Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 5, No. 03 (2016), hal 221 – 228.

INVERS DRAZIN DARI SUATU MATRIKS DENGAN MENGGUNAKAN BENTUK KANONIK JORDAN

Eko Sulistyono, Shantika Martha, Eka Wulan Ramadhani

INTISARI

Suatu matriks A berukuran nxn dikatakan tidak memiliki invers atau disebut dengan matriks singular jika tidak ada matriks B yang memenuhi $AB=I_n$ dan $BA=I_n$. Jika matriks A adalah matriks singular maka dapat ditentukan suatu matriks B yang memiliki karakteristik dari sifat invers matriks sehingga matriks B disebut dengan invers tergeneralisasi dari matriks A. Invers Drazin merupakan salah satu invers tergeneralisasi dari suatu matriks berukuran nxn. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan invers Drazin dari suatu matriks dengan menggunakan bentuk kanonik Jordan. Invers Drazin dari matriks A yang dinotasikan A^D diperoleh dengan menentukan nilai karakteristik dari matriks A dan multiplisitas aljabar dari masing-masing nilai karakteristik. Langkah selanjutnya adalah menentukan bilangan bulat positif terkecil p yang memenuhi dimensi ruang karakteristik ke-p sama dengan multiplisitas aljabar dari masing-masing nilai karakteristik. Nilai p digunakan untuk menentukan vektor karakteristik tergeneralisasi dari matriks A. Selanjutnya menentukan matriks P dengan kolom-kolomnya merupakan vektor karakteristik tergeneralisasi dari matriks A. Hasil perkalian dari $P^{-1}AP$ merupakan bentuk kanonik Jordan yang dinotasikan dengan J. Matriks J kemudian dipartisi menjadi J_1 dan J_0 secara berturut-turut merupakan matriks blok diagonal utama dari J, dan matriks nol untuk matriks blok lainnya. Invers Drazin diperoleh dari PKP^{-1}dengan K merupakan matriks yang dibentuk dari J_1^{-1}dan matriks nol secara berturut-turut merupakan matriks blok diagonal utama dari K dan matriks nol untuk matriks blok lainnya.

Kata Kunci: *Invers Drazin, Bentuk Kanonik Jordan*

PENDAHULUAN

Matriks merupakan salah satu teori yang dipelajari di bidang matematika, khususnya pada ilmu aljabar. Matriks dapat digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linear, dengan penyelesaiannya dapat menggunakan invers. Matriks A berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$ dikatakan memiliki invers atau disebut matriks non *singular* jika terdapat matriks B yang memenuhi $AB = I_n$ dan $BA = I_n$. Apabila tidak ada matriks B yang memenuhi $AB = I_n$ dan $BA = I_n$ maka matriks A disebut matriks *singular.* Walaupun matriks A adalah matriks *singular*, namun dapat ditentukan suatu matriks B yang memiliki karakteristik dari sifat invers matriks sehingga matriks B disebut invers tergeneralisasi dari matriks A.

Ada beberapa invers tergeneralisasi, diantaranya adalah invers Moore-Penrose, invers Grup, dan invers Drazin. Invers Drazin merupakan salah satu invers tergeneralisasi dari matriks berukuran $n \times n$. Pada tahun 1958, ilmuwan asal Amerika yang bernama Michael P Drazin pertama kali memperkenalkan invers Drazin [1]. Beberapa metode yang dapat digunakan dalam memperoleh invers Drazin adalah bentuk kanonik Jordan, metode Leverrier Faddeev, dan metode semi iterative tipe BI-CG. Invers Drazin dapat diaplikasikan pada rantai Markov, kriptografi, dan sistem persamaan linear.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan invers Drazin dari suatu matriks berukuran $n \times n$ dengan menggunakan bentuk kanonik Jordan. Adapun batasan masalah dalam penelitian ini adalah matriks berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$. Misalkan A merupakan matriks berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$. Invers Drazin dari matriks A diperoleh dengan menentukan nilai karakteristik λ_i dari matriks A dan multiplisitas aljabar dari λ_i yang dinotasikan dengan $m(\lambda_i)$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$. Langkah selanjutnya adalah menentukan bilangan bulat positif terkecil p yang memenuhi $\dim\left(E_{\lambda_i}^p\right) = m(\lambda_i)$

dengan $\dim\left(E_{\lambda_i}^{p}\right)$ merupakan dimensi ruang karakteristik ke-p dari λ_i untuk setiap $i = 1,2,\ldots,n$. Nilai p digunakan untuk menentukan vektor karakteristik tergeneralisasi dari matriks A. Selanjutnya menentukan matriks P dengan kolom-kolomnya merupakan vektor karakteristik tergeneralisasi dari matriks A. Hasil perkalian dari $P^{-1}AP$ merupakan bentuk kanonik Jordan dari matriks A yang dinotasikan dengan J. Matriks J dipartisi menjadi J_1 dan J_0 secara berturut-turut merupakan matriks blok diagonal utama dari J dan matriks nol untuk blok lainnya dengan J_1 merupakan matriks blok Jordan yang bersesuaian dengan $\lambda \neq 0$ dan J_0 merupakan matriks blok Jordan yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$. Selanjutnya menentukan invers Drazin dari matriks A yaitu dengan menentukan perkalian antara matriks P, matriks yang dipartisi menjadi J_1^{-1} dan matriks nol berturut-turut merupakan matriks blok diagonal utama serta matriks nol untuk blok lainnya, dan invers dari matriks P.

BENTUK KANONIK JORDAN

Misalkan A merupakan matriks berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$ maka bentuk kanonik Jordan dari matriks A yang dinotasikan dengan J didefinisikan sebagai berikut [2]:

$$J = \begin{bmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{p_2}(\lambda_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & J_{p_m}(\lambda_m) \end{bmatrix}$$

dengan $J_{p_i}(\lambda_i)$ merupakan matriks blok Jordan yang bersesuaian dengan λ_i, p_i merupakan ukuran dari matriks blok Jordan, ukuran p_i ditentukan dari $m(\lambda_i)$, dan $\mathbf{0}$ merupakan matriks nol untuk setiap $i = 1,2,..,m$. Bentuk matriks blok Jordan $J_{p_i}(\lambda_i)$ adalah sebagai berikut:

$$J_{p_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Suatu matriks A dikatakan memiliki bentuk kanonik Jordan jika dapat dinyatakan ke dalam bentuk $A = PJP^{-1}$, dengan P merupakan suatu matriks non *singular*. Matriks P dapat diperoleh dengan menentukan vektor karakteristik tergeneralisasi dari matriks A. Berikut ini diberikan definisi vektor karakteristik tergeneralisasi dari suatu matriks.

Definisi 1 [3] *Dimisalkan matriks A berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$ dan λ merupakan nilai karakteristik dari matriks A. Vektor $\mathbf{x_p}$ disebut vektor karakteristik tergeneralisasi jika dan hanya jika*

$$(A - \lambda I)^p \mathbf{x_p} = \mathbf{0} \text{ dan } (A - \lambda I)^{p-1} \mathbf{x_p} \neq \mathbf{0}$$

dengan $p \in \mathbb{Z}$.

Dimisalkan $\mathbf{x_p}$ merupakan vektor karakteristik tergeneralisasi dengan tingkat p yang bersesuaian dengan λ_1, maka p vektor karakteristik tergeneralisasi dapat ditentukan dari persamaan sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} (A - \lambda_1 I_n)\mathbf{x_1} &= \mathbf{0} \\ (A - \lambda_1 I_n)^2\mathbf{x_2} &= \mathbf{0} \\ &\vdots \\ (A - \lambda_1 I_n)^p\mathbf{x_p} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Selanjutnya Persamaan (1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A-\lambda_1 I_n)^p \mathbf{x_p} \\ \mathbf{x_{p-1}} &= (A-\lambda_1 I_n)\mathbf{x_p} \\ \mathbf{x_{p-2}} &= (A-\lambda_1 I_n)^2 \mathbf{x_p} \\ &\vdots \\ \mathbf{x_2} &= (A-\lambda_1 I_n)^{p-2} \mathbf{x_p} \\ \mathbf{x_1} &= (A-\lambda_1 I_n)^{p-1} \mathbf{x_p} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

dengan $p \in \mathbb{Z}$. Dimensi ruang karakteristik ke-p yang bersesuaian dengan nilai karakteristik λ_i dinotasikan dengan $\dim\left(E_{\lambda_i}^p\right)$. Dimensi dari $E_{\lambda_i}^p$ diperoleh dengan menentukan banyaknya vektor-vektor pada suatu basis untuk ruang karakteristik ke-p yaitu:

$$(A-\lambda_i I_n)^p \mathbf{x_p} = \mathbf{0}$$

Banyaknya vektor karakteristik tergeneralisasi diperoleh dengan menentukan bilangan bulat positif terkecil p yang memenuhi $\dim\left(E_{\lambda_i}^p\right) = m(\lambda_i)$ untuk setiap $i = 1,2,\dots,m$. Berikut ini diberikan contoh menentukan bentuk kanonik Jordan dari suatu matriks.

Contoh 2 Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & i & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -2i & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Nilai karakteristik dari matriks A adalah $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ dengan $m(3) = 2$, $\lambda_3 = 2-2i$ dengan $m(2-2i) = 1$ dan $\lambda_4 = 0$ dengan $m(0) = 1$. Untuk $p = 1$ diperoleh $\dim(E_3^1) = 1$ sedangkan $m(3) = 2$, sehingga $\dim(E_3^1) \neq m(3)$. Untuk $p = 2$ diperoleh $\dim(E_3^2) = 2 = m(3)$, akibatnya dengan menggunakan Definisi 1 untuk $p = 2$ diperoleh vektor karakteristik tergeneralisasi $\mathbf{x_2}$ sebagai berikut:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}-\frac{6}{5}i & 0 & -\frac{6}{5}+\frac{12}{5}i & 1 \end{bmatrix}^T$$

dan dengan menggunakan Persamaan (2) diperoleh vektor karakteristik tergeneralisasi $\mathbf{x_1}$ sebagai berikut:

$$\mathbf{x}_1 = (A-3I_4)\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Dengan $p = 1$ untuk $\lambda_2 = 2-2i$ diperoleh vektor karakteristik tergeneralisasi

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10}+\frac{1}{5}i & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

dan dengan $p = 1$ untuk $\lambda_4 = 0$ diperoleh vektor karakteristik tergeneralisasi

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}i & -\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Kemudian membentuk $\mathrm{P} = [\mathbf{x_1} \quad \mathbf{x_2} \quad \mathbf{y_1} \quad \mathbf{z_1}]$ maka

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5}-\frac{6}{5}i & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i & 0 & -\frac{1}{10}+\frac{1}{5}i & -\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i \\ 0 & -\frac{6}{5}+\frac{12}{5}i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bentuk kanonik Jordan dari matriks A adalah $J = P^{-1}AP$ sehingga diperoleh

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

INVERS DRAZIN

Diberikan matriks A dan B berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$. Matriks B dikatakan invers tergeneralisasi dari A jika dapat dinyatakan ke dalam bentuk $ABA = A$ [2]. Salah satu invers tergeneralisasi adalah invers Drazin. Invers Drazin dari suatu matriks A berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$ dinotasikan dengan A^D. Sebelum diberikan definisi invers Drazin, terlebih dahulu diberikan definisi mengenai indeks dari suatu matriks.

Definisi 3 [4] *Diberikan matriks singular A berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$, bilangan bulat positif terkecil k yang memenuhi*

$$\text{rank}(A^k) = \text{rank}(A^{k+1})$$

disebut indeks matriks A yang dinotasikan $Ind(A) = k$.

Berdasarkan Definisi 3 diberikan contoh menentukan indeks dari suatu matriks *singular*.

Contoh 4 Diberikan matriks A dari Contoh 2. Rank dari matriks A adalah 3 dan rank dari matriks A^2 adalah 3, akibatnya indeks dari matriks A adalah 1.

Selanjutnya diberikan definisi mengenai invers Drazin dari suatu matriks berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$.

Definisi 5 [1] *Misalkan A matriks berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$. Matriks A^D berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$ dikatakan invers Drazin dari A, jika memenuhi*

(i) $A^D A A^D = A^D$
(ii) $AA^D = A^D A$
(iii) $A^k A^D A = A^k$

dengan k merupakan indeks dari matriks A.

Definisi 3 hanya berlaku untuk matriks *singular* berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$. Berikut ini diberikan teorema yang menjelaskan indeks dari suatu matriks non *singular* berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$.

Teorema 6 [4] *Diberikan matriks A berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$. Jika matriks A merupakan matriks non singular maka $Ind(A) = 0$.*

Bukti:

Misalkan A merupakan matriks non *singular* berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$. Matriks A jika dibentuk ke dalam eselon baris tereduksi akan menghasilkan matriks identitas sehingga $\text{rank}(A) = rank(I_n) = n$. Matriks A^0 merupakan matriks I_n, akibatnya $\text{rank}(A^0) = \text{rank}(A^1)$. Karena $k = 0$ mengakibatkan $\text{rank}(A^0) = \text{rank}(A^1)$ maka $Ind(A) = 0$. ∎

Selanjutnya diberikan teorema mengenai invers Drazin dari suatu matriks non *singular* berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$.

Teorema 7 *Diberikan matriks A merupakan matriks non singular berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$. Matriks B dikatakan invers Drazin dari A jika dan hanya jika matriks B merupakan invers dari A.*

Bukti:

Misalkan A merupakan matriks non *singular* berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$, B merupakan suatu matriks berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$. Invers Drazin dari matriks non *singular* A dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$B \text{ merupakan invers dari } A \Leftrightarrow B \text{ merupakan invers Drazin dari } A$$

a) B merupakan invers dari $A \Rightarrow B$ merupakan invers Drazin dari A

Dengan yang telah diketahui bahwa B merupakan invers dari A yaitu $BA = I_n$ dan $AB = I_n$, maka akan ditunjukkan bahwa B merupakan invers Drazin dari A yaitu memenuhi Definisi 5

i. $BAB = I_n B = B$ ii. $AB = I_n = BA$ iii. $A^k BA = A^k I_n = A^k$

Karena A dan B memenuhi Definisi 5, maka B merupakan invers Drazin dari A.

b) B merupakan invers Drazin dari $A \Rightarrow B$ merupakan invers dari A

Dengan yang telah diketahui bahwa B merupakan invers Drazin dari A maka akan ditunjukkan bahwa B merupakan invers dari A yaitu memenuhi $BA = I_n$ dan $AB = I_n$.

$$A^k BA = A^k \Leftrightarrow A^0 BA = A^0 \Leftrightarrow BA = I_n \Leftrightarrow AB = I_n$$

Karena A dan B memenuhi $BA = I_n$ dan $AB = I_n$ maka B merupakan invers dari A.

Berdasarkan (a) dan (b), terbukti bahwa matriks B merupakan invers Drazin dari A jika dan hanya jika matriks B merupakan invers Drazin dari A.■

Misalkan A merupakan matriks berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$, $J_{p_1}(\lambda_1), J_{p_2}(\lambda_2), \dots, J_{p_n}(\lambda_n)$ merupakan matriks blok Jordan yang bersesuaian dengan $\lambda \neq 0$, dan $J_{p_m}(0)$ merupakan matriks blok Jordan yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$. Bentuk kanonik Jordan dari matriks A dapat dipartisi menjadi

$$J = \left[\begin{array}{ccc|c} J_{p_1}(\lambda_1) & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & J_{p_n}(\lambda_n) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_{p_m}(0) \end{array}\right]$$

Matriks J dapat dituliskan dalam bentuk sederhana sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_0 \end{bmatrix}$$

dengan J_1 merupakan matriks blok Jordan yang bersesuaian dengan $\lambda \neq 0$ dan J_0 merupakan matriks blok Jordan yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$. Selanjutnya diberikan teorema yang menjelaskan bentuk invers Drazin dari suatu matriks dengan menggunakan bentuk kanonik Jordan namun sebelumnya diberikan lemma yang dapat mendukung dalam membuktikan teorema yang akan dijelaskan.

Lemma 8 [2] *Jika diberikan matriks A berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$ maka terdapat matriks P non singular sedemikian sehingga $AP = PJ$ dengan J merupakan bentuk kanonik Jordan dari matriks A. Lebih lanjut P merupakan matriks yang kolom-kolomnya merupakan vektor karakteristik tergeneralisasi dari matriks A.*

Bukti:

Misalkan matriks A berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$ dan $\lambda_1, .., \lambda_k, \lambda_{k+1}, .., \lambda_n$ merupakan nilai karakteristik dari matriks A, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k$, sehingga dapat dibentuk

$$J = \begin{bmatrix} J_k(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_{k+1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_n \end{bmatrix}$$

dengan $J_k(\lambda_1)$ merupakan matriks blok Jordan yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k$. Misalkan $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_k}$ merupakan vektor karakteristik tergeneralisasi yang bersesuaian dengan λ_1 sehingga dengan menggunakan Definisi 1 maka k vektor karakteristik tergeneralisasi dapat ditentukan dari persamaan sebagai berikut:

$$\begin{gathered}(A - \lambda_1 I_n)\mathbf{x_1} = \mathbf{0} \\ (A - \lambda_1 I_n)^2\mathbf{x_2} = \mathbf{0} \\ \vdots \\ (A - \lambda_1 I_n)^k\mathbf{x_k} = \mathbf{0}\end{gathered}$$

diperoleh

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{x_1} &= (A - \lambda_1 I_n)\mathbf{x_2} \\ \mathbf{x_2} &= (A - \lambda_1 I_n)\mathbf{x_3} \\ &\vdots \\ \mathbf{x_{k-1}} &= (A - \lambda_1 I_n)\mathbf{x_k}\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Berdasarkan Persamaan (3) maka $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_k}$ memenuhi persamaan berikut:

$$\left.\begin{aligned}A\mathbf{x_1} &= \lambda_1\mathbf{x_1} \\ A\mathbf{x_2} &= \mathbf{x_1} + \lambda_1\mathbf{x_2} \\ &\vdots \\ A\mathbf{x_k} &= \mathbf{x_{k-1}} + \lambda_1\mathbf{x_k}\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Kemudian $\mathbf{x_{k+1}}, \mathbf{x_{k+2}}, \dots, \mathbf{x_n}$ merupakan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan nilai karakteristik $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n$ sehingga diperoleh

$$\left.\begin{aligned}(A - \lambda_{k+1} I_n)\mathbf{x_{k+1}} &= \mathbf{0} \\ (A - \lambda_{k+2} I_n)\mathbf{x_{k+2}} &= \mathbf{0} \\ &\vdots \\ (A - \lambda_k I_n)\mathbf{x_k} &= \mathbf{0}\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Berdasarkan Persamaan (5) maka $\mathbf{x_{k+1}}, \mathbf{x_{k+2}}, \dots, \mathbf{x_n}$ memenuhi persamaan berikut:

$$\left.\begin{aligned}A\mathbf{x_{k+1}} &= \lambda_{k+1}\mathbf{x_{k+1}} \\ A\mathbf{x_{k+2}} &= \lambda_{k+2}\mathbf{x_{k+2}} \\ &\vdots \\ A\mathbf{x_n} &= \lambda_n\mathbf{x_n}\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Persamaan (4) dan (6) dapat dibentuk menjadi

$$A\begin{bmatrix}\mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x_k} \\ \mathbf{x_{k+1}} \\ \vdots \\ \mathbf{x_n}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x_k} \\ \mathbf{x_{k+1}} \\ \vdots \\ \mathbf{x_n}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} \qquad (7)$$

pada Persamaan (7), matriks

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

merupakan bentuk kanonik Jordan dari matriks A. Selanjutnya vektor-vektor karakteristik yang terdapat pada Persamaan (7) dapat ditulis menjadi

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \cdots & \mathbf{x_n} \end{bmatrix}$$

sehingga Persamaan (7) dapat dinyatakan sebagai $AP = PJ$. ■

Berikut ini diberikan teorema mengenai bentuk invers Drazin dari suatu matriks dengan menggunakan bentuk kanonik Jordan.

Teorema 9 [2] *Diberikan matriks A berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$ memiliki bentuk kanonik Jordan*

$$A = P \begin{bmatrix} J_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

dengan J_0 dan J_1 yang masing-masing merupakan matriks blok Jordan yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ dan $\lambda \neq 0$, maka

$$A^D = P \begin{bmatrix} J_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Bukti:

Misalkan matriks A berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$ dapat dinyatakan ke dalam bentuk kanonik Jordan yaitu:

$$A = P \begin{bmatrix} J_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_0 \end{bmatrix} P^{-1} \tag{8}$$

untuk suatu P merupakan matriks yang kolom-kolomnya merupakan vektor karakteristik tergeneralisasi yang bersesuaian dengan nilai karakteristik dari matriks A, dan $\begin{bmatrix} J_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_0 \end{bmatrix}$ merupakan bentuk kanonik Jordan dari matriks A. Misalkan A^D merupakan invers Drazin dari matriks A yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$A^D = P \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U \end{bmatrix} P^{-1} \tag{9}$$

dengan $\begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U \end{bmatrix}$ merupakan bentuk kanonik Jordan dari matriks A^D, R merupakan matriks blok Jordan yang memiliki ukuran yang sama dengan J_1, U merupakan matriks blok Jordan yang memiliki ukuran yang sama dengan J_0. Karena A^D merupakan invers Drazin dari A, maka A dan A^D memenuhi

$$A^D A A^D = A^D \tag{10}$$

$$A^k A A^D = A^k \tag{11}$$

dengan k merupakan indeks dari matriks A.

Selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (8) dan (9) ke Persamaan (11) diperoleh

$$\begin{bmatrix} J_1^{k+1} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_0^{k+1} U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_0^k \end{bmatrix}$$

karena J_1 merupakan matriks blok Jordan yang bersesuaian dengan $\lambda \neq 0$ akibatnya J_1 memiliki invers sehingga berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$J_1^{k+1} R = J_1^k \Leftrightarrow R = J_1^{-1}.$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (8) dan (9) ke Persamaan (10) diperoleh

$$U = J_0 U^2. \tag{12}$$

Matriks $J_0^k = \mathbf{0}$ dengan k merupakan indeks dari matriks A maka $J_0^k U = \mathbf{0}$. Karena $U = J_0 U^2$ dan $J_0^k U = \mathbf{0}$ maka

$$J_0^{k-1} U = J^k U^2 = \mathbf{0}$$

dan

$$J_0^{k-2} U = J_0^{k-1} U^2 = \mathbf{0}$$

kemudian ditentukan k hingga diperoleh

$$J_0 U^2 = \mathbf{0}. \tag{13}$$

Berdasarkan Persamaan (12) dan (13) maka diperoleh $U = \mathbf{0}$**.** Kemudian dengan mensubstitusikan matriks $R = J_1^{-1}$, $U = \mathbf{0}$ ke Persamaan (9) diperoleh

$$A^D = P\begin{bmatrix} J_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} P^{-1} \blacksquare.$$

Berikut ini diberikan contoh dalam menentukan invers Drazin dari suatu matriks *singular.*

Contoh 10 Diberikan matriks J dari Contoh 2. Matriks blok Jordan J_1 dan J_0 adalah sebagai berikut:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2i \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad J_0 = [0]$$

Selanjutnya menentukan invers Drazin dari matriks A dengan menggunakan Teorema 9 yaitu:

$$A^D = P\begin{bmatrix} J_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} P^{-1}$$

diperoleh

$$A^D = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}i & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \\ \frac{7}{18}+\frac{5}{36}i & \frac{1}{3} & \frac{11}{72}+\frac{1}{36}i & -\frac{1}{12}-\frac{1}{12}i \\ -\frac{1}{2}i & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

PENUTUP

Invers Drazin dari matriks A berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{C}$ diperoleh dengan menentukan nilai karakteristik dari matriks A dan multiplisitas aljabar dari masing-masing nilai karakteristik. Langkah selanjutnya menentukan bilangan bulat positif terkecil p yang memenuhi $\dim\left(E_{\lambda_i}^p\right) = m(\lambda_i)$. Nilai p digunakan untuk menentukan vektor karakteristik tergeneralisasi dari matriks A. Selanjutnya membentuk P dengan kolom-kolomnya merupakan vektor karakteristik tergeneralisasi dari matriks A. Hasil perkalian dari $P^{-1}AP$ merupakan bentuk kanonik Jordan dari matriks A yang dinotasikan dengan J. Matriks J dipartisi menjadi J_1 dan J_0 secara berturut-turut merupakan matriks blok diagonal utama dan matriks nol untuk blok lainnya. Invers Drazin dari matriks A diperoleh dengan melakukan perkalian antara matriks P, matriks yang dipartisi menjadi J_1^{-1} dan matriks nol merupakan matriks blok diagonal utama serta matriks nol untuk blok lainnya, dan invers dari matriks P.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Campbell SL, Meyer CD. *Generalize Inverses of Linear Transformation.* London: Siam; 2009.

[2]. Ben-Israel A, Greville NE. *Generalized Inverse : Theory and Application, Second Edition.* New York: Springer; 2003.

[3]. Bronson R, Costa GB. *Linear Algebra : An Introduction, Second Edition.* London: Elsevier; 2007.

[4]. Nikuie M. Some Result About The Index of Matrix and Drazin Inverse. *Mathematical Science.* 2010; 4(3):283-294.

EKO SULISTYONO : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, sulistyono.eko25@gmail.com

SHANTIKA MARTHA : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, shantika.martha@gmail.com

EKA WULAN RAMADHANI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, wulan2890@gmail.com