan sisi $E(ED(G)) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ dimana $e_k = (v_i v_j)$, i=1,2,...,n, k =1,2,...,m dan v_j adalah titik eksentrik dari u_i atau sebaliknya.

a. Untuk L_1 akan dikonstruksikan bentuk grafnya sebagai berikut:



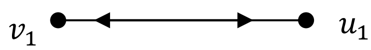
Gambar 5 Graf tangga L_1

Dari Gambar 5 didapat penyelesaiannya sebagai berikut:

Tabel 3 Eksentrisitas dari graf tangga $L_n, n = 1$.

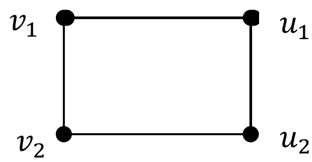
Simpul	Eksentrisitas	Titik eksentrik
v_1	1	u_1
u_1	1	v_1

Dari Tabel 3 diperoleh hasil:



Gambar 6 Eksentrik digraf L_1

b. Untuk L_2 akan dikonstruksikan bentuk grafnya sebagai berikut:



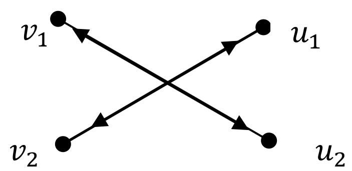
Gambar 7 Graf tangga L_2

Dari Gambar 7 didapat penyelesaiannya sebagai berikut:

Tabel 4 Eksentrisitas dari graf tangga L_2

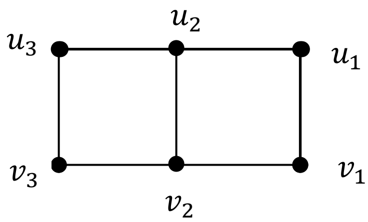
Simpul	Eksentrisitas	Titik eksentrisitas
v_1	2	u_2
v_2	2	u_1
u_1	2	v_2
u_2	2	v_1

Dari Tabel 4 diperoleh hasil:



Gambar **8** Eksentrik digraf L_2

c. Untuk L_3 akan dikonstruksikan bentuk grafnya sebagai berikut:



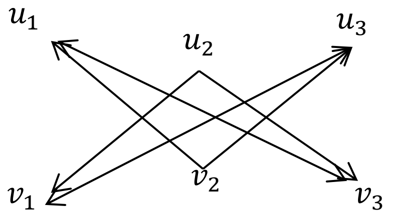
Gambar 9 Graf tangga L_3

Dari Gambar 9 didapat penyelesaiannya sebagai berikut:

Tabel 5 Eksentrisitas dari graf tangga L_3

Simpul	Eksentrisitas	Titik eksentrik
v_1	3	u_3
v_2	2	u_1, u_3
v_3	3	u_1
u_1	3	v_3
u_2	2	v_1, v_3
u_3	3	v_1

Dari Tabel 5 diperoleh hasil:



Gambar 10 Eksentrik digraf dari L_3

PENUTUP

Berdasakan penelitian yang telah dilakukan disimpulkan bahwa dalam menentukan jarak terjauh dari suatu simpul v_i ke semua simpul didalam G adalah sebagai berikut:

1. Menentukan jarak setiap simpul $u_i, i = 1,2,3, \ldots, n$dan $v_j, j = 1,2,3, \ldots, n$ dengan $i \neq j$ ke semua simpul dalam graf G, dinotasikan dengan $d(u_i, v_j)$ yaitu lintasan terpendek dari simpul u_i ke simpul v_j, atau sebaliknya dari simpul v_j ke simpul u_i.
2. Menentukan simpul eksentrik dari simpul u_i, dinotasikan dengan $ec(u_i)$, dan simpul eksentrik dari simpul v_j atau dapat dinotasikan $ec(v_j)$ yaitu simpul dalam graf G yang memiliki jarak terjauh dari u_i dan v_j. Simpul v_j adalah suatu simpul eksentrik dari u_i jika $d(u_i, v_j) = ec(u_i)$ dan sebaliknya.
3. Membangun digraf $ED(G)$ dengan himpunan titik $V(ED(G)) = V(G)$ dan himpunan sisi $E(ED(G)) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ dan v_j atau u_i adalah titik eksentrik dari v_j atau u_i.

Untuk menentukan eksentrisitas dan titik eksentrik dari graf tangga L_n,dapat menggunakan beberapa rumus umum seperti berikut:

Untuk n ganjil dapat menggunakan rumus secara umum yaitu:

a. Untuk v_i, $i = \frac{n+1}{2}$ dan $u_i, i = \frac{n+1}{2}$, maka eksentrisitas nya $\frac{n+1}{2}$ dan titik eksentrik dari u_i adalah v_1 dan v_n, sedangkan titik eksentrik dari v_i adalah u_1 dan u_n.
b. Untuk v_i, $i < \frac{n+1}{2}$ dan $u_i, i < \frac{n+1}{2}$, maka eksentrisitas nya $(n - i) + 1$ dan titik eksentrik dari u_i adalah v_n, sedangkan titik eksentrik dari v_i adalah u_n.

c. Untuk v_i, $i > \frac{n+1}{2}$ dan $u_i, i > \frac{n+1}{2}$, maka eksentrisitas nya i dan titik eksentrik dari u_i adalah v_1, sedangkan titik eksentrik dari v_i adalah u_1.

Untuk n genap dapat menggunakan rumus secara umum yaitu:

a. Untuk $v_i, i \leq \frac{n}{2}$ dan $u_i, i \leq \frac{n}{2}$, maka eksentrisitas nya $(n - i) + 1$ dan titik eksentrik dari u_i adalah v_n, sedangkan titik eksentrik dari v_i adalah u_n.
b. Untuk $v_i, i > \frac{n}{2}$ dan $u_i, i > \frac{n}{2}$, maka eksentrisitas nya $(n - i) + 1$ dan titik eksentrik dari u_i adalah v_1, sedangkan titik eksentrik dari v_i adalah u_1.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Munir R. *Matematika Diskrit*. ed ke 3. Bandung: Informatika; 2010.

[2] Rosen KH. *Discrete Mathematics and Its Applications*. Ed ke-6. Toronto: Mcgraw-Hill; 2007.

[3] Weisstein EW. *Ladder Graph* [internet]. 2005. Diakses pada 20 maret 2017. Available from: mathworld.wolfram.com/LadderGraph.html.

[4] Huilgol MI, Ulla SA, Sunilchandra AR. On Eccentric Digraphs Of Graphs. *Applied Mathematics*. 2011; 2(6): 705-710.

[5] Kuntari S, Sudibyo NA, Kusmayadi TA. *Digraf eksentrik dari graf buku*. Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Dan Penerapan MIPA. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta; 2011.

[6] Buckley F. The Eccentric Digraph Of Graph. *Congressus Numerantium*. 2001; Vol. 149: 579-583.

ANDRI ROYANI : FMIPA Universitas Tanjungpura, Pontianak, andrytheace@gmail.com
MARIATUL KIFTIAH : FMIPA Universitas Tanjungpura, Pontianak, kiftiah_mariatul@ymail.com
YUDHI : FMIPA Universitas Tanjungpura, Pontianak, dhye_dhooank@yahoo.co.uk