Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 6, No. 02 (2017), hal 95– 102.

MATRIKS BENTUK KANONIK RASIONAL DENGAN MENGGUNAKAN PEMBAGI ELEMENTER

Ardiansyah, Helmi, Fransiskus Fran

INTISARI

Pada suatu matriks persegi apabila polinomial karakteristiknya tidak dapat difaktorkan menjadi polinomial-polinomial yang linear, maka matriks tersebut tidak dapat dibentuk kedalam bentuk kanonik Jordan. Pada kasus ini, matriks asalnya dapat dibentuk kedalam bentuk kanonik rasional, karena untuk menentukan bentuk kanonik rasional polinomial katakteristiknya tidak harus dapat difaktorkan menjadi polinomial-polinomial yang linear. Oleh karena itu pada artikel ini dikaji pembentukan bentuk kanonik rasional dari suatu matriks persegi dengan menggunakan pembagi elementer. Bentuk kanonik rasional diperoleh dengan mencari polinomial karakteristik, polinomial minimum dan pembagi elementer, kemudian dari masing-masing pembagi elementer dibentuk matriks pendamping. Selanjutnya dengan melakukan jumlah langsung matriks-matriks pendamping maka diperoleh bentuk kanonik rasional.

Kata kunci: *Polinomial Karakteristik, Polinomial Minimum, Matriks Pendamping*

PENDAHULUAN

Suatu matriks persegi berukuran $n \times n$ dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks non singular P sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ merupakan suatu matriks diagonal [1]. Namun, tidak semua matriks persegi dapat didiagonalisasi khususnya jika multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri tidak sama. Pada kasus tersebut, dapat ditentukan bentuk matriks yang hampir serupa dengan matriks diagonal yaitu bentuk kanonik Jordan. Bentuk kanonik Jordan dinotasikan dengan J yang memenuhi $Q^{-1}AQ = J$ dengan Q merupakan matriks non singular.

Apabila pada suatu matriks, polinomial karakteristiknya tidak dapat difaktorkan menjadi polinomial-polinomial linear (lapangannnya tertutup secara aljabar), maka pada kasus seperti ini tidak dapat ditentukan bentuk kanonik Jordan. Oleh karena itu, pada tulisan ini akan diperkenalkan bentuk kanonik lain dari suatu matriks yang disebut dengan bentuk kanonik rasional. Untuk memperoleh bentuk kanonik rasional dari suatu matriks, maka polinomial karakteristiknya tidak harus dapat difaktorkan menjadi polinomial-polinomial yang linear (lapangannya tidak harus tertutup secara aljabar). Berdasarkan konep tersebut diperoleh bahwa bentuk kanonik Jordan merupakan kasus khusus dari bentuk kanonik rasional.

Proses pembentukan suatu matriks menjadi bentuk kanonik rasional dapat dilakukan dengan menggunakan pembagi elementer dan faktor invarian. Pembagi elemeter merupakan faktor-faktor polinomial prima yang berbeda dari polinomial minimum (dengan pengulang jika perlu). Pembagi elementer memiliki keunggulan dari faktor invarian yaitu ada bentuk faktor pada suatu polinomial membentuk matriks pendamping yang berupa blok Jordan.

POLINOMIAL KARAKTERISTIK

Jika A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$, maka $det(\lambda I - A) = 0$ disebut persamaan karakteristik dari A dengan skalar-skalar λ yang memenuhi adalah nilai eigen dari A. Determinan dari $(\lambda I - A)$ adalah suatu polinomial dalam variabel λ yang disebut polinomial karakteristik dari matriks A [1], dinotasikan dengan $\Delta(\lambda)$.

Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka polinomial karakteristik A memiliki koefisien λ^n adalah 1. Jadi polinomial karakteristik dari matriks berukuran $n \times n$ memiliki bentuk berikut [2]

$$\Delta(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots a_1\lambda + a_0.$$

Teorema 1 [2] Setiap matriks A adalah akar dari polinomial karakteristik $\Delta(\lambda)$.

Berdasarkan Teorema 1 diperoleh bahwa matriks A adalah akar dari polinomial karakteristik $\Delta(\lambda)$ yaitu:

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = 0.$$

Mialkan $\Delta(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I$ sehingga berdasarkan dari Teorema 1 dapat disimpulkan bahwa $\Delta(A) = 0$.

Contoh 2 Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, polinomial karakteristik dari A yaitu:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5) - 12 = \lambda^2 - 6\lambda - 7$$

akibatnya diperoleh

$$\begin{aligned} \Delta(A) &= A^2 - 6A - 7I \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^2 - 6\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 24 & 37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -18 \\ -24 & -30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

POLINOMIAL MINIMUM

Misalkan $\mathbb{F}$ menyatakan suatu field, V ruang vektor berdimensi hingga atas $\mathbb{F}$, dan $L(V, V)$ adalah himpunan semua transformasi linear dari V ke V.

Definisi 3 [3] Misalkan $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{F}[x]$ polinomial dengan koefisien di $\mathbb{F}$ dan $T \in L(V, V)$ maka $f(T)$ menyatakan transformasi linear

$$f(T) = a_0I + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n.$$

Dengan cara yang sama dapat didefinisikan $f(A)$, jika A adalah matriks persegi.

Teorema 4 [3] Misalkan $T \in L(V, V)$ maka $I, T, T^2, \cdots, T^n$ tidak bebas linear di $L(V, V)$. Dengan demikian ada satu dan hanya satu bilangan asli $r \leq n^2$ sehingga

$I, T, T^2, \cdots, T^{r-1}$ bebas linear

$I, T, T^2, \cdots, T^{r-1}, T^r$ tidak bebas linear

sehingga mengakibatkan

$$T^r = a_0I + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_rT^r$$

dengan $r \in \mathbb{F}$.

Selanjutnya, jika

$$m(x) = x^r - a_{n-1}x^{r-1} - \cdots - a_0,$$

maka $m(x)$ mempunyai sifat *:*

(i) Jika $m(x) \neq 0$ di $\mathbb{F}[x]$ maka $m(T) = 0$

(ii) Jika $f(x) = 0$ sebarang polinomial dengan sifat $f(T) = 0$ maka $f(x)$ habis dibagi oleh $m(x)$.

Definisi 5 [3] Misalkan $T \in L(V, V)$. Polinomial $m(x) \in \mathbb{F}[x]$ yang didefinisikan dalam Teorema 4 disebut polinomial minimum dari T.

Contoh 6 Menentukan polinomial minimum dari bentuk matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian:
Polinomial karakteristik dari matriks A adalah

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= |xI - A| \\ &= \left| \left(x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \right| \\ &= \begin{vmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ -2 & -1 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x+1)(x+1)(x+1). \end{aligned}$$

Polinomial minimum dari $\Delta(x)$ adalah salah satu dari faktor-faktor berikut:

$$f_1(x) = (x+1),\ f_2(x) = (x+1)^2,\ f_3(x) = (x+1)^3$$

yang memenuhi $f_i(A) = 0$, dengan $i = 1,2,3,\cdots$. Selanjutnya dengan melakukan perhitungan diperoleh bahwa $f_1(A) \neq 0$, $f_2(A) \neq 0$ dan $f_3(A) = 0$, oleh karena itu polinomial minimum dari matriks A adalah $m(x) = (x+1)^3$.

PEMBAGI ELEMENTER DAN BENTUK KANONIK RASIONAL

Bentuk kanonik rasional diperoleh dengan menggunakan polinomial minimum, pembagi elementer dan matriks pendamping. Telah dijelaskan pengertian polinomial minimum, selanjutnya akan dijelaskan mengenai pembagi elementer, matriks pendamping dan bentuk kanonik rasional. Kemudian akan dijelaskan pula beberapa sifat dari bentuk kanonik rasional yaitu sifat yang berkaitan dengan pembagi elementer.

Definisi 7 [3] Misalkan $\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq 0$ dan misalkan V_1 menyatakan subruang dari V yang terdiri dari semua vektor

$$\{f(T)\mathbf{v} | f \in \mathbb{F}[x]\}$$

maka V_1 adalah subruang siklik yang dibangun oleh $\mathbf{v}$ yang kemudian dinotasikan sebagai $\langle \mathbf{v} \rangle$.

Lemma 8 [3] Misalkan $\mathbf{v} \in V_1$, $\mathbf{v} \neq 0$, maka ada polinomial tak nol di $\mathbb{F}[x]$ dengan koefisien utamanya 1, yaitu

$$m_{\mathbf{v}}(x) = x^d - \alpha_{d-1}x^{d-1} - \cdots - \alpha_0\ ;\ \alpha_i \in \mathbb{F}$$

Sehingga $m_{\mathbf{v}}(T)(\mathbf{v}) = 0$ dan untuk setiap polinomial $f \in \mathbb{F}[x]$, dan $f(T)(\mathbf{v}) = 0$, maka $m_{\mathbf{v}}(x)$ membagi $f(x)$.

Polinomial $m_{\mathbf{v}}(x)$ dengan koefisien utamanya sama dengan satu disebut order dari vektor $\mathbf{v}$, dan merupakan satu-satunya polinomial $q(x)$ dengan derajat terkecil sama dengan satu yang memenuhi $q(T)(\mathbf{v}) = 0$.

Teorema 9 [3] Misalkan $T \in L(V, V)$, dengan V merupakan ruang vektor berdimensi hingga atas suatu lapangan $\mathbb{F}$ dan $V \neq 0$. Pada vektor V terdapat kumpulan vektor tak nol $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_r}\}$ di V dengan ordernya masing-masing

$$\{p_1(x)^{e_1}, p_2(x)^{e_2}, \cdots, p_r(x)^{e_r}\}$$

dengan $p_i(x)^{e_i}$ merupakan polinomial prima monik di $\mathbb{F}[x]$ dan demikian juga bahwa V merupakan jumlah langsung dari subruang siklik $\{\langle \mathbf{v_i} \rangle, 1 \leq i \leq r\}$, yaitu

$$V = \langle \mathbf{v_1} \rangle \oplus \langle \mathbf{v_2} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{v_r} \rangle$$

bilangan r dapat ditentukan secara tunggal dan order $\{p_i(x)^{e_1}, 1 \leq i \leq r\}$ dari vektor $\{\mathbf{v_i}\}$ dapat ditentukan secara tunggal kecuali urutannya

Definisi 10 [3] Misalkan $T \in L(V, V)$ seperti pada Teorema 9, himpunan polinomial $\{p_1(x)^{e_1}, \cdots, p_r(x)^{e_r}\}$ disebut pembagi elementer dari T.

Masing- masing polinomial $p_i(x)^{e_i}$ dapat dibentuk kedalam sebuah matriks yang disebut matriks pendamping. Matriks pendamping di notasikan dengan $C(p(x))$ yang berarti matriks pendamping dari polinomial $p(x)$.

Definisi 11 [4] Jika $p(x) = x + a_0$, maka matriks pendamping $C(p(x))$ merupakan matriks berukuran 1×1 yaitu $[-a_0]$. Jika $p(x) = x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, dengan $s \geq 2$. Maka matriks pendamping $C(p(x))$ adalah matriks berukuran $s \times s$ yaitu:

$$C(p(x)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_3 \\ \dots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{s-1} \end{bmatrix}.$$

Contoh 12 Misalkan polinomial $p(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$.
Berdasarkan Definisi 11 maka matriks pendamping dari polinomial $p(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ adalah

$$C(p(x)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Teorema 13 [3] Misalkan $p(x) = x^d - \alpha_{d-1}x^{d-1} - \cdots - \alpha_0, \alpha_i \in \mathbb{F}$ dan misalkan $\langle \mathbf{v} \rangle$ merupakan subruang siklik sehingga order dari $\mathbf{v}$ yaitu $p(x)^e$ untuk suatu bilangan bulat positif e, sehinga matriks $T_{\langle \mathbf{v} \rangle}$ yang mengenai terhadap basis

$$\{\, p(T)^{e-1}(\mathbf{v}), T\big(P(T)^{e-1}(\mathbf{v})\big), \cdots, T^{d-1}\big(P(T)^{e-1}(\mathbf{v})\big),$$
$$p(T)^{e-2}(\mathbf{v}), T\big(P(T)^{e-2}(\mathbf{v})\big), \cdots, T^{d-2}\big(P(T)^{e-2}(\mathbf{v})\big), \cdots, \mathbf{v}, T(\mathbf{v}), \cdots, T^{d-1}(\mathbf{v})\}$$

adalah matriks yang terdiri dari $e \times e$ matriks blok

$$\begin{bmatrix} A & B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & B & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & B \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A \end{bmatrix}$$

dengan A adalah matriks pendamping dari $p(x)$ dan B adalah matriks berukuran $d \times d$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Contoh 14 Menentukan matriks pendamping dari polinomial $p(x) = (x^3 - 2x^2 + x + 3)^2$ atas $\mathbb{Q}$
Penyelesaian:
Pada Contoh 3 polinomial $p(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ bentuk matriks pendamping yaitu:

$$C(p(x)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena dalam Teorema 13 mengatakan bahwa A adalah matriks pendamping dari $p(x)$ dan B adalah matriks berukuran $d \times d$ jadi matriks pendamping dari polinomial order $(p(x)^e)$ adalah matriks yang terdiri dari $e \times e$ matriks blok sehingga dapat dibentuk bentuk matriks pendamping dari polinomial $p(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ yang sesuai dengan Teorema 12 yaitu:

$$C(p(x)) = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definisi 15 [3] Matriks blok Jordan merupakan bentuk matriks pendamping dari sebuah transformasi linear dalam kasus semua akar-akar karakteristik berada dalam suatu lapangan $\mathbb{F}$. Dalam hal ini untuk semua pembagi elementer yang memiliki bentuk $(x - \alpha_i)^e$, untuk $\alpha_i \in \mathbb{F}$, dan matriks pendampingnya adalah matriks berukuran $e \times e$ yaitu

$$\begin{bmatrix} \alpha_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_i \end{bmatrix}$$

Contoh 16 Berdasarkan Contoh 5 diperoleh polinomial minimum dari matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ adalah $m(x) = (x + 1)^3$. Karena pada polinomial minimum $m(x)$ terdapat hanya satu bentuk polinomial yang berbentuk $p(x)^e$ sehingga pembagi elementernya adalah $(x + 1)^3$. Kemudian dari pembagi elementer $(x + 1)^3$ diperoleh matriks pendamping yang merupakan bentuk blok Jordan yaitu

$$C(p(x)) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Berikut ini akan diberikan Definisi 17 mengenai jumlah langsung matriks, yaitu dengan melakukan jumlah langung matriks-matriks pendamping maka menghasilkan bentuk matriks yang berukuran sama dengan matriks asalnya yang disebut dengan bentuk kanonik rasional.

Definisi 17 [4] Jika A merupakan matriks $r \times r$ dan B merupakan matriks $s \times s$, kemudian jumlah langsung $A \oplus B$ adalah matriks $(r + s) \times (r + s)$ yaitu:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Teorema 9 menjelaskan bahwa pada vektor V terdapat kumpulan vektor tak nol $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_r}\}$ di V

dengan ordernya masing-masing $\{p_1(x)^{e_1}, p_2(x)^{e_2}, \cdots, p_r(x)^{e_r}\}$ dan demikian juga bahwa V merupakan jumlah langsung dari subruang siklik $\{\langle \mathbf{v_i} \rangle, 1 \le i \le r\}$, yaitu

$$V = \langle \mathbf{v_1} \rangle \oplus \langle \mathbf{v_2} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{v_r} \rangle$$

Merupakan basis yang bersesuaian dengan basis pada subruang $\langle \mathbf{v_i} \rangle, 1 \le i \le r$ seperti pada Definisi 10 dan Teorema 13. Bentuk kanonik rasional dari T ialah matriks C_r dari T yang berhubungan dengan basis ini yaitu: $C_r = \begin{bmatrix} C(p_1(x)^{e_1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C(p_2(x)^{e_2}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C(p_r(x)^{e_r}) \end{bmatrix}$, sehingga bentuk kanonik rasional tersebut dapat berupa operasi jumlah langsung dari matriks-matrik pendamping. Lebih lanjut, bentuk kanonik rasional dari matriks persegi A berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{F}$ didefinisikan sebagai bentuk kanonik rasional dari transformasi linear T pada ruang vektor berdimensi-n atas $\mathbb{F}$, dengan matriks bersesuaian terhadap basisnya adalah matriks A [2].

Definisi 18 [4] Matriks bentuk kanonik rasional dilambangkan dengan C_r merupakan jumlah langsung dari matriks pendamping $C(p(x))$ yaitu

$$C_r = C(p_1(x)^{e_1}) \oplus C(p_2(x)^{e_2}) \oplus \cdots \oplus C(p_t(x)^{e_t})$$

dengan $p_1(x)|p_2(x)| \cdots |p_t(x)$ adalah polinomial prima monik yaitu polinomial dengan koefisien pangkat tertinggi sama dengan satu dan merupakan faktor polinomial terkecil pada suatu lapangan.

Contoh 19 Akan ditentukan bentuk kanonik rasional dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Polinomial karakteristik dari matriks A yaitu $\Delta(x) = x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 23x^2 + 12x - 9$. Bentuk faktornya adalah $(x-1)(x-3)(x^3 - 2x^2 - 8x - 3)$. Polinomial minimum $m(x)$ harus membagi polinomial karakteristik $\Delta(x)$ dari matriks A, setiap faktor yang tidak dapat direduksi dari $\Delta(x)$, yaitu $(x-1)$, $(x-3)$, dan $(x^3 - 2x^2 - 8x - 3)$. Maka $m(x)$ adalah salah satu faktor berikut yaitu:

1) $f_1(x) = (x-1)$
2) $f_2(x) = (x-3)$
3) $f_3(x) = (x^3 - 2x^2 - 8x - 3)$
4) $f_4(x) = (x-1)(x-3)$
5) $f_5(x) = (x-1)\,(x^3 - 2x^2 - 8x - 3)$
6) $f_6(x) = (x-3)\,(x^3 - 2x^2 - 8x - 3)$
7) $f_7(x) = (x-1)(x-3)(x^3 - 2x^2 - 8x - 3)$

Selanjutnya dengan melakukan perhitungan diperoleh:

$$f_1(A) \neq 0, f_2(A) \neq 0, f_3(A) \neq 0, f_4(A) \neq 0, f_5(A) \neq 0, f_6(A) \neq 0 \text{ dan } f_7(A) = 0$$

sehingga diperoleh polinomial minimum $m(x)$ dari matriks A adalah

$$m(x) = (x-1)(x-3)(x^3 - 2x^2 - 8x - 3)$$

dengan himpunan Pembagi elementer dari matriks A adalah

$$\{(x-1), (x-3), (x^3 - 2x^2 - 8x - 3)\}$$

matriks pendamping untuk pembagi elementer $p_1(x) = (x-1)$ adalah

$$C(p_1(x)) = [1].$$

matriks pendamping untuk pembagi elementer $p_2(x) = (x-3)$ adalah

$$C(p_2(x)) = [3].$$

matriks pendamping untuk pembagi elementer $p_3(x) = (x^3 - 2x^2 - 8x - 3)$ adalah

$$C(p_3(x)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sehingga bentuk kanonik rasional dari matriks A adalah

$$C_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Berikut ini ada tiga sifat bentuk kanonik rasional yang tercantum dalam Teorema 20, Teorema 21 dan Akibat 22, yaitu :

Teorema 20 [2] Dua matriks persegi A dan B yang berukuran $n \times n$ dengan koefisien dilapangan $\mathbb{F}$ dikatakan similar jika keduanya memiliki bentuk kanonik rasional yang sama (dapat ditentukan secara tunggal kecuali urutannya).

Teorema 21 [2] Bentuk kanonik rasional dari suatu transformasi linear $T \in L(V, V)$ dapat ditentukan secara tunggal (kecuali urutannya) [2].

Lemma 22 [2] Dua matrik persegi dengan entri-entri dalam $\mathbb{F}$ adalah similar jika dan hanya jika memiliki himpunan yang sama pada pembagi elementernya [2].

Contoh 23 Misalkan diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10/3 & 2 \end{bmatrix}$. Polinomial karakteristik dari matriks A dan matriks B yaitu $\Delta(x) = x^2 - 3x + 2$, kemudian keduanya juga memiki polinomial minimum yang sama yaitu $m(x) = (x-1)(x-2)$, sehingga pembagi elementer juga sama yaitu $p(x) = (x-1)(x-2)$, berdasarkan pembagi elementer diperoleh matriks pendamping yaitu $[1]$ dan $[2]$. Bentuk kanonik rasional dari matriks A dan Matriks B yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Selanjutnya dapat ditunjukkan matriks A similar dengan matriks B karena terdapat matriks tak singular P yaitu $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}$ sehingga $B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10/3 & 2 \end{bmatrix}$.

Contoh 24 Akan ditentukan bentuk kanonik rasional atas $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$ dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian

Dengan mencari polinomial karakteristik A diperoleh

$$\Delta(x) = x^2 - 2$$

polinomial karakteristik $\Delta(x) = x^2 - 2$ merupakan faktor polinomial atas $\mathbb{Q}$, kemudian polinomial minimumnya $m(x) = x^2 - 2$ dan pembagi elementernya $p(x) = x^2 - 2$ sehingga matriks pendampingnya diperoleh $C(p(x)) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan bentuk kanonik rasionalnya ialah $C_r = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tetapi, polinomial karakteristik $\Delta(x) = x^2 - 2$ atas $\mathbb{R}$ yaitu $\Delta(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, kemudian polinomial minimumnya $m(x) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ dan $p(x) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ sehingga matriks pendampingnya diperoleh $C(p(x)) = \begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$ dan bentuk kanonik rasionalnya ialah

$$C_r = \begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

Contoh 25 Akan ditentukan bentuk kanonik rasional atas $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{C}$ dari matriks $A = \begin{bmatrix}1 & -2 \\ 1 & -1\end{bmatrix}$

Penyelesaian

Dengan mencari polinomial karakteristik dari matriks A diperoleh $\Delta(x) = x^2+1$. Kemudian polinomial karakteristik $\Delta(x) = x^2+1$ merupakan faktor polinomial atas $\mathbb{R}$, kemudian polinomial minimumnya $m(x) = x^2+1$, pembagi elementernya $p(x) = x^2+1$ kemudian matriks pendampingnya $C(p(x)) = \begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$ sehingga diperoleh bentuk kanonik rasionalnya $C_r = \begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$. Tetapi, polinomial karakteristik $\Delta(x) = x^2+1$ atas $\mathbb{C}$ yaitu $\Delta(x) = (x-i)(x+i)$, memiliki polinomial minimum $m(x) = (x-i)(x+i)$ dan pembagi elementer $p(x) = (x-i)(x+i)$, kemudian matriks pendamping $C(p(x)) = \begin{bmatrix}i & 0 \\ 0 & -i\end{bmatrix}$, sehingga bentuk kanonik rasionalnya ialah

$$C_r = \begin{bmatrix}i & 0 \\ 0 & -i\end{bmatrix}.$$

PENUTUP

Mencari bentuk kanonik rasional dengan menggunakan pembagi elementer dapat ditentukan dari faktor-faktor polinomial minimum yang berbeda sehingga pembagi elementer tersebut berbentuk $\{p_1(x)^{e_1}, \cdots, p_r(x)^{e_r}\}$. Berdasarkan dari masing-masing $p_i(x)^{e_i}, i = 1,2,\cdots,r$ maka dapat dibentuk matriks pendamping $C(p_i(x)^{e_i})$. Selanjutnya dengan melakukan jumlah langsung diperoleh bentuk kanonik rasional $C_r = C(p_1(x)^{e_1}) \oplus C(p_2(x)^{e_2}) \oplus \cdots \oplus C(p_t(x)^{e_t}$. Jadi masing-masing bentuk mantriks pendamping juga merupakan blok diagonal dari bentuk kanonik rasional. Kemudian dengan menggunakan bentuk kanonik rasional dapat menunjukkan bahwa dua matriks berukuran $n \times n$ dengan koefisien dilapangan $\mathbb{F}$ similar, jika keduanya memiliki bentuk kanonik rasional yang sama (dapat ditentukan secara tunggal kecuali urutannya) atau keduanya memiliki himpunan yang sama pada pembagi elementernya.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Anton, H. dan Rorres, C. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi,* Ed ke-*8*. Erlangga: Jakarta; 2004.
[2]. Lipschuttz, dan lipson, L. M.Aljabar *Linear Versi Aplikasi,* Ed ke-*3*. Erlangga:Jakarta; 2006.
[3]. Curtis W.Charles. *Linear Algebra An Introductory Aproach*. Springer-Verlac: New York;1984.
[4]. Rotman, J. Joseph. *Advance Modern Algebra*. Prentice Hall: English; 2003

ARDIANSYAH : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, ardyjojo @yahoo.com
HELMI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, helmi132205@yahoo.co.id
FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, frandly88@gmail.com