Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 05, No. 2 (2016), hal 119 – 128.

APLIKASI MODEL JUKES CANTOR DALAM MENENTUKAN PELUANG BASA NITROGEN KETURUNAN SUATU INDIVIDU

Nahrul Hayati, Mariatul Kiftiah, Bayu Prihandono

INTISARI

Setiap individu memiliki DNA yang merupakan identitas biologis personal yang spesifik. Namun dalam satu keluarga setiap individu memiliki kecocokan pola urutan basa nitrogen. Oleh karena itu, dapat dilakukan analisis terhadap pola urutan basa nitrogen dari generasi ke generasi. Model Jukes Cantor adalah model yang dapat digunakan untuk menganalisis pola urutan basa nitrogen tersebut. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis proses terbentuknya model Jukes Cantor yang dapat digunakan untuk menentukan nilai peluang basa nitrogen pada DNA keturunan suatu individu. Adapun nilai peluang basa nitrogen yang dimaksud adalah peluang basa Adenin (P_A), Guanin (P_G), Sitosin (P_C), dan Timin (P_T). Proses pembentukan model Jukes Cantor dimulai dengan menentukan nilai peluang basa nitrogen pada DNA leluhur ($\mathbf{p_0}$) serta menentukan peluang bersyarat dari substitusi basa nitrogen pada DNA leluhur dan keturunan pertama. Selanjutnya, peluang bersyarat yang telah ditentukan sebelumnya dapat digunakan untuk membentuk matriks transisi (M) pada model Jukes Cantor. Dari matriks M dapat diketahui nilai eigen (λ), matriks diagonal dari nilai eigen (D), basis untuk ruang eigen, matriks V yang mendiagonalisasi M, serta invers dari matriks V. Kemudian, nilai-nilai yang telah diketahui dari matriks M dapat digunakan untuk menentukan matriks transisi M^t yakni $M^t = VD^tV^{-1}$ Berdasarkan langkah-langkah tersebut, dapat diperoleh model Jukes Cantor dalam menentukan peluang basa nitrogen keturunan suatu individu sebagai berikut $\mathbf{p_t}=M^t\mathbf{p_0}$. Dengan menerapkan model pada suatu barisan DNA leluhur dengan P_A=0,3; P_G=0,225; P_C=0,25; dan P_T=0,225 maka nilai peluang basa nitrogen pada salah satu individu dari keturunan ke-t adalah $P_A = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t$; $P_G = \frac{1}{4} - \frac{1}{40}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t$; $P_C = 0.25$; *dan* $P_T = \frac{1}{4} - \frac{1}{40}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t$.

Kata Kunci: *Model Jukes Cantor, Peluang Basa Nitrogen.*

PENDAHULUAN

Asam *Deoksiribonukleat* atau *Deoxyribonucleic Acid* (DNA) adalah persenyawaan kimia yang penting pada makhluk hidup. Seuntai DNA sepanjang satu meter terstruktur oleh sekitar tiga milyar basa nitrogen yang saling berpasangan. Basa nitrogen tersebut adalah Adenin (*A*), Guanin (*G*), Sitosin (*C*), dan Timin (*T*). Urutan basa nitrogen ini beragam pada setiap individu yang tidak berhubungan darah. Oleh karena itu, pola urutan basa nitrogen dalam setiap untai DNA ini menjadi identitas biologis personal yang spesifik untuk keunikan seorang individu [1].

Salah satu contoh bahwa DNA merupakan identitas biologis personal yang spesifik adalah pada sebuah tragedi yang terjadi lebih dari satu tahun yang lalu, yaitu pada tanggal 17 Juli 2014. Penerbangan MH17 *Malaysia Airlines* yang terjadwal dari Amsterdam ke Kuala Lumpur jatuh di Ukraina timur di dekat perbatasan Rusia dengan 283 penumpang dan 15 awak kabin dari berbagai negara. Pada tragedi ini tidak ada korban yang selamat, kondisi tubuh korban pun sangat sulit untuk dikenali [2]. Agar dapat mencocokkan anggota tubuh yang terpisah dan mengenali identitas korban agar dapat dikembalikan kepada keluarganya, Tim *Disaster Victim Identification* (DVI) Polri dikirim ke Ukraina. Tim DVI ini menggunakan bantuan identitas korban yang unik yang hanya dimiliki oleh korban dan memiliki kecocokan dengan anggota keluarganya [3].

Dalam satu keluarga, setiap individu memiliki kecocokan pola urutan pasangan basa nitrogen. Hal ini dapat terjadi karena DNA membawa keterangan genetik makhluk hidup dari generasi awal ke generasi berikutnya [4]. Berdasarkan teori tersebut dapat dilakukan analisis terhadap pola pasangan basa

nitrogen dari generasi ke generasi.

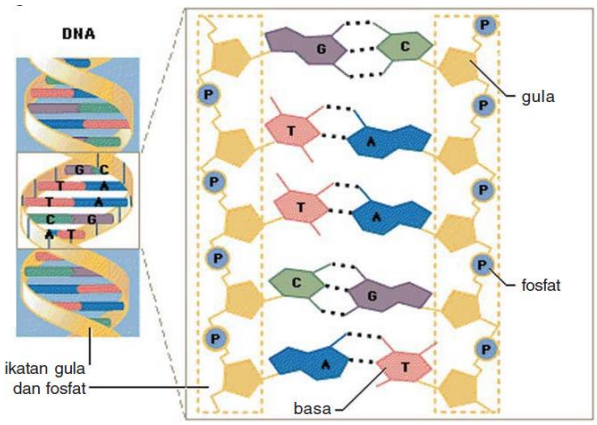
Model Jukes Cantor adalah sebuah model yang dapat diganakan untuk menganalisis pola pasangan basa nitrogen dari generasi ke generasi. Model Jukes Cantor sendiri merupakan aplikasi dari rantai Markov. Model ini dapat menggambarkan peluang setiap keadaan hanya dengan mengetahui peluang pada keadaan awal saja. Sehingga, model Jukes Cantor dapat digunakan untuk mengetahui nilai peluang basa nitrogen setiap keturunan suatu individu hanya dengan mengetahui nilai peluang basa nitrogen pada leluhurnya saja [5].

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis proses terbentuknya model Jukes Cantor dan aplikasinya dalam menentukan peluang basa nitrogen keturunan suatu individu. Keturunan yang dimaksud adalah keturunan pertama, kedua, dan seterusnya. Batasan masalah pada penelitian ini adalah peluang basa nitrogen keturunan yang dituju adalah peluang basa pada salah satu individu dari keturunan ke-*t*.

Langkah pertama dalam penelitian ini adalah menentukan nilai peluang basa nitrogen pada DNA leluhur ($\mathbf{p_0}$) dan menentukan peluang bersyarat dari substitusi basa nitrogen pada DNA leluhur dan keturunan pertama. Adapun entri dari vektor $\mathbf{p_0}$ adalah nilai peluang dari basa nitrogen leluhur. Langkah kedua yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan matriks transisi pada model Jukes Cantor (M). Entri pada matriks M tersebut adalah peluang bersyarat dari substitusi basa nitrogen jenis apapun yang telah ditentukan sebelumnya. Langkah ketiga adalah menentukan nilai eigen (λ) dari matriks M yang kemudian dibentuk matriks diagonal (D) dari nilai eigen tersebut. Selanjutnya, menentukan basis untuk ruang eigen dari matriks M yang kemudian dibentuk matriks V yang mendiagonalisasi matriks M. Langkah kelima adalah menentukan invers dari matriks V. Selanjutnya, dapat dicari nilai M^t dengan cara mengalikan matriks V dengan D^t yang berupa matriks diagonal dari nilai eigen yang dipangkatkan t, yang kemudian dikalikan lagi dengan invers dari matriks V. Kemudian pada langkah terakhir dapat diperoleh model Jukes Cantor pada peluang basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-t, yakni dengan cara mengalikan matriks M^t dan vektor $\mathbf{p_0}$.

DEOXYRIBONUCLEIC ACID (DNA)

DNA adalah persenyawaan kimia yang penting pada makhluk hidup. DNA merupakan suatu polimer ganda yang berpilin (*double heliks*). Setiap DNA terdiri dari gugus fosfat, basa nitrogen, dan gula pentosa [1]. Secara sederhana, struktur dan susunan DNA dapat disajikan seperti pada Gambar 1 sebagai berikut:



Gambar 1 Struktur dan Susunan DNA

Sumber: Encarta Library, 2005

Gambar 1 menyajikan struktur dan susunan DNA suatu individu. Basa nitrogen yang menyusun DNA terdiri dari Purin dan Piramidin. Purin terdiri dari Adenin (A) dan Guanin (G). Sedangkan Piramidin terdiri dari Sitosin (C) dan Timin (T). Basa A selalu berpasangan dengan basa T, sedangkan basa G selalu berpasangan dengan C.

RANTAI MARKOV

Rantai Markov adalah rangkaian proses kejadian dimana peluang kejadian yang akan datang hanya bergantung kepada kejadian sekarang dan tidak tergantung kepada kejadian yang lalu. Jika sebuah rantai Markov memiliki ruang state S berhingga, maka M matriks berukuran $n \times n$ disebut matriks transisi dengan entrinya bernilai positif dan jumlahan entri disetiap kolomnya adalah satu. Sebarang vektor keadaan untuk suatu rantai Markov juga memiliki sifat yang sama dengan matriks transisi.

Diasumsikan $\mathbf{x}^{(0)}$ adalah vektor keadaan untuk sebuah rantai Markov pada pengamatan awal. Untuk menentukan vektor-vektor keadaan

$$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, ..., \mathbf{x}^{(n)}$$

pada waktu pengamatan berikutnya, dapat digunakan Persamaan 1 sebagai berikut:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = M\mathbf{x}^{(n)} \tag{1}$$

MODEL JUKES CANTOR

Ada empat jenis basa nitrogen yang terdapat pada setiap barisan DNA. Sehingga, terdapat empat ruang sampel atau kejadian yang mungkin dari rantai Markovnya yaitu $S = \{A, G, C, T\}$. Jika peluang terpilihnya secara acak basa nitrogen yang terdapat pada setiap barisan DNA adalah P_A, P_G, P_C, dan P_T yang memenuhi

$$P_A + P_G + P_C + P_T = 1,$$

maka dapat dibentuk sebuah vektor yang memuat keempat nilai peluang tersebut sebagai berikut:

$$\mathbf{p_0} = \begin{bmatrix} P_A \\ P_G \\ P_C \\ P_T \end{bmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{p_0}$ mendeskripsikan nilai peluang basa nitrogen pada leluhur suatu individu. Kemudian, dapat dibentuk sebuah matriks transisi

$$M = \begin{bmatrix} P_{A|A} & P_{A|G} & P_{A|C} & P_{A|T} \\ P_{G|A} & P_{G|G} & P_{G|C} & P_{G|T} \\ P_{C|A} & P_{C|G} & P_{C|C} & P_{C|T} \\ P_{T|A} & P_{T|G} & P_{T|C} & P_{T|T} \end{bmatrix}.$$

Matriks transisi M menginterpretasikan peluang bersyarat dari substitusi basa nitrogen pada leluhur dan salah satu individu dari keturunan pertama, $P_{(S1 = i \mid S0 = j)}$ untuk setiap $i, j = A, G, C,$ dan T dengan S_0 adalah leluhur dan S_1 adalah salah satu individu dari keturunan pertama. Berdasarkan Persamaan 1 pada rantai Markov, dibentuk model yang dapat menentukan nilai peluang basa nitrogen pada salah satu individu dari keturunan pertama sebagai berikut:

$$M\mathbf{p_0} = \mathbf{p_1}.$$

Vektor $\mathbf{p_1}$ mendeskripsikan nilai peluang basa nitrogen pada salah satu individu dari keturunan pertama. Selanjutnya, dibentuk model yang dapat menentukan nilai peluang basa nitrogen pada keturunan suatu individu yang bergantung pada waktu (t) sebagai berikut:

$$M^t\mathbf{p_{t-1}} = \mathbf{p_t} \tag{2}$$

Pada Persamaan 2, matriks transisi M^t menginterpretasikan peluang bersyarat dari substitusi basa nitrogen pada leluhur dan salah satu individu dari keturunan ke-t, $P_{(St = i \mid S0 = j)}$ untuk setiap $i, j = A, G, C,$ dan T dengan S_0 adalah leluhur dan S_t adalah salah satu individu dari keturunan ke-t. Sedangkan vektor keadaan $\mathbf{p_t}$ mendeskripsikan nilai peluang basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-t. Persamaan 2 menjelaskan bahwa untuk mengetahui keadaan pada pengamatan ke-t, nilai vektor keadaan pada pengamatan ke-(t-1) dan matriks transisi yang bersesuaian dengan rantai markov yang bergantung pada waktu (t) harus diketahui terlebih dahulu.

Model Jukes Cantor adalah salah satu model dari rantai Markov. Model Jukes Cantor dapat digunakan untuk menentukan peluang basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-*t* tanpa perlu mengetahui peluang basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-(*t*-1) [5]. Sehingga, dengan menggunakan model Jukes Cantor dapat diketahui peluang basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-*t* hanya dengan mengetahui nilai peluang basa nitrogen pada leluhurnya saja. Terdapat beberapa asumsi dasar yang harus dipenuhi agar syarat pada rantai Markov dapat selalu terpenuhi. Adapun asumsi-asumsi tersebut adalah sebagai berikut:

1. Semua basa nitrogen pada leluhur memiliki nilai peluang yang sama, yaitu
$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} P_A \\ P_G \\ P_C \\ P_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$
2. Substitusi basa yang satu ke basa yang lain memiliki nilai peluang bersyarat yang sama. Sehingga, substitusi basa $A \leftrightarrow T$, $A \leftrightarrow C$, $A \leftrightarrow G$, $C \leftrightarrow T$, $C \leftrightarrow G$, dan $T \leftrightarrow G$ memiliki nilai peluang yang sama untuk terjadi.

Tabel 1 Peluang Bersyarat Basa Nitrogen pada DNA Leluhur dan Keturunan Pertama

		S_1			
		A	G	C	T
S_0	A	$1-\alpha$	$\frac{\alpha}{3}$	$\frac{\alpha}{3}$	$\frac{\alpha}{3}$
	G	$\frac{\alpha}{3}$	$1-\alpha$	$\frac{\alpha}{3}$	$\frac{\alpha}{3}$
	C	$\frac{\alpha}{3}$	$\frac{\alpha}{3}$	$1-\alpha$	$\frac{\alpha}{3}$
	T	$\frac{\alpha}{3}$	$\frac{\alpha}{3}$	$\frac{\alpha}{3}$	$1-\alpha$

Tabel 1 menyajikan bahwa $\frac{\alpha}{3}$ menyatakan peluang bersyarat dari substitusi basa jenis apapun yang terjadi, $P(S_1 = i \mid S_0 = j) = \frac{\alpha}{3}$ untuk setiap $i \neq j$, maka 12 entri selain diagonal utama dalam matriks M bernilai $\frac{\alpha}{3}$. Agar dapat memenuhi syarat pada rantai Markov, maka jumlahan entri di setiap kolom pada matriks *M* adalah satu. Sehingga, nilai pada diagonal matriks *M* adalah 1-α.

Berikut ini adalah langkah-langkah yang harus dilakukan untuk membentuk model Jukes Cantor:

1. Membentuk matriks transisi (*M*) pada model Jukes Cantor, yaitu
$$M = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3} & 1-\alpha & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} & 1-\alpha & \frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} & 1-\alpha \end{bmatrix}$$
2. Menentukan nilai eigen (λ) dan membentuk matriks diagonal yang bersesuaian dengan λ, yaitu
$$\det(\lambda I - M) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \det\begin{bmatrix} \lambda-1+\alpha & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} & \lambda-1+\alpha & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & \lambda-1+\alpha & -\frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & \lambda-1+\alpha \end{bmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (\lambda-1)(4\alpha+3\lambda-3)^3 = 0$$

Sehingga, nilai eigen dari matriks *M* adalah sebagai berikut:

$$\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{dan}$$

$$4\alpha + 3\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{2,3,4} = 1 - \frac{4}{3}\alpha$$

Selanjutnya, keempat nilai eigen yang telah diketahui dapat dibentuk matriks diagonal (D) dan (D^t) sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{4}{3}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{4}{3}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{4}{3}\alpha \end{bmatrix}, \; D^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \end{bmatrix}$$

3. Menentukan basis untuk ruang eigen dari matriks *M* dan membentuk matriks *V* yang mendiagonalisasi matriks *M*.
   a. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$

$$(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda-1+\alpha & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3} & \lambda-1+\alpha & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} & \lambda-1+\alpha & \frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} & \lambda-1+\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} & \alpha & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & \alpha & -\frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 - x_4 \\ x_2 - x_4 \\ x_3 - x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga, diperoleh $x_1 - x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_4, x_2 - x_4 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_4, \text{dan} \;\; x_3 - x_4 = 0 \Leftrightarrow x_3 = x_4$

Misalkan $x_1 = s,$ akibatnya $x_2 = x_3 = x_4 = s$, $s \in \mathbb{R}$

Dengan demikian, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah vektor taknol yang berbentuk

$$\begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ sehingga } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$.

b. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_{2,3,4} = 1 - \frac{4}{3}\alpha$

$$(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 + \alpha & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3} & \lambda - 1 + \alpha & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} & \lambda - 1 + \alpha & \frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} & \frac{\alpha}{3} & \lambda - 1 + \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga, dapat diperoleh $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

Misalkan $x_2 = s, x_3 = t, x_4 = u$, akibatnya $x_1 = -s - t - u$; $s, t, u \in \mathbb{R}$

Dengan demikian, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1 - \frac{4}{3}\alpha$ adalah vektor taknol yang berbentuk

$$\begin{bmatrix} -s-t-u \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ sehingga } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah vektor-vektor yang membentuk sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1 - \frac{4}{3}\alpha$.

Sehingga dibentuklah matriks *V* yang mendiagonalisasi *M* dengan

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan invers dari matriks *V*.
Dengan mereduksi *V* menjadi identitas dan melakukan urutan operasi yang sama terhadap I^n untuk memperoleh V^{-1}, didapatlah hasil sebagai berikut:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

sebagai invers matriks *V*.

5. Selanjutnya dapat dicari nilai M^t sebagai berikut:

$$M^t = V \cdot D^t \cdot V^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \end{bmatrix}$$

6. Menentukan peluang basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-*t*

$$\mathbf{p_t} = M^t \mathbf{p_0}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil tersebut, dapat diketahui bahwa peluang basa nitrogen *A* pada salah satu individu dari keturunan ke-t adalah $\frac{1}{4}$, peluang basa nitrogen *G* adalah $\frac{1}{4}$, peluang basa nitrogen *C* adalah $\frac{1}{4}$, dan peluang basa nitrogen *T* adalah $\frac{1}{4}$. Dengan kata lain, tidak terjadi perubahan pada peluang basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-*t* dengan leluhurnya.

APLIKASI MODEL JUKES CANTOR

Diketahui 40 basa nitrogen dari sebuah barisan DNA leluhur sebagai berikut:

CTAGGCTTACGATTACGAGGATCCAAATGGCACCAATGCT

Tentukan peluang basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-1 sampai dengan ke-5?

Penyelesaian:

Berdasarkan basa nitrogen yang telah diketahui, dapat diperoleh nilai peluang basa nitrogen dari barisan DNA leluhur sebagai berikut:

$$P_A = \frac{12}{40}, \quad P_G = \frac{9}{40}, \quad P_C = \frac{10}{40}, \quad P_T = \frac{9}{40}$$

atau peluang basa nitrogen *A* pada DNA leluhur adalah $\frac{12}{40}$, peluang basa nitrogen *G* adalah $\frac{9}{40}$, peluang basa nitrogen *C* adalah $\frac{10}{40}$, dan peluang basa nitrogen *T* adalah $\frac{9}{40}$. Sehingga vektor peluang basa pada leluhur adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} P_A \\ P_G \\ P_C \\ P_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{40} \\ \frac{9}{40} \\ \frac{10}{40} \\ \frac{9}{40} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, peluang basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-*t* adalah:

$$\mathbf{p}_t = M^t \mathbf{p}_0$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12}{40} \\ \frac{9}{40} \\ \frac{10}{40} \\ \frac{9}{40} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{20}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{40}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{40}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^t \end{bmatrix}$$

Adapun peluang basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-1 sampai dengan ke-5 dengan nilai α = 0,01 adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}29933 \\ 0{,}22533 \\ 0{,}25000 \\ 0{,}22533 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}29877 \\ 0{,}22577 \\ 0{,}25000 \\ 0{,}22577 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0{,}29800 \\ 0{,}22600 \\ 0{,}25000 \\ 0{,}22600 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} 0{,}29740 \\ 0{,}22630 \\ 0{,}25000 \\ 0{,}22630 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_5 = \begin{bmatrix} 0{,}29680 \\ 0{,}22660 \\ 0{,}25000 \\ 0{,}22660 \end{bmatrix}$$

Adapun jumlah basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-1 dengan nilai α = 0,01 adalah sebagai berikut:

$n(A) = P_A \cdot n(S)$	$n(G) = P_G \cdot n(S)$	$n(C) = P_C \cdot n(S)$	$n(T) = P_T \cdot n(S)$
$= 0{,}29933 \cdot 40$	$= 0{,}22533 \cdot 40$	$= 0{,}25000 \cdot 40$	$= 0{,}22533 \cdot 40$
$= 11{,}9732$	$= 9{,}0132$	$= 10$	$= 9{,}0132$
≈ 12	≈ 9		≈ 9

Selanjutnya, jumlah basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-2 dengan nilai α = 0,01 adalah sebagai berikut:

$n(A) = P_A \cdot n(S)$	$n(G) = P_G \cdot n(S)$	$n(C) = P_C \cdot n(S)$	$n(T) = P_T \cdot n(S)$
$= 0{,}29877 \cdot 40$	$= 0{,}22577 \cdot 40$	$= 0{,}25000 \cdot 40$	$= 0{,}22577 \cdot 40$
$= 11{,}9508$	$= 9{,}0308$	$= 10$	$= 9{,}0308$
≈ 12	≈ 9		≈ 9

Cara yang sama dapat dilakukan untuk mendapatkan jumlah basa nitrogen pada keturunan ke-3, 4, dan 5.

Sedangkan peluang basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-1 sampai dengan ke-5 dengan nilai α = 0,99 adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{p_1} = \begin{bmatrix} 0{,}23400 \\ 0{,}25800 \\ 0{,}25000 \\ 0{,}25800 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p_2} = \begin{bmatrix} 0{,}25512 \\ 0{,}24744 \\ 0{,}25000 \\ 0{,}24744 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p_3} = \begin{bmatrix} 0{,}24836 \\ 0{,}25082 \\ 0{,}25000 \\ 0{,}25082 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p_4} = \begin{bmatrix} 0{,}25052 \\ 0{,}24974 \\ 0{,}25000 \\ 0{,}24974 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p_5} = \begin{bmatrix} 0{,}24980 \\ 0{,}25010 \\ 0{,}25000 \\ 0{,}25010 \end{bmatrix}$$

Adapun jumlah basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-1 dengan nilai α = 0,99 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} n(A) &= P_A \cdot n(S) \\ &= 0{,}23400 \cdot 40 \\ &= 9{,}36 \\ &\approx 9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n(G) &= P_G \cdot n(S) \\ &= 0{,}25800 \cdot 40 \\ &= 10{,}32 \\ &\approx 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n(C) &= P_C \cdot n(S) \\ &= 0{,}25000 \cdot 40 \\ &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n(T) &= P_T \cdot n(S) \\ &= 0{,}25800 \cdot 40 \\ &= 10{,}32 \\ &\approx 10 \end{aligned}$$

Selanjutnya, jumlah basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-2 dengan nilai α = 0,99 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} n(A) &= P_A \cdot n(S) \\ &= 0{,}25512 \cdot 40 \\ &= 10{,}2048 \\ &\approx 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n(G) &= P_G \cdot n(S) \\ &= 0{,}24744 \cdot 40 \\ &= 9{,}8976 \\ &\approx 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n(C) &= P_C \cdot n(S) \\ &= 0{,}25000 \cdot 40 \\ &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n(T) &= P_T \cdot n(S) \\ &= 0{,}24744 \cdot 40 \\ &= 9{,}8976 \\ &\approx 10 \end{aligned}$$

Cara yang sama dapat dilakukan untuk mendapatkan jumlah basa nitrogen pada keturunan ke-3, 4, dan 5.

Berdasarkan perhitungan tersebut dapat diketahui nilai peluang basa nitrogen salah satu individu dari keturunan ke-*n* dipengaruhi oleh nilai α. Dalam kasus ini nilai α merepresentasikan nilai peluang basa nitrogen yang mengalami mutasi. Jika nilai α semakin kecil, maka peluang basa nitrogen yang mengalami mutasi juga kecil. Sehingga, peluang basa nitrogen keturunannya tidak jauh berbeda dari leluhurnya. Sebaliknya, jika nilai α semakin besar, maka peluang basa nitrogen yang mengalami mutasi juga besar. Sehingga, peluang basa nitrogen keturunannya jauh berbeda dari leluhurnya.

PENUTUP

Model Jukes Cantor yang dapat digunakan untuk mencari nilai peluang basa nitrogen pada salah satu individu dari keturunan ke-t hanya dengan mengetahui nilai peluang basa nitrogen pada leluhurnya adalah $\mathbf{p_t} = M\ ^t\mathbf{p_0}$. Dengan menerapkan model pada suatu barisan DNA leluhur dengan $\mathbf{p_0}$=[0,3 0,225 0,25 0,225]^T, maka nilai peluang basa nitrogen pada salah satu individu dari keturunan ke-1 sampai dengan ke-5 dengan α=0,01 adalah. $\mathbf{p_1}$=[0,29933 0,22533 0,25 0,225533]^T, $\mathbf{p_2}$=[0,29877 0,22577 0,25 0,22577]^T, $\mathbf{p_3}$=[0,298 0,226 0,25 0,226]^T, $\mathbf{p_4}$=[0,2974 0,2263 0,25 0,2263]^T, dan $\mathbf{p_5}$=[0,2968 0,2266 0,25 0,2266]^T. Sedangkan, jika α=0,99 maka. $\mathbf{p_1}$=[0,234 0,258 0,25 0,258]^T, $\mathbf{p_2}$=[0,25512 0,24744 0,25 0,24744]^T, $\mathbf{p_3}$=[0,24836 0,25082 0,25 0,25082]^T, $\mathbf{p_4}$=[0,25052 0,24974 0,25 0,24974]^T, dan $\mathbf{p_5}$=[0,24898 0,2501 0,25 0,2501]^T.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Suryadjaja, F. DNA, Tanda Pengenal Masa Depan [Internet]. 2011 [updated 2011; cited 2016 Mar 16]. Available from: http://www.suaramerdeka.com/

[2]. Yunita, Elin Kristanti. 17-7-14: Setahun Tragedi Malaysia Airlines MH 17 Dirudal Ukraina [Internet]. [updated 2015; cited 2016 Mar 16]. Available from: http://news.liputan6.com/

[3]. Gunawan, Rizki. Pertama Kali, Jasad Korban MH17 Berhasil Diidentifikasi [Internet]. [updated 2014; cited 2016 Mar 16]. Available from: http://news.liputan6.com/

[4]. Suwarno. *Panduan Pembelajaran Biologi untuk SMA dan MA Kelas XII.* Jakarta: Pusat Pembukuan Departemen Pendidikan Nasional; 2009

[5]. Elizabeth, S.A. dan John, A.R. *Mathematical Models in Biology an Introduction*. New York: Cambridge University Press; 2004.

NAHRUL HAYATI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, nahrul.ney@gmail.com

MARIATUL KIFTIAH : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, kiftiahmariatul@ymail.com

BAYU PRIHANDONO : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak, beiprihandono@gmail.com